« En mathématiques, évident est le mot le plus dangereux. » Eric Temple Bell

Chapitre VII — Fonction logarithme népérien

I – Généralités

On sait que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

Donc, pour tout réel $a>0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet une unique sol° sur $]-\infty;+\infty[$.
car exp est continue et strict. ↗ sur $\mathbb{R}$ et $a>0$, donc $a \in]0;+\infty[$.
Donc d'après le CTVI, l'équa° : $e^x = a$ admet une unique sol° sur $\mathbb{R}$: on la note $\ln(a)$.

Définition

Soit ***a* un réel strictement positif.**

On appelle logarithme népérien de a, noté $\ln(a)$, ***l'unique réel solution de l'équation : $e^x = a$,*** *d'inconnue x.*

Conséquences

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, et à tout réel x strictement positif, elle associe le réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x.

$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto \ln(x)$ avec par définition, $e^{\ln(x)} = x$.

Important : On a donc :	$x>0$ et $y=\ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

On a donc immédiatement : ♥♥♥

- Pour tout réel x ***strictement positif***, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$

Remarque : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan, les courbes représentatives de la fonction exponentielle et celle de la fonction $\ln$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équa° $y=x$ (appelée 1ère bissectrice).

Illustration et justification :

On note respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous réels $x>0$ et y, dire que $M'(x\,;y)$ appartient à $\mathcal{C}'$ équivaut à $y=\ln(x)$, c'est-à-dire $x=e^y$, ce qui équivaut à dire que $M(y\,;x)$ appartient à $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

par rapport

But : Mq la symétrie axiale p/r $y=x$ "pente des coordonnées"
càd que si $M(a;b)$, alors le point M' symétrique de M p/r à $y=x$
a pour coordonnées : $M'(b;a)$.

Démo° : Soit H le point d'intersec° de (Δ) et de MM' où $M' = S_{(\Delta)}(M)$.

$M(a;b)$, $M'(a';b')$ et H = milieu de $[MM']$, car $M' = S_{(\Delta)}(M)$

Donc $H\left(\frac{a+a'}{2};\frac{b+b'}{2}\right)$.

De +, $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ où $\vec{u}\binom{1}{1}$ est un vecteur directeur de (Δ).

Donc $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$ (produit scalaire nul).

Or $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x_{M'} - x_M = a' - a \\ y_{M'} - y_M = b' - b \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\binom{1}{1}$

Donc $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = (a'-a) \times 1 + (b'-b) \times 1 = a' - a + b' - b$.

Or $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$, donc $a' - a + b' - b = 0$

De +, $H\left(\frac{a'+a}{2};\frac{b'+b}{2}\right) \in (\Delta)$ donc $\in (\Delta)$ a pour équa° : $y=x$, on a :

$\frac{b'+b}{2} = \frac{a'+a}{2}$

Donc $b' + b = a' + a$.

Donc $\begin{cases} a' - a + b' - b = 0 \\ b + b' = a + a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \end{matrix} \begin{cases} a' + b' = a + b \\ -a' + b' = a - b \end{cases}$

$(L_1)+(L_2)$: $2b' = 2a$
$b' = a$
et $(L_1)-(L_2)$: $2a' = 2b$
$a' = b$

Ainsi $M'(b;a)$ cqfd.

But : $M'(e^x ; x) \in \mathcal{C}_{ln}$

Or : $\ln(e^x) = x$; donc $M'(e^x ; x) \in \mathcal{C}_{ln}$.

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a l'équivalence : $\boxed{\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b}$.

Exercice 1

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\ln(x) = -3$; b) $\ln(x) = 4$; c) $e^x = 2$; d) $\ln(x+5) = \ln(4x-8)$; e) $3e^{2x} - 5 = 0$

a) $\ln(x) = -3$ → M_1 : $\ln(x) = \ln(e^{-3}) \Leftrightarrow x = e^{-3}$ $\mathcal{S} = \{e^{-3}\}$

→ M_2 : $e^{\ln(x)} = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3}$ $\mathcal{S} = \{e^{-3}\}$

b) $\ln(x) = 4$

$e^{\ln(x)} = e^4$

$x = e^4$

$\mathcal{S} = \{e^4\}$

c) $e^x = 2$

$\ln(e^x) = \ln(2)$

$x = \ln(2)$

$\mathcal{S} = \{\ln(2)\}$

e) $3e^{2x} - 5 = 0$

$3e^{2x} = 5$

$e^{2x} = \frac{5}{3}$

$\ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$2x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$x = \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right\}$

d) $\ln(x+5) = \ln(4x-8)$

condi° d'existence :

$\ln(x+5)$ existe ssi $x + 5 > 0$

$x > -5$

$\ln(4x-8)$ existe ssi $4x - 8 > 0$

$4x > 8$

$x > 2$

On résout donc cette équa° sur $]2 ; +\infty[$

$\mathcal{S}_{(e)} \subset]2 ; +\infty[$.

$\ln(x+5) = \ln(4x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x + 5 = 4x - 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ x > 2 \end{cases}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{13}{3}\right\}$

II – Propriétés algébriques de la fonction ln

Théorème (*relation fonctionnelle de ln*)

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : ♥♥ $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ ♥♥

Remarque : La fonction ln transforme donc un produit en une somme

(soit l'action inverse de celle de la f° exponentielle $e^{a+b} = e^a \times e^b$).

Preuve :

Soit $x>0$ et $y>0$; $xy>0$.

Donc $\ln(xy)$ existe (tout comme $\ln(x)$ et $\ln(y)$)

Rappel : $a, b \in \mathbb{R}$: $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$

Ici posons $a = \ln(xy)$ et $b = \ln(x) + \ln(y)$

$e^a = e^{\ln(xy)} = xy$ et $e^b = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = xy$

Donc $e^a = e^b = (xy)$

Donc $a = b$ càd $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

♥♥♥ **Propriétés importantes de la fonction ln** ♥♥♥

1) Pour tout réel $x>0$, $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2) Pour tous réels x et y strictement positifs, $ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

3) Pour tout réel $x>0$ et pour tout entier relatif n, $ln(x^n) = n \times \ln(x)$

4) Pour tout réel $x>0$, $ln(\sqrt{x}) = \frac{\ln(x)}{2}$

Preuve :

1) $x>0$ donc $\frac{1}{x}>0$ et $x \times \frac{1}{x} = 1$

Donc $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1)$

$\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2) $x>0$, $y>0$ donc $\frac{x}{y}>0$

$\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

a) $x>0$, soit $n \in \mathbb{N}$

Procédons par récurrence : $\mathcal{P}(n) = \ln(x^n) = n\ln(x)$

→ Initialisation : pour $n=0$: $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

→ Hérédité : Soit n un entier fixé pr lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie, càd

$\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Montrons que $P(n+1)$ vraie, càd $\ln(x^{n+1}) = (n+1) \times \ln(x)$.

$x^{n+1} = x^n \times x$

Donc $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n\ln(x) + \ln(x)$

$\ln(x^{n+1}) = (n+1) \times \ln(x)$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

→ Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$ $(x>0)$

• si $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ càd si $n<0$:

astuce belge : $n = -(-n)$

donc $x^n = x^{-(-n)} = \dfrac{1}{x^{-n}}$

Donc $\ln(x^n) = \ln\left(\dfrac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n})$ avec $-n>0$ (donc $-n \in \mathbb{N}^*$)

donc grâce à la récurrence précédente :

$\ln(x^n) = -(-n)\ln(x) = n\ln(x)$.

b) $x>0$

$\sqrt{x}^2 = x$

Donc $\ln(\sqrt{x}^2) = \ln(x)$

$2\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{\ln(x)}{2}$.

Exercice 2

1) Exprimer en fonction de $ln(2)$ et $ln(3)$, chacune des expressions suivantes :

$A = ln(6)$; $B = ln(9)$; $C = ln(\frac{2}{3})$; $D = ln(\frac{1}{12})$; $E = ln(\sqrt{12})$; $F = ln(\sqrt{3}+1)+ln(\sqrt{3}-1)$

2) Simplifier les écritures : $G = ln(\frac{1}{e^2})$ $\quad H = ln(e^4) + ln(2e^{-1})$.

13 a) Démontrer que pour tout réel x,

$$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1).$$

b) Résoudre l'équation $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = 7$.

14 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 0.$$

15 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(2x + 3) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right).$$

---

1) $A = \ln(6) = \ln(3 \times 2) = \ln(3) + \ln(2)$

$B = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$

$C = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3)$

$D = \ln\left(\frac{1}{12}\right) = -\ln(12) = -\ln(2^2 \times 3) = -(2\ln(2) + \ln(3)) = -2\ln(2) - \ln(3)$

$E = \ln(\sqrt{12}) = \frac{\ln(12)}{2} = \frac{2\ln(2) + \ln(3)}{2} = \frac{2\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{2} = \ln(2) + \frac{\ln(3)}{2}$

$F = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1) = \ln((\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)) = \ln(\sqrt{3}^2 - 1^2)$

$F = \ln(3-1) = \ln(2)$

2) $G = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln(e) = -2$

$H = \ln(e^4) + \ln(2e^{-1}) = 4 + \ln(2) - 1 = 3 + \ln(2)$

13 a) $\underline{M_q}$: $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x}) + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x}(1 + e^{-4x}))$

$= \ln(e^{4x} + e^{4x} \times e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1)$

$\underline{M_2}$: $4x + \ln(1+e^{-4x}) = 4x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{4x}}\right) = 4x + \ln\left(\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}}\right)$

$$= 4x + \ln(e^{4x}+1) - \ln(e^{4x}) = \ln(e^{4x}+1).$$

13b) $4x + \ln(1+e^{-4x}) = 7$

$$\ln(e^{4x}+1) = 7$$

$$e^{\ln(e^{4x}+1)} = e^7$$

$$e^{4x} + 1 = e^7$$

$$e^{4x} = e^7 - 1 \qquad (e^7 - 1 > 0)$$

$$\ln(e^{4x}) = \ln(e^7 - 1)$$

$$4x = \ln(e^7-1)$$

$$x = \frac{\ln(e^7-1)}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln(e^7-1)}{4}\right\}$$

14) $x > 0$; $x^3 > 0$ et $\sqrt{x} > 0$:

$$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 3\ln(x) - \frac{6\ln(x)}{2} = 0.$$

15) $x > 0$:

$$\ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right) = \ln\left(x\left(2+\frac{3}{x}\right)\right) = \ln(2x+3).$$

III – Sens de variation de la fonction ln et conséquences

Propriété

1) *ln* est définie et continue sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) *ln* est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, $(\ln)'(x) = \ldots\frac{1}{x}\ldots$

3) La fonction *ln* est ~~strict~~......↗........sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Preuve :

Preuve du 2 : Pour $x > 0$, posons $f(x) = e^{\ln(x)} = x$

Admettons que ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Donc $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$

Donc $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = u'(x) \times e^{\ln(x)}$

et $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.

Ainsi : $u'(x) \times e^{\ln(x)} = 1$

$u'(x) \times x = 1$

$u'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi : $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.

Preuve du 3 :

Conséquence du 2 vu que $x > 0$; $\frac{1}{x} > 0$

donc $(\ln)'(x) > 0$ donc $\ln$ strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

<u>Conséquences</u> : Etude du signe de $ln(x)$, pour $x > 0$:

- $ln(1) = 0$
- $ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

- Pour tous réels x et y strictement positifs : $ln(x) < ln(y) \Leftrightarrow x < y$
  $ln(x) \geq ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$

♥♥♥On retiendra donc que sur $]0 ; 1[$, la fonction ln est à valeurs strict. négatives et que sur $]1 ; +\infty[$ la fonction ln est à valeurs strictement positives ♥♥♥

<u>*Illustration graphique*</u> : premier tracé de la courbe représentant la fonction ln.

<u>**Exercice 4**</u> ***(Fondamental XXL, bac)***

a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $0,95^n \leq 10^{-8}$; $2^n > 10^6$.

b) n est un entier naturel non nul. On lance n fois d'affilée un dé cubique non truqué.

Exprimer, en fonction de n, la probabilité, notée p_n, de l'événement suivant noté A_n :
A_n : "Obtenir au moins une fois six lors des n lancers".

b') Déterminer, algébriquement, le nombre minimal de lancers à effectuer, pour que p_n soit supérieure à 0,99.

a) • $0,95^n \leq 10^{-8} \iff \ln(0,95^n) \leq \ln(10^{-8})$ car $\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$0,95^n \leq 10^{-8} \iff n\ln(0,95) \leq -8\ln(10)$

$0,95^n \leq 10^{-8} \iff n \geq \frac{-8\ln(10)}{\ln(0,95)}$

car $\ln(0,95) < 0$: en effet $\ln(0,95) = -0,05$

ou $\forall x \in]0;1[, \ln(x) < 0$.

$0,95^n \leq 10^{-8} \iff n \geq 360$ car n est entier.

360 est donc la + petite valeur à partir duquel : $0,95^n \leq 10^{-8}$.

• $2^n > 10^6 \iff \ln(2^n) > \ln(10^6)$ car $\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$.

$2^n > 10^6 \iff n\ln(2) > 6\ln(10)$

$2^n > 10^6 \iff n > \frac{6\ln(10)}{\ln(2)}$ car $\ln(2) > 0$: en effet $\ln(2) = 0,7$

$2^n > 10^6 \iff n \geq 20$ car n entier.

Le + petit entier n tel que $2^n > 10^6$ est 20 car $\frac{6\ln(10)}{\ln(2)} = 19,9$.

b) $\overline{A_n}$ = " n'obtenir aucun 6 lors des n lancers "

$p(\overline{A_n}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Or $p(\overline{A_n}) = 1 - p(A_n)$, donc $p(A_n) = 1 - p(\overline{A_n}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Ainsi : $P_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

b') $P_n \geq 0,99 \iff 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,99 \iff 1 - 0,99 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01$

$P_n \geq 0,99 \iff \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \leq \ln(0,01)$ car $\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$.

$P_n \geq 0,99 \iff n \times \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,01)$

$P_n \geq 0,99 \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$ car $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$ vu que $\frac{5}{6} \in]0;1[$

et $\ln$ à valeurs nég. sur $]0;1[$.

Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 25,26$.

$P_n \geq 0,99 \iff n \geq 26$. Donc au minimum 26 lancers sont nécessaires pour que $P_n \geq 0,99$.

IV – Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln

Propriété	♥♥♥ $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} ln(x) = -\infty$ ♥♥♥

Preuve :

1. Soit A un réel positif arbitrairement fixé (aussi grand soit-il).

$\ln(x) \geq A \iff e^{\ln(x)} \geq e^A$ car exp croît sur $\mathbb{R}$

$\ln(x) \geq A \iff x \geq e^A$

ceci étant vrai pr tt réel $A>0$, on a :

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

2. $x>0$ et $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Or $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et d'après 1, $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$.

Donc par comparaison : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Et par suite : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

Rq importante : L'axe des abscisses $x=0$ est A.S.V à $\mathcal{C}_{\ln}$.

Exercice 3

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f* définie par : $f(x) = ln(4-2x)$.

2a) Etudier le signe de $u(x) = ln(x) - 2$ sur $]0\,;+\infty[$.
2b) Etudier le sens de variation de la fonction *g* définie par : $g(x) = x\,ln(x) - 3x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $ln(x+3) + ln(x-2) \leq ln(6)$

1) $f(x) = \ln(4-2x)$

ln est définie sur $]0;+\infty[$ donc on peut calculer $f(x)$ ssi :

$4-2x>0$
$4>2x$
$x<2$

Donc $D_f =]-\infty; 2[$.

2.a) $u(x) = \ln(x) - 2$ avec $x > 0$

Résolvons par ex : $u(x) \geq 0 \iff \ln(x) - 2 \geq 0$

$u(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq 2$

$u(x) \geq 0 \iff e^{\ln(x)} \geq e^2 \iff x \geq e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
	‖	$-$	0	$+$	

2b) $g(x) = x\ln(x) - 3x$ avec $x > 0$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ car produit et somme de f° dérivables.

$g(x) = x\ln(x) - 3x = u(x) \times v(x) - 3x$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

Donc $g'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x)v'(x) - 3$

$g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 3$

$g'(x) = \ln(x) - 2 = u(x)$

D'après 2a) :

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x) = u(x)$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	

$g(e^2) = e^2\ln(e^2) - 3e^2$
$= 2e^2 - 3e^2 = -e^2$

3) $\ln(x+3) + \ln(x-2) \leq \ln(6)$ (I)

• condi° d'existence :
$\ln(x+3)$ existe ssi $x+3 > 0$ càd ssi $x > -3$
$\ln(x-2)$ existe ssi $x-2 > 0$ càd ssi $x > 2$

Conclusion : on peut donc calculer $\ln(x+3) + \ln(x-2)$ à condi° que $x > 2$.

Ainsi, $S_{(I)} \subset]2;+\infty[$

• $\ln(x+3) + \ln(x-2) \leq \ln(6)$

$$\begin{cases} e^{\ln(x+3)+\ln(x-2)} \leq e^{\ln(6)} \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\ln(x+3)} \times e^{\ln(x-2)} \geq e^{\ln(6)} \\ x > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+3)(x-2) \geq 6 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 2x - 6 \leq 6 \\ x > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x > 2 \end{cases}$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-12) = 49 = 7^2$

$\Delta > 0$ donc l'équa° admet 2 sol° : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-1+7}{2} = 3 \end{cases}$

$a > 0$ d'où :

x	2		3		$+\infty$
	‖	$-$	0	$+$	

Par suite : $\begin{cases} x^2 + x - 12 \leq 0 \\ x > 2 \end{cases}$ dès que $2 < x \leq 3$

$\mathcal{S} =]2 ; 3]$

Application

Donner le tableau de variation complet de la fonction ln, et tracer dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ du plan sa courbe représentative.
On donnera les équations des tangente à C_{ln} aux points A(1 ; 0) et B(e ; 1).
Justifier que C_{ln} est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur]0 ; +∞[.

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Mq $\ln$ est concave sur $]0 ; +\infty[$:

$\ln$ est 2 fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$

$(\ln)''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

$\dfrac{-1}{x^2} < 0$ donc $(\ln)''(x) < 0$ donc $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}^*_+$ et par suite $\mathcal{C}_{\ln}$ est situé en dessous de ses tangentes.

Soit T_A la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ en $A(1\,;0)$:

$y = (\ln)'(1)(x-1) + \ln(1)$

$y = \frac{1}{1}(x-1)$

$y = x - 1$

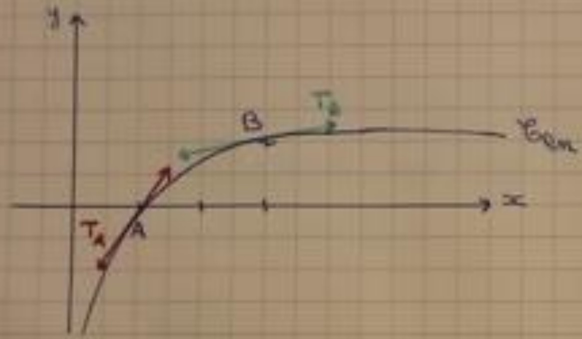
Soit T_B la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ en $B(e\,;1)$:

$y = (\ln)'(e)(x-e) + \ln(e)$

$y = \frac{1}{e}(x-e) + 1$

$y = \frac{x}{e} - \frac{e}{e} + 1$

$y = \frac{x}{e}$ Rq : T_B passe par l'origine.



***Propriété* (croissances comparées)**

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

En d'autres termes, la fonction *ln* est négligeable devant l'identité au voisinage de $+\infty$.

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0^-$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$.

Preuve :

1. Mq $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Soit f la f° définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$.

Or $x \geq 1$, donc $f'(x)$ a le m̂ signe que son numérateur $1-\sqrt{x}$.

Ainsi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \leq 1^2$ car $x \mapsto x^2$ croît sur $[0;+\infty[$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Ainsi comme ici $x \geq 1$, $f'(x) \leq 0$ donc f décroît sur $[1;+\infty[$.

D'où :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	-2 $\searrow$	

$f(1) = \ln(1) - 2 \times \sqrt{1} = -2$

Conclusion : Si $x \geq 1$, alors $f(x) \leq -2 < 0$ grâce au tableau.

Ainsi si $x \geq 1$, alors $\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$.

$0 \leq \ln(x) < 2\sqrt{x}$

Donc $\frac{0}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$ car $x \geq 1 > 0$.

Pour $x \geq 1$: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ donc d'après le th. des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

1bis $n \geq 1$; $x > 0$

$\ln(x) = \frac{\ln(x^n)}{n}$ (astuce belge)

Donc $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x^n)}{x^n \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln(x^n)}{x^n}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et par c.c : $\lim\limits_{W\to+\infty} \frac{\ln(W)}{W} = 0$.

Donc par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^n} = 0$.

Donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\ln(x^n)}{x^n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^n} = 0$.

Preuve du 2 : Mq $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$

astuce belge : $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Or $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et par c.c $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$.

Donc par composée : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$

et par produit : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$.

Exercice 5

1) Déterminer les limites suivantes : *a)* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x))$; *b)* $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(x))$; *c)* $\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\ln(x)}}_{h(x)}$

2) Pout tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(1 + \frac{3x}{e^x})$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) Déterminer, en revenant à la définition du nombre dérivé : $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. ♥♥(post-bac).

1.a) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x))$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -\ln(x) = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x)) = +\infty$

Rq : $x = 0$ (axe des y) est A.S.V. à $\mathcal{C}_g$.

1.b) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ où $g(x) = x - \ln(x)$

Ici F.I. de type "$+\infty - \infty$"

$g(x) = x - \ln(x)$

$g(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

Or par c.c. : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par somme : $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

et $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Donc par limite de produit : $\lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$

1c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \ln(x)}$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par produit : $\lim_{x \to +\infty} x\ln(x) = +$

Donc par quotient : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$, donc $y = 0$ (axe des x) est A.S.H. à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) $x > 0$, $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$

$f(x) = \ln(e^x + 3x) - \ln(e^x)$

$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 3x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3x}{e^x}\right)$

$f(x) = \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)$

Par cc : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; donc

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) = 1$ par produit et somme.

Or $\lim_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ car $\ln$ est continue en 0, donc par composée : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses ($y = 0$) est A.S.H. à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3) $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = (\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

↳ car $\ln$ est dérivable en 1.

V- Fonctions composées et logarithme népérien

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = ln(u(x))$.

Alors g est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a : ♥♥ $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ♥♥.

Preuve :

$u(x)>0$ sur I, donc $\ln(u(x))$ existe.

$g(x) = \ln(u(x)) = f(u(x))$ où $\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Par th. de dérivaᵒ des f° composées :

$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

$g'(x) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice 6

1) Calculer la dérivée de : $f(x) = ln(2x^2 + 1)$. Préciser l'intervalle de dérivabilité de f.

2) Même question avec : $g(x) = ln(4+2e^x)$.

3) Même question avec : $h(x) = ln(e^{-x} + 1)$.

1) $f(x) = \ln(2x^2+1) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x^2+1$ donc $u'(x) = 4x$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1 \geq 0$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée) et :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{4x}{2x^2+1}$.

2) $g(x) = \ln(4+2e^x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 4+2e^x$ donc $u'(x) = 2e^x$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $2e^x > 0$, donc $2e^x + 4 > 4 > 0$.

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de f° dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2e^x}{4+2e^x}$.

Exercice complémentaire

Complément : Fonctions puissances.

Pour tout réel $x > 0$, on définit, pour tout réel a, x^a par : $x^a = e^{a\ln(x)}$

Etudier suivant les valeurs du réel a, le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$f(x) = x^a$. où $a \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

---

ex : $x^{1,5} = e^{1,5\ln(x)}$

$f(x) = e^{a\ln(x)} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = a\ln(x)$

$u'(x) = a\frac{1}{x} = \frac{a}{x}$.

$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = \frac{a}{x} \times e^{a\ln(x)}$ avec $e^{a\ln(x)} > 0$; $x > 0$ donc

$f'(x)$ a le m̂ signe que a :

Si $a < 0$, $f_a'(x) < 0$, donc $f_a \searrow$ sur $]0 ; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{a\ln(x)} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} a\ln(x) = -\infty$ car $a < 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_a(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{a\ln(x)} = +\infty$

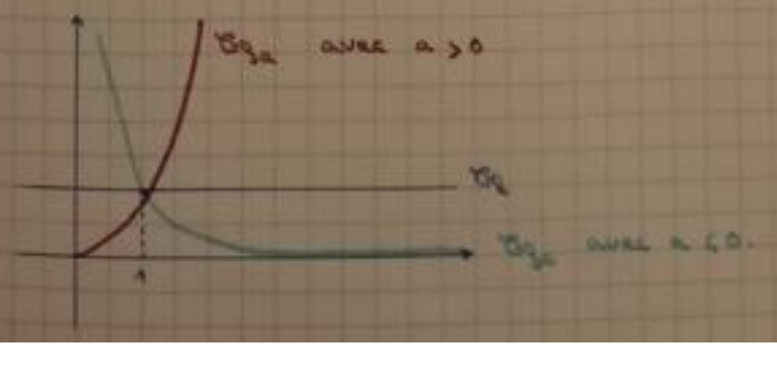
Rq : l'axe des x est A.S.H. à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Si $a = 0$: $f_a(x) = e^{a\ln(x)} = e^0 = 1$.

Si $a > 0$: $f_a'(x) > 0$, donc $f_a \nearrow$ sur $]0 ; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f_a(x)$	‖	0	$\nearrow +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_a(x) = 0$



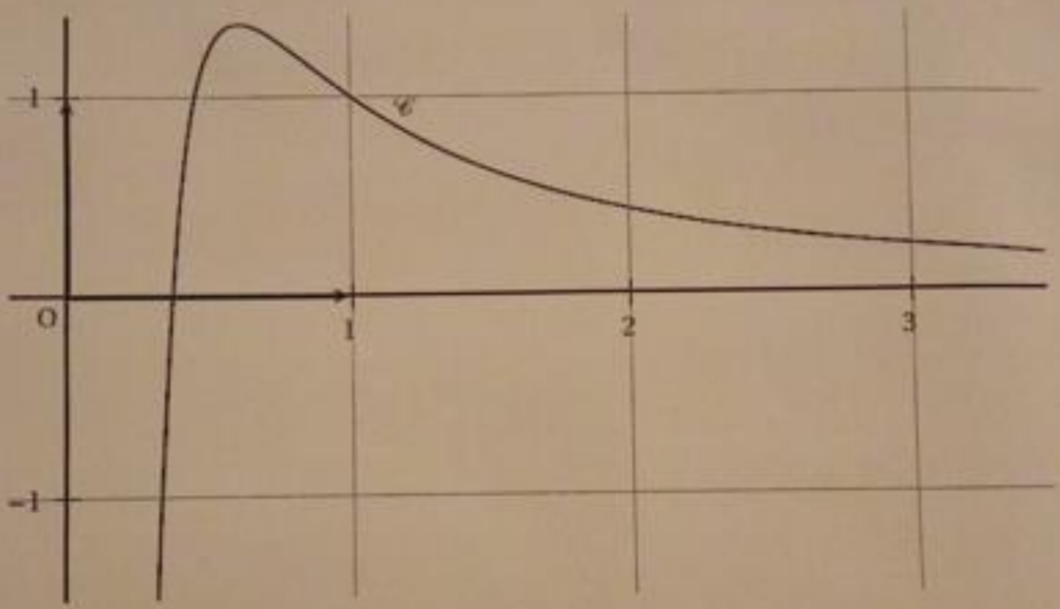
VII – Quelques exercices de type bac

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.
   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,
   $$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$
   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ avec $x>0$.

1a) Cherchons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$:

Par limite de réf : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln(x)) = -\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^+$

Donc par limite de quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.

1b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.

On cherche : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (lim de réf)

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc par limite de produit et de somme :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

1c) D'après q 1a) : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équa° $x=0$ est A.S.V à C_f.

D'après q 1b) : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équa° $y=0$ est A.S.H. à C_f en $+\infty$.

2a) $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1+\ln(x)$ et $v(x) = x^2$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$; $v'(x) = 2x$

Donc $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln(x) \times 2x)}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{-x-2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(-1-2\ln(x))}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

Exercice II

Vrai ou Faux : justifier comme il se doit :

1)

Affirmation 1 : $\underbrace{ln(\sqrt{e^7}) + \frac{ln(e^9)}{ln(e^2)}}_{G} = \underbrace{\frac{e^{ln(2)+ln(3)}}{e^{ln(3)-ln(4)}}}_{D}$ vrai

2)

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Affirmation 2 : $\mathscr{C}_n$ admet une unique tangente horizontale en un unique point nommé S_n dont l'ordonnée est égale à n^2. vrai

Affirmation 3 : l'équation : $ln(x-1) - ln(x+2) = ln(4)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Faux

---

A_1 : $G = ln(\sqrt{e^7}) + \frac{ln(e^9)}{ln(e^2)}$

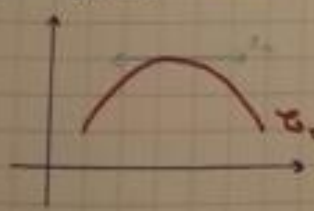
$G = \frac{ln(e^7)}{2} + \frac{9}{2}$

$G = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = 8$

$D = \frac{e^{ln(2)+ln(3)}}{e^{(ln 3) - ln(4)}} = \frac{e^{ln(6)}}{e^{ln(\frac{3}{4})}} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 6 \times \frac{4}{3} = 8.$

Ainsi $G = D$ donc A_1 est vraie.

A_2 : $f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$



$\mathscr{C}_n$ = courbe de f_n

• Cherchons si $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale

M_1 : En résolvant : $f_n'(x) = 0$

Or $f_n'(x) = 2ne^x - 2e^{2x}$

Ainsi, $f_n'(x) = 0 \iff 2ne^x - 2e^{2x} = 0$

$\iff ne^x = e^{2x}$

$\iff n = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$

$\iff ln(n) = ln(e^x)$

$f'(x) = 0 \iff x = \ln(n)$

Il y a une unique tangente horizontale en le point S_n d'abscisse $x = \ln(n)$.

Enfin $y_{S_n} = f_n(\ln(n)) = 2ne^{\ln(n)} - e^{2\ln(n)}$

$y_{S_n} = 2n^2 - (e^{\ln(n)})^2 = 2n^2 - n^2 = n^2$

Ainsi $S_n(\ln(n) ; n^2)$: A_2 vraie.

A_3 : $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(4)$

Conditions d'existence :

$\ln(x-1)$ existe ssi $x - 1 > 0$ càd $x > 1$.
$\ln(x+2)$ existe ssi $x + 2 > 0$ càd $x > -2$.

Donc on résout cette inéquation sur $]1 ; +\infty[$.

Ainsi, $S_{(E)} \subset]1 ; +\infty[$.

Pour $x > 1$:

$\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(4)$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(4) \iff \frac{x-1}{x+2} = 4$ et $x > 1$

$\iff x - 1 = 4(x+2)$ et $x > 1$

$\iff x - 1 = 4x + 8$ et $x > 1$

$\iff 3x = -9$

$\iff x = -3$ et $x > 1$

Donc (E) n'a pas de solution.

Donc A_3 est fausse.

Exercice III

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.
3. a. Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\,;\,+\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\,;\,\alpha]$ alors $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie A

1. $g(x) = f(x) - x$ $\qquad x \in]-1,5\,;\,+\infty[$
$g(x) = \ln(2x+3) - 1 - x$

On cherche $\lim\limits_{\substack{x \to -1,5 \\ x > -1,5}} g(x)$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to -1,5 \\ x > -1,5}} (2x+3) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \ln(X) = -\infty$, donc par limite de composée :

$\lim\limits_{\substack{x \to -1,5 \\ x > -1,5}} \ln(2x+3) = -\infty$.

Enfin par limite de somme : $\lim\limits_{\substack{x \to -1,5 \\ x > -1,5}} (-1-x) = 0,5$ donc par limite de somme :

$\lim\limits_{\substack{x \to -1,5 \\ x > -1,5}} g(x) = -\infty$.

2) $g(x) = \ln(2x+3) - 1 - x$ avec $x > -1,5$

$g(x) = \ln(u(x)) - 1 - x$ où $u(x) = 2x+3$ et $u'(x) = 2$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \frac{2}{2x+3} - 1 = \frac{2-(2x+3)}{2x+3} = \frac{2-2x-3}{2x+3} = \frac{-2x-1}{2x+3}.$$

Etude du signe de $g'(x)$ sur $]-1,5;+\infty[$:

$x > -1,5$, donc $2x > -3$, donc $2x+3 > 0$, donc $g'(x)$ a m̂ signe que $-2x-1$

Ainsi, $g'(x) \geq 0$ équivaut à $-2x - 1 \geq 0$

$$-2x \geq 1$$
$$x \leq \frac{1}{-2}$$
$$x \leq -0,5$$

D'où :

x	$-1,5$		$-0,5$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)-0,5$	$\searrow$	$-\infty$

$g(-0,5) = \ln(2\times(-0,5)+3) - 1 + 0,5$

$g(-0,5) = \ln(2) - 0,5.$

3a) • g est continue car dérivable sur $]-0,5;+\infty[$.

• g est strict. $\searrow$ sur $]-0,5;+\infty[$.

• $\ln(2) - 0,5 \approx 0,19$ donc $0 \in]-\infty; \ln(2)-0,5[$.

Donc d'après le C.T.V.I., l'équa° $g(x) = 0$ a une unique sol° α avec $\alpha \in]-0,5;+\infty[$.

3b) Avec la calculatrice (balayage) :

x	$g(x)$
0,25	0,003
0,26	-0,002

$0,25 < \alpha < 0,26$: encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie B

1) $x \in [-1;\alpha]$ donc $-1 \leq x \leq \alpha$

Or $f \nearrow$ sur $]-1,5;+\infty[$, donc $f(-1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$

avec $f(x) = \ln(2x+3) - 1$ et $g(x) = f(x) - x$ donc $f(x) = g(x) + x$

Donc $f(-1) = \ln(2x+3) - 1 = \ln(1) - 1 = -1$ et $f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$ car $g(\alpha) = 0$

2a) $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

→ Initialisa° : Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(3) - 1$.

$u_1 \simeq 0{,}099$

Ainsi, on a bien : $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ car $0{,}25 < \alpha < 0{,}26$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

→ Hérédité : soit n un entier fixé pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie, càd on suppose que : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

Mq $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd prouvons que : $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

Par h de réc. : $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

Donc : $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ car $f \nearrow$ sur $]-1{,}5 ; +\infty[$.

$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

→ Conclu° : $\mathcal{P}(0)$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

2b) D'après q 2a) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc u_n est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \alpha$, donc (u_n) est majorée par α.

Donc (u_n) converge d'après le th. de convergence des suites monotones.

Rq : $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ $(l \in \mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Par unicité de la limite : $l = f(l) \Leftrightarrow f(l) - l = 0$
$\Leftrightarrow g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l = \alpha$

(u_n) converge vers α.

Exercice IV

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

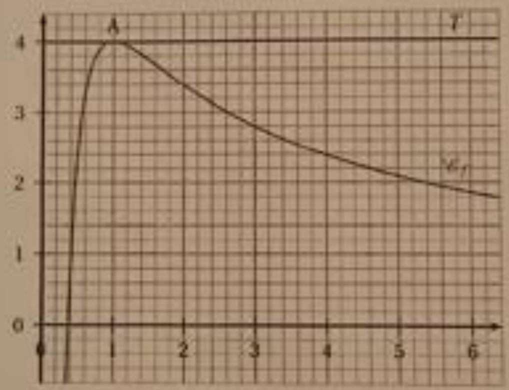
1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice V

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1 ; 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Exercice IV

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + x + \frac{5}{2})$

1) Par limite de réf : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \frac{5}{2}) = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x + \frac{5}{2}) = +\infty$.

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$.

Donc par limite de composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

F.I. de type "$\infty - \infty$" pour $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + \frac{5}{2})$.

Or $x^2 + x + \frac{5}{2} = x(x+1) + \frac{5}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$.

Donc par limite de produit et de somme :

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + x + \frac{5}{2}) = +\infty$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par limite de composée : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2) $f(x) = \ln(x^2 + x + \frac{5}{2}) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$ et $u'(x) = 2x + 1$.

Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

3) Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Comme f est définie sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$.

Donc $f'(x)$ a le même signe que $2x+1$.

Ainsi $f'(x) \geq 0$ équivaut à : $2x + 1 \geq 0$

$x \geq -\frac{1}{2}$.

D'où

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(\frac{9}{4})$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-\frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} + 2\right)$

$f(-\frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$.

4a) • f est continue sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ car dérivable.

• f est strict $\nearrow$ sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

x	$-\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$ $\nearrow$	2 $\nearrow$	$+\infty$

• Or $\ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0{,}8$

Donc : $2 \in \left[\ln\left(\frac{9}{4}\right) ; +\infty\right[$

Donc d'après le C.T.V.I., l'équa° $f(x) = 2$ a une unique sol° $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

4b) Avec la machine :

Cherchons α à 10^{-2} près afin de déduire une valeur approchée à $0{,}1$ près

x	$f(x)$
$1{,}76$	$1{,}99$
α	2
$1{,}77$	$2{,}004$

Ainsi : $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$

Par suite : $\alpha \approx 1{,}8$ à 10^{-1} près

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$

Rappel : Il y a un point d'inflexio° pour f à chaque fois que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Étudions le signe de $f''(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$, donc $f''(x)$ a m̂ signe que $-2x^2 - 2x + 4$.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 36 = 6^2$ donc $\Delta > 0$ donc 2 sol° :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2-6}{-4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{2+6}{-4} = -2 \end{cases}$$

$a < 0$ donc :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc il y a 2 points d'inflex° aux abscisses -2 et 1.

Exercice VI

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	**b.** $\frac{1}{x} - 1$	**c.** $\ln(x) - 2$	**d.** $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3.

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$.

La fonction g est définie sur :

a. $\mathbb{R}$
c. $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$
c. $]-2\,;+\infty[$
d. $]-2\,;1[$

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$k(x) = 3\ln(x) - x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
Une équation de T est :

a. $y = (3 - \mathrm{e})x$
b. $y = \left(\dfrac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x$
c. $y = \left(\dfrac{3}{\mathrm{e}} - 1\right)x + 1$
d. $y = (\mathrm{e} - 1)x + 1$

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à

a. $\dfrac{2}{3}$; **b.** $+\infty$; **c.** $-\infty$; **d.** 0.

Exercice V

1. $f(1)=4$ car $A(1;4) \in C_f$

$f'(1) \Rightarrow$ cd de T à C_f en A

$f'(1) \Rightarrow$ cd de (T)

Or (T) est horizontale donc $f'(1) = 0$.

2. $x>0$, $f(x) = \dfrac{a+b\ln(x)}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où, $\begin{cases} u(x) = a+b\ln(x) \\ u'(x) = b \times \frac{1}{x} = \frac{b}{x} \end{cases}$ et, $\begin{cases} v(x) = x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - (a+b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \dfrac{b-a-b\ln(x)}{x^2}$.

3. $f(1)=4 \Leftrightarrow \dfrac{a+b\ln(1)}{1} = 4 \Leftrightarrow a=4$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{b-4-b\ln(1)}{1^2} = 0 \Leftrightarrow b-4=0 \Leftrightarrow b=4$.

Ainsi, $f(x) = \dfrac{4+4\ln(x)}{x}$ avec $x>0$.

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Donc par produit et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} (4+4\ln(x)) = -\infty$.

Et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$

Donc par limite de quotient : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 4+4\ln(x) = +\infty$: Ici F.I de type : "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$"

Or $f(x) = \dfrac{4+4\ln(x)}{x} = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln(x)}{x}$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, donc par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln(x)}{x}\right) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. $x>0$ et $f(x) = \dfrac{4+4\ln(x)}{x}$

D'après q.2) avec $a=b=4$:

$f'(x) = \dfrac{b-a-b\ln(x)}{x^2} = \dfrac{4-4-4\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-4\ln(x)}{x^2}$

Or $x > 0$, donc $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le m̃ signe que $-4\ln(x)$.

Ainsi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{0}{-4} \Leftrightarrow \ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} \leq e^0$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	4	↘	0

6. $f'(x) = \dfrac{-4\ln(x)}{x^2}$

Or $f''(x) = (f')'(x) = \dfrac{-\frac{4}{x} \times x^2 - (-4\ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-4x + 8\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(-4 + 8\ln(x))}{x^4}$

$f''(x) = \dfrac{-4 + 8\ln(x)}{x^3}$.

7. Etude du signe de $f''(x)$.

$x > 0$, donc $x^3 > 0$, donc $f''(x)$ a m̃ signe que $-4 + 8\ln(x)$.

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4 + 8\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8\ln(x) \geq 4 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{4}{8} \Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{1}{2}$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f'' s'annule et change de signe si $x = \sqrt{e}$.

Donc C_f a un seul point d'inflex° de coordonnées : $B(\sqrt{e} ; f(\sqrt{e}))$

Enfin, $f(\sqrt{e}) = \dfrac{4 + 4\ln(\sqrt{e})}{\sqrt{e}} = \dfrac{4 \times 4 \times 0{,}5}{\sqrt{e}} = \dfrac{6}{\sqrt{e}}$.

$B\left(\sqrt{e} ; \dfrac{6}{\sqrt{e}}\right)$

Exercice VI

1. $f(x) = x\ln(x) - x + 1$

$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

Réponse A

2. $g(x) = x^2(1 - \ln(x))$

$g(x) = x^2 - x^2\ln(x) = x^2 - x \times x\ln(x)$

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

Réponse C

3. $\ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$ existe ssi $\frac{x-1}{2x+4} > 0$.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{2x+4}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

$x - 1 \geq 0$ et $2x + 4 \geq 0$

$x \geq 1$; $2x \geq -4$; $x \geq -2$

$g(x) > 0$ ssi $x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

Réponse C.

4. Ta a pour équation réduite : $y = h'(e)(x - e) + h(e)$

avec $h(e) = 3\ln(e) - e = 3 - e$; $h'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{x} - 1$ donc $h'(e) = \frac{3}{e} - 1$.

Donc $y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)(x - e) + 3 - e$

$y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x - \frac{3}{e}x + e + 3 - e$

$y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x$

$y = \left(\frac{3}{e} - \frac{e}{e}\right)x = \left(\frac{3-e}{e}\right)x$

Réponse b.

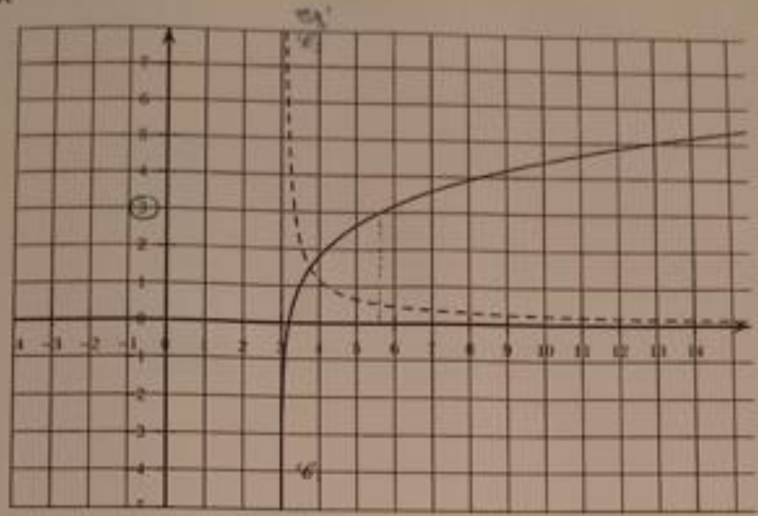
5. $f(x) = \frac{2\ln(x)}{3x^2 + 1} = \frac{2\ln(x)}{x(3x + \frac{1}{x})} = \frac{2\ln(x)}{x} \times \frac{1}{3x + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$

Réponse d

Exercice VII

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\,;\,6[$.
   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. **a.** Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

Partie A

1) Si $\mathscr{C}$ représente $\mathscr{C}_f$ alors f ↘ sur $]3\,;\,+\infty[$ donc $f'(x) < 0$ sur $]3\,;\,+\infty[$.
Ce qui n'est pas le cas de la courbe $\mathscr{C}_1$.

2. $f(x) = 3$ a une unique solu° α avec $\alpha \approx 5,6$

3. f est concave sur $]3\,;+\infty[$ car $f' \searrow$ sur cet intervalle.

Partie B

1. $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie ssi $x^2 - x - 6 > 0$: inéqua° du second degré, qui a pour racines évidentes : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$ et $a = 1$ donc $a > 0$, donc

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 - x - 6 > 0$ ssi $x < -2$ ou $x > 3$.

En particulier, si $x \in]3\,;+\infty[$ on a bien : $x^2 - x - 6 > 0$

donc $\ln(x^2 - x - 6)$ existe.

2. $x > 3$ et $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x^2 - x - 6) = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$.

Donc par composée de limites :

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équa° $x = 3$ est A.S.V à $\mathcal{C}_f$.

- $x^2 - x - 6 = x(x-1) - 6$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$

donc par produit et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-1) - 6 = +\infty$.

Bref : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x - 6) = +\infty$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par limite de composée :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 - x - 6$.

f est dérivable sur $I =]3\,;+\infty[$ car $x^2 - x - 6 > 0$ sur I et par composée de f° dérivables :

Donc $\forall x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x-1}{x^2 - x - 6}$

2. $f(x) = 3$ a une unique solu° α avec $\alpha \simeq 5,6$

3. f est concave sur $]3 ; +\infty[$ car $f' \searrow$ sur cet intervalle.

Partie B

1. $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie ssi $x^2 - x - 6 > 0$: inéqua° du second degré, qui a pour racines évidentes : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$ et $a = 1$ donc $a > 0$, donc

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x^2 - x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 - x - 6 > 0$ ssi $x < -2$ ou $x > 3$.

En particulier, si $x \in]3 ; +\infty[$ on a bien : $x^2 - x - 6 > 0$

donc $\ln(x^2 - x - 6)$ existe.

2. $x > 3$ et $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} (x^2 - x - 6) = 0^+$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$.

Donc par composée de limites :

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$. Donc la droite d'équa° $x = 3$ est A.S.V à $\mathcal{C}_f$.

• $x^2 - x - 6 = x(x-1) - 6$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$

donc par produit et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-1) - 6 = +\infty$.

Bref : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x - 6) = +\infty$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par limite de composée :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 - x - 6$.

f est dérivable sur $I =]3 ; +\infty[$ car $x^2 - x - 6 > 0$ sur I et par composée de f° dérivables :

Donc $\forall x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

3b) Étude du signe de $f'(x)$ sur $I =]3; +\infty[$.

D'après q.1, si $x > 3$, alors $x^2 - x - 6 > 0$.

Donc $f'(x)$ a le m̃ signe que $2x-1$.

Ainsi $f'(x) \geqslant 0 \iff 2x-1 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$.

Ici $x > 3$:

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4a) • f est continue sur I car dérivable sur I.

• f est strict. $\nearrow$ sur $I \subset]3; +\infty[$

• $3 \in]-\infty; +\infty[$, donc 3 est une valeur intermédiaire pour f.

Donc d'après le CTVI, $f(x) = 3$ a une unique sol° notée α sur I.

Grâce à la machine :

x	$f(x)$
5	2,6
α	3
6	3,4

Donc : $5 < \alpha < 6$.

b) Avec la TI :

x	$f(x)$
5,63	2,99..
5,64	3,004..

Donc $5{,}63 < \alpha < 5{,}64$

5a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$ q.3a.

$f''(x) = \frac{2(x^2-x-6) - (2x-1)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 - 4x + 1)}{(x^2-x-6)^2}$

$f''(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2-x-6)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2-x-6)^2}$.

5b) Etude du signe de $f''(x)$.

$(x^2-x-6)^3 > 0$ sur I, donc $f''(x)$ a le $\hat{m}$ signe que $-2x^2+2x-13$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-2)\times(-13) = 4 - 104 = -100$

$\Delta < 0$ donc $\forall x \in]3;+\infty[$, $-2x^2+2x-13$ a le $\hat{m}$ signe que $a=-2$, donc

$-2x^2+2x-13 < 0$ sur I donc $f''(x) < 0$ sur I.

Donc f est concave sur I.

Exercice VIII

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

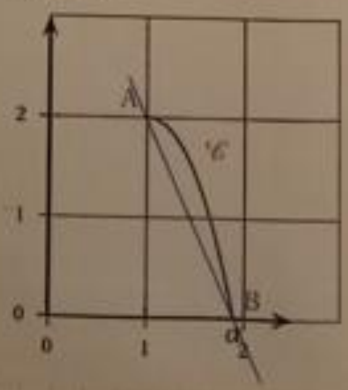
La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x)+1]$.
   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.
   a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha-1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.



Partie A

1) Calculons $g(e)$:

$g(e) = 1 + e^2(1-2\ln(e)) = 1 + e^2(1-2) = 1 - e^2 = (1+e)(1-e)$

Or $e > 0$ ($e \approx 2{,}718$) et $e > 1$ donc $1-e < 0$.

Donc $1+e > 0$ et $1-e < 0$ donc $g(e) < 0$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2\ln(x)) = -\infty$.

Donc par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(1-2\ln(x)) = -\infty$.

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$, donc par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

3a) $g(x) = 1 + x^2(1-2\ln(x)) = 1 + u(x) \times v(x)$ car $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 1 - 2\ln(x) \\ v'(x) = 0 - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{-2}{x} \end{cases}$

Donc $g'(x) = u'v + uv' = 2x(1-2\ln(x)) + x^2 \times \left(\frac{-2}{x}\right)$

$g'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x$

$g'(x) = -4x\ln(x)$

3b) $g'(x) = -4x\ln(x)$ avec $x > 0$.

Etude signe $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$:

$x > 0$ donc $-4x < 0$ et $\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	$+$		$-$	
$g(x)$	$\|\|$ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 + 1^2(1 - 2\ln(1)) = 1 + 1 = 2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$: $1 + x^2(1-2\ln(x)) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$
$= 1 + x^2 - 2x \times x\ln(x)$

Or par c.c. : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0$ par produit et

somme : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$.

3c) On se place ici sur $[1 ; +\infty[$:

x	1		$+\infty$
$g(x)$	2	$\searrow 0 \searrow$	$-\infty$

- g est continue sur $[1 ; +\infty[$ car dérivable.
- g est strict $\searrow$ sur $[1 ; +\infty[$.
- $0 \in]-\infty ; 2]$.

Donc d'après le CTVI, l'équa° $g(x) = 0$ a une unique sol° sur $[1 ; +\infty[$

On la note α.

3d)

x	$g(x)$
$1,89$	$0,024$
α	0
$1,90$	$-0,024$

$1,89 < \alpha < 1,90$

4.

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. Rappel : g est concave sur $[1 ; \alpha]$ dès lors que :

$\forall x \in [1 ; \alpha]$, $g''(x) \geqslant 0$.

Or $g''(x) = -4(\ln(x) + 1)$ et $\forall x \in [1 ; \alpha]$, $\ln(x) \geqslant \ln(1)$ car $\ln \nearrow$ sur $[1 ; +\infty[$

Donc $\ln(x) + 1 \geqslant 1$

Donc $-4(\ln(x) + 1) \leqslant -4 < 0$ car $-4 < 0$

Donc $g''(x) \leqslant 0$ donc g est concave sur $[1 ; \alpha]$

2.a) (AB) a pour équa° réduite :

$y = mx + p$, où $m =$ c.d.

$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$A(1 ; g(1))$ avec $g(1) = 1 + 1^2(1 - 2\ln(1)) = 1 + 1 = 2$. Donc $A(1 ; 2)$

$B(\alpha ; g(\alpha))$

$B \in \mathcal{C}$! Or $g(\alpha) = 0$ donc $B(\alpha ; 0)$

Donc $m = \frac{0-2}{\alpha - 1}$

$m = \frac{-2}{\alpha - 1}$

Donc (AB) a pour équa°: $y = \frac{-2}{\alpha - 1} x + p$.

Enfin $A(1; 2) \in (AB)$, donc : $2 = \frac{-2}{\alpha - 1} + p$

Donc $p = 2 - \frac{-2}{\alpha - 1} = 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$

$p = \frac{2(\alpha - 1) + 2}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha - 2 + 2}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.

Bref (AB) a pour équa°: $y = \frac{-2}{\alpha - 1} x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.

b) D'après q.1) g est concave sur $[1; \alpha]$.

Donc $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de chacunes de ses cordes (= sécantes) sur $[1; \alpha]$.

Or $x_A = 1$; $x_B = \alpha$, donc A et B ont leurs abscisses de $[1; \alpha]$.

Par suite, $\mathcal{C}$ est au-dessus de (AB) donc :

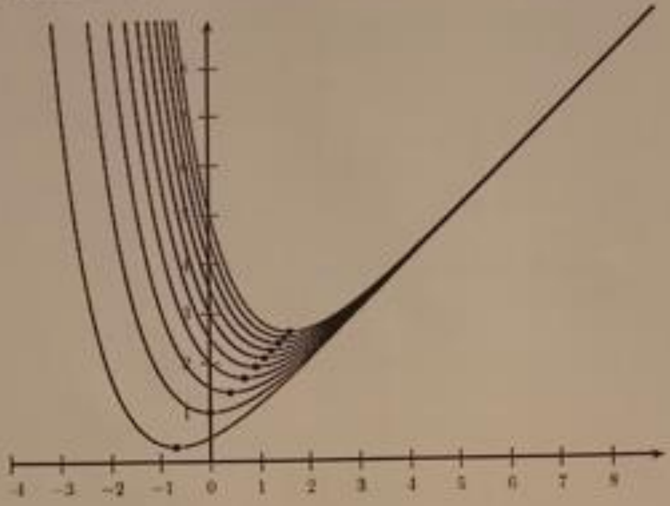
$\forall x \in [1; \alpha]$, $g(x) \geqslant \frac{-2}{\alpha - 1} x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$.

Exercice supplémentaire au chapitre

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

$f'_k(x) = 1 + k.(-e^{-x}) = 1 - ke^{-x}$

Signe de $f'_k(x)$:

$f'_k(x) \geq 0 \iff 1 - ke^{-x} \geq 0 \iff 1 \geq ke^{-x} \iff \frac{1}{k} \geq e^{-x} \iff \ln\left(\frac{1}{k}\right) \geq \ln(e^{-x})$

$f'_k(x) \geq 0 \iff -\ln(k) \geq -x.$

$f'_k(x) \geq 0 \iff x \geq \ln(k)$

D'où :

x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

f_k a un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x = \ln(k)$.

Ce minimum est égal à : $f_k(\ln(k))$.

Or, $f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)}$

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + k \times \frac{1}{e^{\ln(k)}}$$

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + k \times \frac{1}{k} = \ln(k) + 1.$$

Ainsi $A_k(\ln(k); \ln(k)+1)$.

$y_{A_k} = x_{A_k} + 1$, donc $A_k \in \Delta$ où Δ est la droite d'équa° $y = x + 1$.

Conclusion : $\forall k > 0$, $A_k \in \Delta$.