

Chapitre II

Fonctions trigonométriques

I - Cercle trigonométrique et radian

A - Cercle trigonométrique

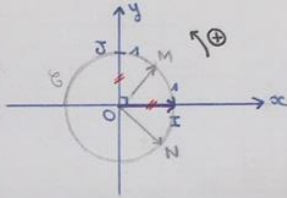
Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan.

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle \mathcal{C} de centre O , de rayon 1, orienté avec la convention suivante :

Pour tout point M appartenant à \mathcal{C} , si *pour aller du point I au point M, par le plus court chemin, en se déplaçant sur le cercle, on tourne dans le sens trigonométrique (ou encore sens direct) c'est-à-dire dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, on comptera positivement la mesure de l'angle* formée par les vecteurs \vec{OI} et \vec{OM} , que l'on note $(\vec{OI}; \vec{OM})$, sinon, on comptera négativement cette mesure.

L'angle formé par les vecteurs \vec{OI} et \vec{OM} est appelé un **angle orienté**, le terme orienté signifiant qu'on tient compte du sens dans lequel on tourne pour rabattre \vec{OI} sur \vec{OM} par le plus court chemin !

Illustrations :



$$\text{Ici : } (\vec{OI}; \vec{OM}) > 0$$

$$\text{et } (\vec{OI}; \vec{ON}) < 0.$$

mesure de l'angle formé par les vecteurs \vec{OI} et \vec{ON}

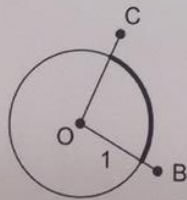
Enfin la notation $(\vec{OI}; \vec{OM})$ sera à présent souvent utilisée pour désigner la mesure de l'angle \widehat{IOM} , en tenant compte de l'orientation. Il est donc plus précis de parler de mesure d'angle orienté que de mesure d'angle géométrique.

B - Mesure d'angle exprimée en radian

Définition

Le **radian** est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est la **longueur de l'arc de cercle** que cet angle intercepte sur le cercle de rayon 1 centré en le sommet de cet angle.

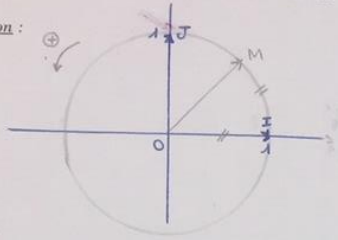
Illustration :



Ici, la mesure en radian de l'angle \widehat{BOC} n'est autre que la longueur de l'arc de cercle gras du cercle de centre O et de rayon 1.

1 radian est donc la mesure d'un angle interceptant, sur un cercle trigonométrique, un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon de ce cercle.

Illustration :



Si $\widehat{IM} = 1$ on dit que la mesure de l'angle \widehat{IOM} est égale à 1 radian.

Exemples

Rappel : le périmètre d'un cercle de rayon R est égal à $2\pi R$ et le cercle trigo. a pour rayon $R = 1$.
Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π .
Puisque la longueur d'un demi-cercle trigonométrique est égale à π , on peut donc dire que :

- Si $\widehat{IOM} = 180^\circ$, alors $\widehat{IOM} = \pi$ radians.
- Si $\widehat{IOM} = 90^\circ$, alors $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{2}$ radians.

Propriété

La mesure en degré et la mesure en radian d'un angle sont **proportionnelles**.

En particulier, **$180^\circ = \pi$ rad.**

En utilisant la proportionnalité de la mesure en degré d'un angle et de celle en radian de cet angle on a le tableau suivant :

On retiendra :

Mesure en degré	0	30	45	60	90	180
Mesure en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Exemples

- a) Convertir en radians : 1) 120° ; 2) 18° ; 3) 51° ; 4) 1°
- b) Convertir en degré : $\frac{2\pi}{15}$ rad ; $\frac{\pi}{9}$ rad.

a) 1) $120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$

2) $18^\circ = \frac{\pi}{10} \text{ rad.}$

3)

°	180	51
Rad	π	x

$$x = \frac{51\pi}{180} = \frac{17\pi}{60} \text{ donc } 51^\circ = \frac{17\pi}{60} \text{ rad.}$$

4) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$

b) $\frac{2\pi}{15} \text{ rad} = 24^\circ$ car :

°	180	x
Rad	π	$\frac{2\pi}{15}$

$$x = \frac{180 \times \frac{2\pi}{15}}{\pi} = 180 \times \frac{2}{15} = 24.$$

$$\frac{\pi}{9} \text{ rad} = \frac{180}{9} = 20^\circ$$

Exercice 1

Déterminer une relation donnant la longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre α radians.

✓



La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre.

Mesure de l'angle en rad	2π	α
longueur de l'arc de cercle	$2\pi R$	l

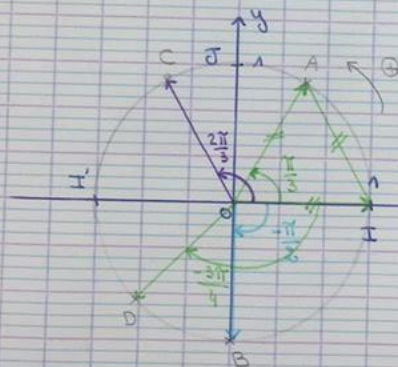
$2\pi = 1$ tour entier = périmètre du cercle

$$\text{Donc } l = \frac{2\pi R \times \alpha}{2\pi} = R \times \alpha$$

Exercice 2

Construire un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, puis construire rigoureusement les points A, B, C et D du cercle trigonométrique définis par :

$$(\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{3} \text{ rad} ; (\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{-\pi}{2} \text{ rad} ; (\vec{OI}; \vec{OC}) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} ; (\vec{OI}; \vec{OD}) = \frac{-3\pi}{4} \text{ rad}.$$



$$(\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{3} \text{ (rad)}.$$

$$(\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{-\pi}{2} \text{ (rad)}.$$

$$(\vec{OI}; \vec{OC}) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}.$$

$$(\vec{OI}; \vec{OD}) = \frac{-3\pi}{4} \text{ rad}.$$

On construit la bissectrice de $\widehat{BOI'}$ où I' est diamétralement opposé à I .

C-Enroulement d'une droite autour d'un cercle trigonométrique et conséquences

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique \mathcal{C} .
Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et d la droite orientée, perpendiculaire à l'axe des abscisses, qui passe par A, munie du repère $(A; \vec{j})$.

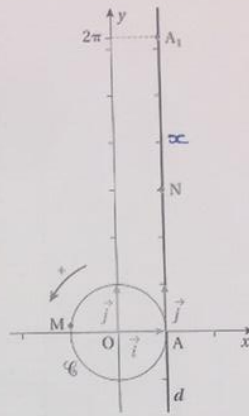
En « enroulant » cette droite d autour du cercle \mathcal{C} , on obtient une correspondance entre un point N de la droite d et un unique point M du cercle \mathcal{C} .

REMARQUE

Le point A_1 de d d'abscisse 2π dans le repère $(A; \vec{j})$ se retrouve ainsi en A. Cela correspond à un tour complet.

EXEMPLE

Sur le schéma ci-contre, le point N d'abscisse 3 sur la droite orientée d , se retrouve, après « enroulement » de d sur \mathcal{C} , en M tel que la longueur de l'arc AM est égale à la longueur AN.



Remarque : si un point d'abscisse x de la droite d se retrouve en M après enroulement sur le cercle trigonométrique, alors, il en est de même pour les points de d d'abscisses respectives $x + k \times 2\pi$ si k est un nb. relatif, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Un angle orienté a une infinité de mesures.

Si x désigne l'une d'entre elles, les autres sont de la forme : $x + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

En d'autres termes, deux mesures d'un même angle orienté diffèrent d'un multiple de 2π radians.

k représente le nombre de tours faits pour passer de x à $x + k \times 2\pi$, en tenant compte du sens dans lequel on tourne : (le signe de k l'indique).

Définition

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté donné, celle comprise entre $-\pi$ radian exclu et π radian inclus est appelée la **mesure principale** de l'angle. notée α avec : $-\pi < \alpha \leq \pi$

On donnera systématiquement cette dernière dans les exercices.

Exercice 3

Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

$$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = \frac{4\pi}{3} \quad ; \quad (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) = \frac{-7\pi}{6} \quad ; \quad (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC}) = \frac{-3\pi}{2}$$

a) $(\vec{OI}; \vec{OA}) = \frac{4\pi}{3} \rightarrow$ ce n'est pas la mesure principale de cet angle car $\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi; \pi]$.

Or $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$.

Donc la mesure principale de $(\vec{OI}; \vec{OA})$ est égale à $-\frac{2\pi}{3}$.

b) $(\vec{OI}; \vec{OB}) = \frac{-7\pi}{6}$.

Or $\frac{-7\pi}{6} + 2\pi = \frac{-7\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, et $\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$.

Donc la mesure principale de $(\vec{OI}; \vec{OB})$ est égale à $\frac{5\pi}{6}$.

c) $(\vec{OI}; \vec{OC}) = \frac{-3\pi}{2}$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{2}$ car $\frac{-3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

II - Trigonométrie

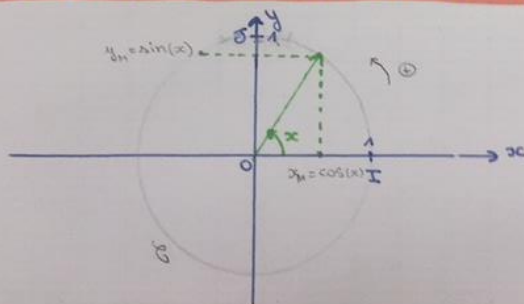
A - Définition du cosinus et du sinus

Soit \mathcal{C} un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Soit M un point appartenant à \mathcal{C} et x une mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OM})$: $(\vec{OI}; \vec{OM}) = x \text{ rad}$.

- **L'abscisse du point M** dans le repère $(O; I; J)$ est appelée **le cosinus du réel x** , on notera $\cos(x)$.
- **L'ordonnée du point M** dans le repère $(O; I; J)$ est appelée **le sinus du réel x** , on notera $\sin(x)$.

Illustration :



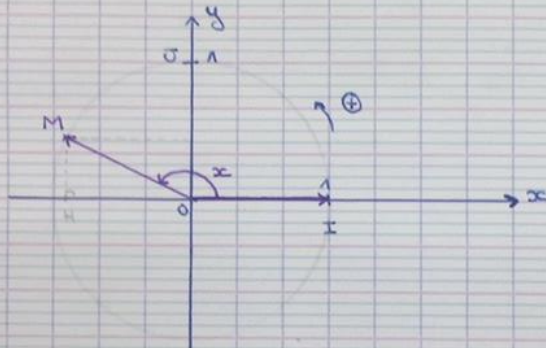
Ainsi, dans le repère $(O; I; J)$, $M(\cos(x); \sin(x))$.

Lorsque cela ne prête pas à confusion, on notera $\cos x$ aussi au lieu de $\cos(x)$, et $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$.

Propriété (conséquences de la définition)

- 1) Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- 2) Pour tout réel x , $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$. (Relation de Pythagore trigonométrique).
- 3) Pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Preuve :



1) est évident car lorsque M parcourt le cercle trigo. son abscisse et son ordonnée restent comprises entre -1 et 1.

2) On conduit le point H qui est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

$$O(0; 0)$$

$$M(\cos(x); \sin(x))$$

$$H(\cos(x); 0)$$

Par applicaⁿ du T. de pythagore au triangle OHM rectangle en H :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

Or $OM = 1$ car cercle trigo.

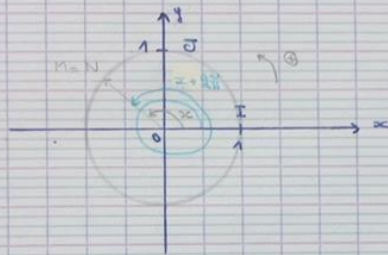
Donc: $OH^2 + HM^2 = 1^2 = 1$

$OH = \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2}$, donc $OH^2 = (x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2$
 $OH^2 = (\cos(x) - 0)^2 + (0 - 0)^2$
 $OH^2 = (\cos(x))^2$

De même: $HM^2 = (\sin(x))^2$

De sorte que: $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

3)



$M(\cos(x); \sin(x))$

Soit N le point du cercle trigonométrique tel que:

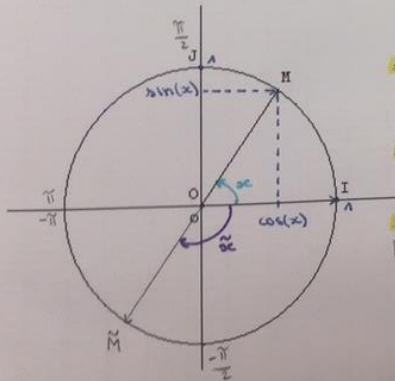
$(\vec{ON}; \vec{ON}) = x + 2\pi$; $N(\cos(x + 2\pi); \sin(x + 2\pi))$.

M et N sont confondus et ont donc les mêmes coordonnées.

Donc $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.

B- Signe du cosinus et du sinus

Signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:



$\rightarrow 12^h - 12^h 15$

1° quadrant: Si $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, alors $\begin{cases} \cos(x) \geq 0 \\ \sin(x) \geq 0 \end{cases}$

$\rightarrow 12^h 15 - 12^h 30$

2° quadrant: Si $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, alors $\begin{cases} \cos(x) \leq 0 \\ \sin(x) \geq 0 \end{cases}$

$\rightarrow 12^h 30 - 12^h 45$

3° quadrant: Si $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$, alors $\begin{cases} \cos(x) \leq 0 \\ \sin(x) \leq 0 \end{cases}$

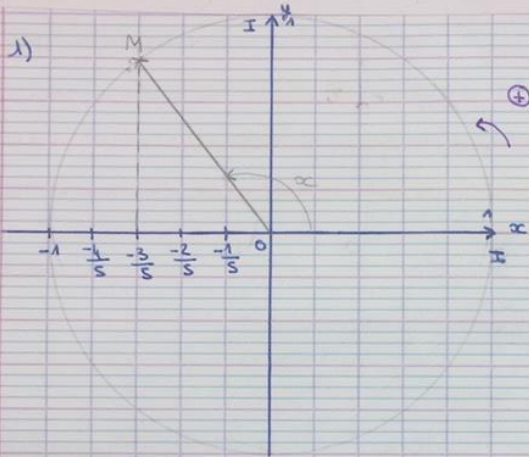
$\rightarrow 12^h 45 - 13^h 00$

4° quadrant: Si $x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$, alors $\begin{cases} \cos(x) \geq 0 \\ \sin(x) \leq 0 \end{cases}$

Exercice 4

1) Placer le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overline{OI}; \overline{OM}) = x$, sachant que x appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ et que $\cos(x) = \frac{-3}{5}$.

2) Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$.



2) On sait que pour tout réel x :

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + (\sin(x))^2 = 1$$

$$\frac{9}{25} + (\sin(x))^2 = 1$$

$$(\sin(x))^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

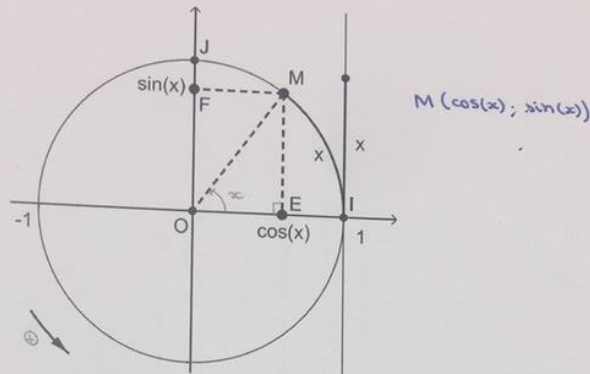
$$\text{Donc : } \sin(x) = -\sqrt{\frac{16}{25}} \text{ ou } \sin(x) = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\sin(x) = \frac{-\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{-4}{5} \text{ ou } \sin(x) = \frac{4}{5}$$

Enfin $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, donc $\sin(x) \geq 0$

$$\text{Par suite } \sin(x) = \frac{4}{5}$$

Remarque importante :



Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$, donc $OE = \cos x$ et $OF = \sin x$ (avec les notations de la figure précédente).

Or dans le triangle rectangle OEM , on a

$$\cos \widehat{EOM} = \frac{OE}{OM} = \frac{OE}{1} = OE = \cos x$$

et

$$\sin \widehat{EOM} = \frac{EM}{OM} = \frac{OF}{OM} = \frac{OF}{1} = OF = \sin x.$$

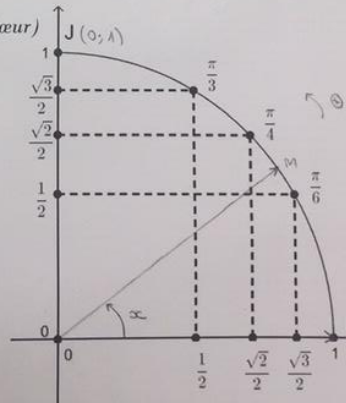
Donc $\cos \widehat{IOM} = \cos x$ et $\sin \widehat{IOM} = \sin x$.

Les définitions du cosinus et du sinus d'un réel quelconque données dans ce chapitre sont cohérentes avec les définitions vues au collège du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

C. Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

Propriété : Tableau des valeurs remarquables (à connaître par cœur)

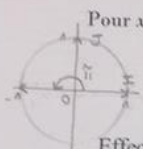
x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Preuve :

Pour $x = 0$: $(\vec{OI}, \vec{OM}) = 0$, donc M et I sont confondus. Or $M(\cos(x); \sin(x))$ et $I(1; 0)$
 Donc : $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{2}$, donc M et J sont confondus. Or $M(\cos(\frac{\pi}{2}); \sin(\frac{\pi}{2}))$ et $J(0; 1)$
 Donc $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.



Pour $x = \pi$: $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \pi$ donc M est diamétralement opposé à I,
 donc $M(-1; 0)$ et $M(\cos(\pi); \sin(\pi))$.
 Donc $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.

Effectuons la démonstration pour $\frac{\pi}{4}$. Dans le triangle rectangle OEM,
 on a $\widehat{EOM} = 45^\circ$, donc, en se rappelant que la somme des angles d'un
 triangle fait 180° , on en déduit

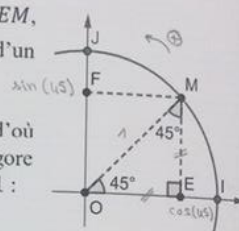
$$\widehat{EMO} = 180^\circ - \widehat{MEO} - \widehat{EOM} = 45^\circ$$

ce qui démontre que le triangle EOM est un triangle isocèle en E, d'où
 $OE = EM$. En appelant x cette longueur, le théorème de Pythagore
 donne $OE^2 + EM^2 = OM^2$, d'où l'équation sur x , puisque $OM = 1$:

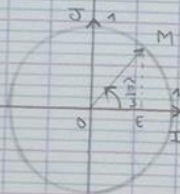
$$x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

Vu que $x > 0$, il vient $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi $\cos \frac{\pi}{4} = OE = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{4} = EM = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Pour $x = \frac{\pi}{3}$:



OIM est équilatéral car : $OI = OM = 1$ et $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{3}$.

On a : $(ME) \perp (OI)$ et M équidistant de O et I :

Donc (ME) est la médiatrice de $[OI]$.

Donc E = milieu de $[OI]$.

Par suite, ds le triangle OEM rectangle en E, le th. de Pythagore dit
 que : $OE^2 + EM^2 = OM^2$ avec $OM = 1$

$$OE = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } EM = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Or E milieu de $[OI]$, donc $OE = \frac{1}{2}$ car $OI = 1$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Enfin : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1$

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Or $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$ (1^{er} quadrant), donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Idem ds le triangle OEM avec $\widehat{EMO} = \frac{\pi}{6}$ rad.

1) - Cosinus et sinus d'angles associés

Expliquons d'abord que dans un repère orthonormé (O ; I ; J) :

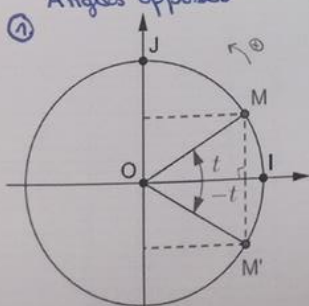
Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors ils ont...
la m. abscisse et des ordonnées opposées : Si $M(x; y)$, alors $M'(x; -y)$

Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors ils ont...
des abscisses opposées et des ordonnées égales : Si $M(x; y)$, alors $M'(-x; y)$

Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O, alors ils ont des abscisses
opposées et des ordonnées opposées : Si $M(x; y)$, alors $M'(-x; -y)$

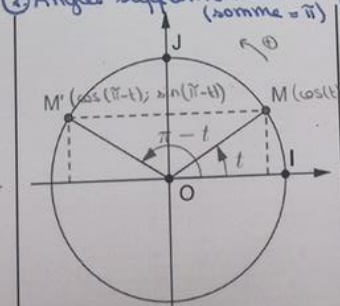
Pour tout réel t, on a les égalités suivantes.

① Angles opposés



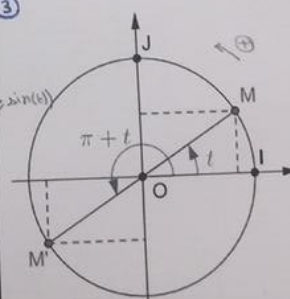
$$\begin{cases} \cos(-t) = \cos(t) \\ \sin(-t) = -\sin(t) \end{cases}$$

② Angles supplémentaires (somme = π)



$$\begin{cases} \cos(\pi - t) = -\cos(t) \\ \sin(\pi - t) = \sin(t) \end{cases}$$

③



$$\begin{cases} \cos(\pi + t) = -\cos(t) \\ \sin(\pi + t) = -\sin(t) \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} M(\cos(t); \sin(t)) \\ M'(\cos(-t); \sin(-t)) \end{cases}$$

Or M et M' sont sym. p.ln à l'axe des abscisses, donc :

$$\begin{cases} \cos(-t) = \cos(t) & (\text{m abscisse}) \\ \sin(-t) = -\sin(t) & (\text{ordonnées opposées}) \end{cases}$$

\textcircled{3} Ajouter π rad. à un angle revient ici à symétriser p.ln au point O .

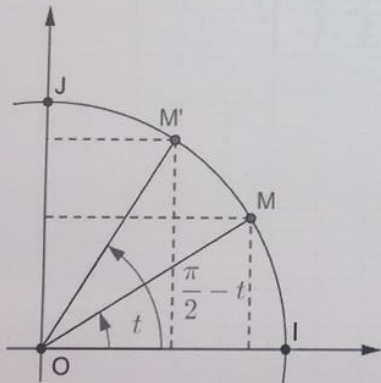
$$M(\cos(t); \sin(t))$$

$$M'(\cos(\pi+t); \sin(\pi+t))$$

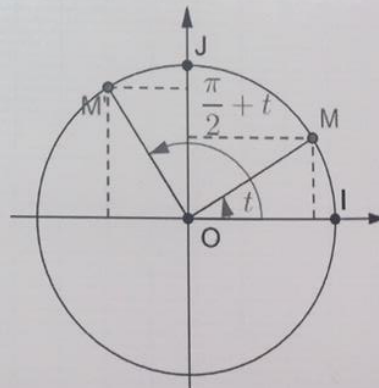
et M et M' st symétriques p.ln à O .

$$\text{Donc : } \begin{cases} \cos(\pi+t) = -\cos(t) \\ \sin(\pi+t) = -\sin(t) \end{cases}$$

4. Angles complémentaires (somme = $\frac{\pi}{2}$)



$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} + t) = -\sin(t) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + t) = \cos(t) \end{cases}$$



- 1) Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- 2) Pour tout réel x , et tout entier relatif k , $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$
- 3) Pour tout réel x , $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- 4) Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- 5) Pour tout réel x , $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- 6) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
 $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

Exercice 5

Déterminer, en détaillant le raisonnement, les valeurs exactes des nombres suivants :

a) $\cos(\frac{-\pi}{3})$; b) $\sin(\frac{-\pi}{4})$; c) $\cos(\frac{5\pi}{4})$; d) $\sin(\frac{-5\pi}{6})$.

Remarque : Déterminer $\sin(\frac{2\pi}{3})$. Est-il vrai que pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin(x)$? \Rightarrow FAUX !

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) & \stackrel{\text{F.1 avec } x = \frac{\pi}{3}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{b) } \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) & \stackrel{\text{F.1}}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{c) } \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) & \quad \frac{5\pi}{4} > \pi, \text{ donc } \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{Donc } \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) & \stackrel{\text{F.3}}{=} \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{d) } \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) & \stackrel{\text{F.1}}{=} -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Rq: $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \pi$, donc $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

Donc $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \stackrel{F.4}{=} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

FAUX! : contre-exemple : $x = \frac{\pi}{3}$: $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Donc $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \neq 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ car $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \sqrt{3}$.

Exercice 6

1) Exprimer, en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$, chacune des expressions suivantes :

$A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x)$; $B = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi)$; $C = \cos^2(x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

2) Simplifier, en détaillant les étapes, la somme $S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

3a) Déterminer, en justifiant, la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

3b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier n , la valeur de $\cos(n\pi)$.

1) $A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x)$

$A = \cos(x) + (-\sin(x)) + (-\cos(x)) + \sin(x)$

$A = \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \sin(x)$

$A = 0$

$B = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi)$

$B = \sin(2 \times 2\pi + \pi + x) + \cos(x - 2\pi - \pi)$

$B = \sin(\pi + x) + \cos(x - \pi)$

$B = -\sin(x) + \cos(\pi - x) \leftarrow \text{car } \cos(-a) = \cos(a)$

$$B = -\sin(x) - \cos(\pi)$$

$$C = \cos^2(x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos^2(x) = (\cos(x))^2$$

$$C = \cos^2(x) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2$$

$$C = \cos^2(x) + (\sin(x))^2 = 1$$

$$2) S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$S = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$S = 0$$

$$3a) \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3b) m est un entier relatif
 $\cos(m\pi) = ?$

$$m = 0: \cos(0\pi) = \cos(0) = 1$$

$$m = 1: \cos(1\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$m = 2: \cos(2\pi) = \cos(2\pi + 0) = \cos(0) = 1$$

$$m = 3: \cos(3\pi) = \cos(2\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$m = 4: \cos(4\pi) = \cos(2 \times 2\pi + 0) = \cos(0) = 1$$

Conjecture: Si m est pair, alors $\cos(m\pi) = 1$.

Si m est impair, alors $\cos(m\pi) = -1$.

Si n est pair: $m = 2k$ avec k entier

$$\text{Donc } \cos(m\pi) = \cos(2k\pi) = \cos(2k\pi + 0) = \cos(0) = 1$$

Si m est impair : $m = 2k + 1$ avec k entier.

$$\text{Donc } \cos(m\pi) = \cos((2k+1)\pi) = \cos(2k\pi + \pi) = -1$$

Concaténation : Pour tout entier relatif m , $\cos(m\pi) = (-1)^m$.

Exercice 7

Soit x un réel tel que $\sin x = 0,6$ avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Calculer $\cos x$, $\sin(-x)$, $\cos(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$$\sin(x) = 0,6 \text{ et } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a } (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1.$$

$$(\cos(x))^2 + 0,6^2 = 1.$$

$$(\cos(x))^2 = 1 - 0,6^2 = 1 - 0,36 = 0,64.$$

$$\text{Donc } \cos(x) = -\sqrt{0,64} = -0,8 \text{ ou } \cos(x) = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

$$\text{Or : } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \cos(x) > 0$$

$$\text{Par suite : } \cos(x) = 0,8$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) = -0,6$$

$$\cos(-x) = \cos(x) = 0,8$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) = -0,8$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) = 0,6$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = 0,6$$

Exercice 8

Donner une expression simplifiée des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi - x) ;$$
$$g(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi - x)$$

$$f(x) = \cos(2 \times 2\pi + \pi + x) + \sin(2 \times 2\pi + \pi - x) - \cos(2 \times 3\pi + \pi - x)$$

$$f(x) = \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x) - \cos(\pi - x)$$

$$f(x) = -\cos(x) + \sin(x) - (-\cos(x))$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = \sin(x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$g(x) = \sin(x) + \cos(x) + (-\sin(x)) + \sin\left(x + \pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g(x) = \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + \pi\right)$$

$$g(x) = \cos(x) + \cos(x + \pi)$$

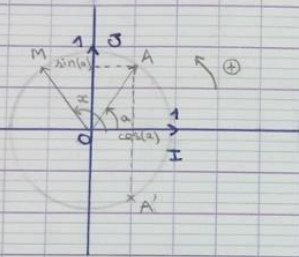
$$g(x) = \cos(x) - \cos(x) = 0$$

E- Equations trigonométriques

Propriété : Soit a un réel donné.

- 1) L'équation $\cos(x) = \cos(a)$, où x est l'inconnue, équivaut à : $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) L'équation $\sin(x) = \sin(a)$, où x est l'inconnue, équivaut à : $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve :



- 1) M et A ont \hat{m} abscisse (cos) si ils se confondent ($x = a + 2k\pi$) ou sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ($x = -a + 2k\pi$).

Rq: Ces équations admettent une infinité de solutions.

- 2) M et A ont \hat{m} ordonnée (sin) si ils se confondent ($x = a + 2k\pi$) ou sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ($x = \pi - a + 2k\pi$).

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans $]-\pi; \pi]$, les équations suivantes :

a) $\cos(x) = 0,5$

b) $\sin(x) = -1$

c) $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin(2022x) = 2022$

e) $2(\cos(x))^2 - 3\cos(x) + 1 = 0$

f) $\cos(2x) = \sin(3x)$.

a) $\cos(x) = 0,5 \quad 0,5 = \cos(\frac{\pi}{3})$

$$\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

solutions réelles

Ensuite: $S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right\}$

$\downarrow k=0$ $\downarrow k=0$ de π
 de π

intervalle des mesures principales

b) $\sin(x) = -1$

$$-1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$	avec $k \in \mathbb{Z}$
ou	
$x = \pi - \left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2k\pi$	

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - 2\pi = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{-\pi}{2} \right\}$$

$$d) \sin(2022x) = 2022$$

$\mathcal{S} = \emptyset$ car $\forall u \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(u) \leq 1$.
 et $2022 \notin [-1, 1]$!!!
quelque soit

$$c) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Donc } \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$2x = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right) = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ \text{ou} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{12} + 2k\pi \right) = \frac{\pi}{24} + k\pi$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{5\pi}{24} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{24} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Recherche des solutions appartenant à $]-\pi; \pi]$:

$$\mathcal{S}_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{5\pi}{24}; \frac{-13\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{-23\pi}{24} \right\}$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 $k=0$ $k=-1$ $k=0$ $k=-1$

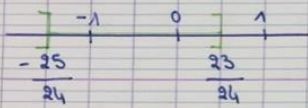
$$-\pi < \frac{\pi}{24} + k\pi \leq \pi \quad \text{avec } k \text{ entier relatif}$$

$$-\pi - \frac{\pi}{24} < k\pi \leq \pi - \frac{\pi}{24}$$

$$\frac{-25\pi}{24} < k\pi \leq \frac{23\pi}{24}$$

$$\frac{-25\pi}{24} < k \leq \frac{23\pi}{24}$$

$$\frac{-25}{24} < k \leq \frac{23}{24} \quad \text{et } k \in \mathbb{Z} \text{ donc:}$$



Donc : $k = -1$ ou $k = 0$.

e) $2(\cos(x))^2 - 3\cos(x) + 1 = 0$

Posons $Y = \cos(x)$:

Cette équation s'écrit alors :

$2Y^2 - 3Y + 1 = 0$: équation du second degré qui a pour racine évidente

$Y_1 = 1$. Or $Y_1 \times Y_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$
 $1 \times Y_2 = \frac{1}{2}$ donc $Y_2 = \frac{1}{2}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

Retour à la variable x : $Y = \cos(x)$ et $Y \in \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$
 donc on résout les deux équations :

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $\cos(x) = 1$.

$\cos(x) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
 ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\cos(x) = 1 = \cos(0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -0 + 2k\pi \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{S}_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; 0; -\frac{\pi}{3} \right\}$$

g) $\cos(2x) = \sin(3x)$

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) : \text{ de la forme } \cos(x) = \cos(a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \\ \text{ou} \end{array} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \end{array}$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \end{array} \quad \text{avec } k \text{ et } \tilde{k} \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\tilde{k}\pi = \frac{\pi}{2} + 2\tilde{k}\pi$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{S}_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{-7\pi}{10}; \frac{-3\pi}{10}; \frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{10} \right\}$$

$\begin{array}{ccccc} & \leftarrow R=0 & & \leftarrow R=2 & \\ & & & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ R=-2 & & R=-1 & & R=1 \\ & & & & R=0 \end{array}$

Équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Lorsque x varie de 0 à π , cosinus prend une et une seule fois toutes les valeurs entre 1 et -1 .
Autrement dit si $a \in [-1; 1]$, l'équation $\cos x = a$ admet une unique solution sur $[0; \pi]$.

La fonction arccosinus notée \cos^{-1} sur la calculatrice renvoie cette valeur.

Exemple : à l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée au millième près de la solution de l'équation :
 $\cos(x) = 0,4$ sur l'intervalle $]0; \pi]$,

$$x = \arccos(0,4) = \cos^{-1}(0,4)$$

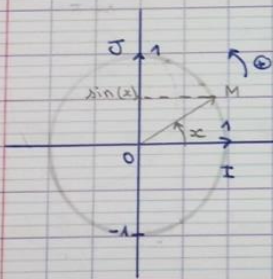
$$x \approx 1,107 \text{ rad. à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Rq. Sur $]-\pi; \pi]$: $x \approx 1,107$ et $x \approx -1,107$!

Lorsque x varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, sinus prend une et une seule fois toutes les valeurs entre 1 et -1 .
Autrement dit si $a \in [-1; 1]$, l'équation $\sin x = a$ admet une unique solution sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

La fonction arcsinus notée \sin^{-1} sur la calculatrice renvoie cette valeur.

Exemple : à l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée à $0,01$ degré près de la solution de l'équation : $\sin(x) = 0,7$ sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$,



$$x = \arcsin(0,7) = \sin^{-1}(0,7)$$

Pour avoir le résultat en degré, on règle la calculatrice en degré ds mode.

$$x \approx 44,43^\circ$$

F-Fonctions cosinus et fonction sinus

Ce paragraphe sera enrichi après avoir traité les applications sur la dérivation.

Définition : La fonction cosinus, notée \cos , est la fonction définie sur \mathbb{R} , qui à tout réel x associe son cosinus comme définie au paragraphe II, alinéa A.

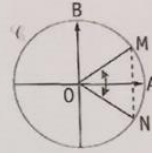
Parité : $\cos(-x) = \cos x$

En effet, le point M, associé au réel x et le point N, associé au réel $-x$, sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. M et N ont donc la même abscisse :

$$\cos(-x) = \cos x.$$

On dit que **la fonction cosinus est paire.**

\mathcal{C}_{\cos} admet l'axe des x
à axe de symétrie.

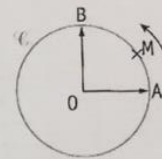


Périodicité : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

En effet, si M est associé au réel x , M est aussi associé à $x + 2\pi$.

Ajouter 2π au chemin revient à faire un tour de plus sur le cercle.

On dit que **la fonction cosinus est périodique, de période 2π .**



Réduction de l'intervalle d'étude

• D'après la périodicité de la fonction cosinus, il suffit d'étudier la fonction sur n'importe quel intervalle de longueur 2π puis de reproduire la courbe correspondante par des translations de vecteurs parallèles à l'axe des abscisses, de norme 2π . Choisissons comme intervalle d'étude $]-\pi; \pi]$.

• D'après la parité de la fonction cosinus, il suffit d'étudier la fonction sur $[0; \pi]$ puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Des valeurs remarquables

• Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$ $\hookrightarrow f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

• Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: on peut remarquer que les points du cercle trigonométrique associés à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à la droite (OB).

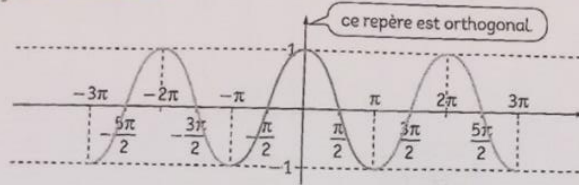
$$\text{Donc } \cos \frac{\pi}{6} = -\cos \frac{5\pi}{6},$$

$$\text{de même } \cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} \text{ et } \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}.$$

D'où le tableau suivant :

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Courbe représentative



Traçons la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-3\pi ; 3\pi]$.

On commence par la tracer sur $[0 ; \pi]$, puis on la complète par symétrie par rapport à la droite des ordonnées et on obtient la courbe en bleu.

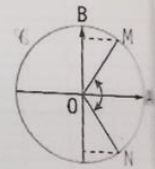
Sur $[\pi ; 3\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur \vec{u} , parallèle à la droite des abscisses et de norme 2π , et sur $[-3\pi ; -\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur $-\vec{u}$.

Définition : La fonction sinus, notée \sin , est la fonction définie sur \mathbb{R} , qui à tout réel x associe son sinus comme définie au paragraphe II, alinéa A.

Parité : $\sin(-x) = -\sin x$

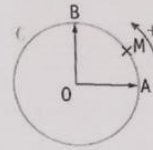
En effet, le point M, associé au réel x et le point N, associé au réel $-x$, sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. M et N ont donc des ordonnées opposées : $\sin(-x) = -\sin x$.

On dit que la **fonction sinus est impaire**.



Périodicité : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

En effet, si M est associé au réel x , M est aussi associé à $x + 2\pi$.
Ajouter 2π au chemin revient à faire un tour de plus sur le cercle.
On dit que **la fonction sinus est périodique, de période 2π** .



Réduction de l'intervalle d'étude

- D'après la périodicité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur n'importe quel intervalle de longueur 2π puis de reproduire la courbe correspondante par des translations de vecteurs parallèles à l'axe des abscisses, de longueur 2π . Choisissons comme intervalle d'étude $]-\pi; \pi]$.
- D'après la parité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur $[0; \pi]$ puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Des valeurs remarquables

• Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

• Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: on peut remarquer que les points du cercle trigonométrique associés à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à la droite (OB).

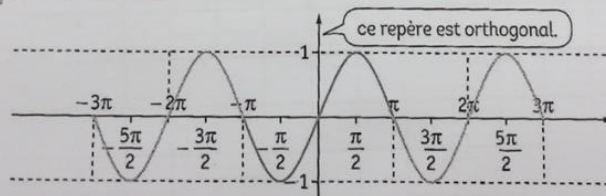
Donc $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6}$,

de même $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$.

D'où le tableau suivant :

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Courbe représentative



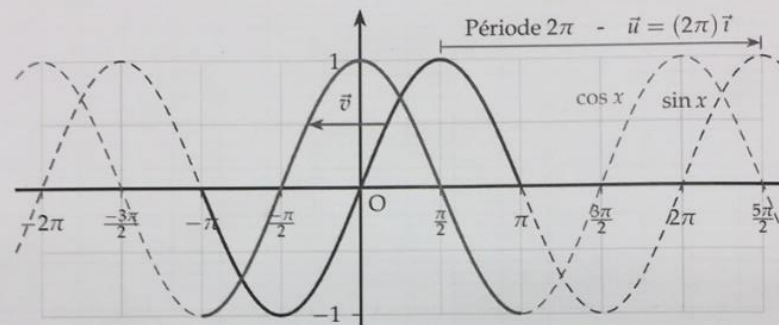
Traçons la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-3\pi; 3\pi]$.

On commence par la tracer sur $[0; \pi]$, puis on la complète par symétrie par rapport à l'origine du repère et on obtient la courbe en bleu.

Sur $[\pi; 3\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur \vec{u} , parallèle à la droite des abscisses et de norme 2π , et sur $[-3\pi; -\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur $-\vec{u}$.

Récapitulatif des courbes :

- Pour tracer les courbes \mathcal{C}_{\sin} et \mathcal{C}_{\cos} sur $[-\pi ; \pi]$, on utilise les propriétés de symétrie des fonctions sin et cos dues à leur parité.
- On déduit \mathcal{C}_{\sin} et \mathcal{C}_{\cos} sur \mathbb{R} par translations de vecteurs $\vec{u} = (2k\pi)\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Les courbes \mathcal{C}_{\sin} et \mathcal{C}_{\cos} sont des sinusoides.



Remarque : De $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, on déduit la sinusoides de cos par une translation de vecteur $\vec{v} = -\frac{\pi}{2}\vec{i}$ de la sinusoides de sin.