Chapitre 7 La fonction exponentielle

Nous allons dégager les propriétés principales de l'une des fonctions les plus utilisées en sciences : la fonction exponentielle.

Rappel : Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Ne pas oublier de dériver le contenu de la parenthèse….

I – Introduction

On considère le problème suivant :

Existe-t-il une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$?

On admettra dans ce chapitre qu'il existe une seule fonction vérifiant ces deux relations.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle, et provisoirement notée exp. (exp. est une abréviation du mot exponentielle).

Ainsi on a : la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $exp(0) = 1$ et pour tout réel x, $exp'(x)=exp(x)$.

Nous allons dégager des propriétés algébriques importantes de cette fonction exponentielle.

Lemme

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, on ait : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Alors ***f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.***

Preuve : C'est typiquement le genre de preuve qu'il faut avoir vu au moins une fois, cela ne s'invente pas…

✦***Propriété phare***✦

La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a : $exp(x) \neq 0$.

Pour les curieux, voici la justification de l'unicité de la fonction exponentielle :

- **Unicité de la fonction exponentielle.**

On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions :

$$\begin{cases} f = f' \text{ et } f(0) = 1 \\ g' = g \text{ et } g(0) = 1 \end{cases}$$

On pose $h = \dfrac{f}{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ car g ne s'annule pas.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables :

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$

On en déduit que $f = g$. La fonction exponentielle est unique.

Exercice 1

Calculer la dérivée de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 4exp(x) + x^2$; $g(x) = (2x+1)exp(x)$

✂ ---

II – Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Théorème (relation fonctionnelle de la fonction exponentielle)

Pour tous réels x et y : $exp(x+y) =$

Remarque : la fonction exponentielle transforme donc une somme en ……………………………..
Cette propriété s'étend à une somme de plusieurs termes :

Preuve :

Propriétés algébriques de la fonction exponentielle **(<u>*les relations suivantes sont à savoir par cœur*</u>)**

♥♥

0) **Pour tous réels x et y, $exp(x + y)$ =**

1) Pour tout réel x, $\boldsymbol{exp(-x)}$ **=**

2) Pour tous réels x *et* y, $\boldsymbol{exp(x-y)}$ **=**

3) Pour tout entier relatif n et tout réel x, $\boldsymbol{exp(nx)}$ **=**

♥♥

<u>*Preuve*</u> *:*

Théorème

La fonction exponentielle est ***à valeurs strictement positives***, c'est-à-dire que **pour tout réel x, $exp(x) > 0$**.

Preuve :

Conséquence graphique : la courbe représentative de la fonction exponentielle est entièrement située ……………………………………………………………..

Corollaire : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Nouvelle notation : A présent le nombre ***exp(1)*** (image de 1 par la fonction exponentielle) sera noté plus simplement ***e***. (Notation due au mathématicien suisse Euler, vers 1730).

On a avec cette convention, ***exp(1) = e.***

Or, pour tout entier relatif n, $exp(n\times 1) = (exp(1))^n = e^n$

On étend cette notation à tout réel x, et on notera alors, pour tout réel x, ***exp(x) = e^x***

Une question naturelle est de savoir combien vaut le réel e.

Grâce à une calculatrice, on a : $e \approx$ ………….. en tapant la séquence : $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{ln}$ $\boxed{1}$

Justifions cette valeur approchée de e :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Calculer $f'(x)$. En déduire que si $x \geq 0$, alors $f'(x) \geq 0$, et que si $x \leq 0$, alors $f'(x) \leq 0$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que pour tout réel x, on a : $f(x) \geq 0$ puis que : $1+x \leq e^x$.

2) Déduire de 1*c)* que pour tout entier naturel n non nul on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$

Par le même procédé, en donnant à x la valeur $-\dfrac{1}{n}$, on démontre que : $e \leq \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\boxed{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}}$

a) En donnant à n la valeur 1000, démontrer que : $2{,}71 \leq e \leq 2{,}72$.

b) Affiner cet encadrement en donnant à n la valeur 10000.

Remarque : La notation sous forme de puissance de l'exponentielle est justifiée par les propriétés de l'exponentielle que l'on a vues plus haut (identiques à celles sur les puissances).

Avec cette nouvelle notation de la fonction exponentielle, voici le formulaire des choses à retenir :

- $e^0 = \ldots$ (et $e = e^1 = exp(1)$).
- Pour tous réels x et y, $e^{\cdots\cdots\cdots} = e^{\cdots} \times e^{\cdots}$
- Pour tout réel x, $e^x \ldots\ldots 0$, et $e^{-x} = \ldots.$
- Pour tous réels x et y, $\dfrac{e^x}{e^y} = \ldots\ldots\ldots$
- Pour tout réel x, et pour tout entier relatif n, $(e^x)^n = \ldots..$

Connaître ces relations dans les deux sens !!

Propriété : Pour tout réel x, $\sqrt{e^x} = \ldots\ldots$

Preuve :

✂--

Exemples

0) Ecrire sous la forme d'une exponentielle les réels suivants :

$\dfrac{1}{e} = \ldots\ldots\ldots$; $\dfrac{e}{e^{-1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $e \times e^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\dfrac{e^2 \times e^{-4}}{e^5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$e \times (e^{-1})^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\dfrac{1}{e^{-3}} = \ldots\ldots\ldots$

$e \times e^2 \times e^3 \times \ldots\ldots \times e^{99} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✂--

1) Simplifiez les écritures suivantes : $A = e^{2x} \times e^{-x}$

$B = e^{3x+1} \times e^{2-x}$ $\qquad C = \dfrac{1}{e^{2x+4}}$ $\qquad D = \dfrac{e^{3x}}{e^5}$ $\qquad E = (e^x)^3$ $\qquad F = \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^x}$

$G = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$.

Exercice 2

Démontrer que pour tout réel x, on a les égalités suivantes :

$a)\ \dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$; $b)\ e^{2x}-1=e^x(e^x-e^{-x})$; $c)\ e^x-e^{-x}=(e^x-1)(e^{-x}+1)$

$d)\ 3e^{2x}-8e^x-3=(3e^x+1)(e^x-3)$; $e)\ \dfrac{e^{2x+1}}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{x+1}}{e^{-x}+e^x}$

✂--

Exercice 3

(u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n=2e^{-0,5n}$.

Démontrer que (u_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=(u_n)^2$.
Exprimer v_n en fonction de n.

✂--

III – Conséquences du sens de variation de la fonction exponentielle

Rappelons (cf. § II) que ***la fonction exponentielle est strictement croissante sur*** $\mathbb{R}$.

Conséquences importantes

Pour tous réels a et b,

- $e^a<e^b \iff a<b$
- $e^a=e^b \iff a=b$

Deux réels ont même exponentielle si et seulement si ....
Deux réels et leurs images par la fonction exponentielle sont rangés dans ....

Preuve :

✂--

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$a)\ e^x=e^{6-x}$; $b)\ e^{-2x+3}=1$; $c)\ e^x=-x^2$; $d)\ e^{2x+1}=e^{\frac{1}{x^2+1}}$; $e)\ (e^x+2)(e^x-1)=0$; $f)\ \dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}}=e^{x^2-1}$

$g)\ e^x-1<0$; $h)\ e^{x-1}>e$ $i)\ e^{-2023x}+2>0$; $j)\ e^{\frac{1}{x}}\le e$; $k)\ xe^x-2e^x\ge 0$; $l)\ e^{-0,2x-1}<0$.

Résumé : donnons le tableau de variation de la fonction exponentielle, avec équation tangente en A(0 ; 1), ainsi qu'un " portrait-robot " de cette fonction :

✂ ---

Exercice 5

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-2x+1)\, e^{x}$

Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.

En déduire que pour tout réel x, $f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

2) Etudier de même le sens de variation de la fonction g définie pour tout réel x non nul par : $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

✂ ---

IV – Dérivées de fonctions composées

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$, et f la fonction définie sur I par : $\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$.

Alors f est dérivable sur I, et pour tout réel $x \in I$, on a : ♥♥♥♥ $\boldsymbol{f'(x)}$ = ... ♥♥♥♥

Conformément à votre programme, en première, on ne croisera que les dérivées des fonctions suivantes :

Soient a et b des réels quelconques.

Si $f(x) = e^{ax+b}$, alors $f'(x) =$ ....

En particulier, si $f(x) = e^{ax}$, alors : $f'(x) =$ ......

Exercice 6

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant sur quel intervalle on se place :

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = 2{,}5\,e^{-0{,}2x}$ c) $g(x) = 3e^{-4x+1}$ d) $h(x) = \dfrac{e^{-2x}}{16}$ e) $i(x) = xe^{-x} + 3x^2 - x - 1$

e) $j(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ f) $k(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$ g) $l(x) = \dfrac{e^{-3x+2}}{e^{5x-4}}$

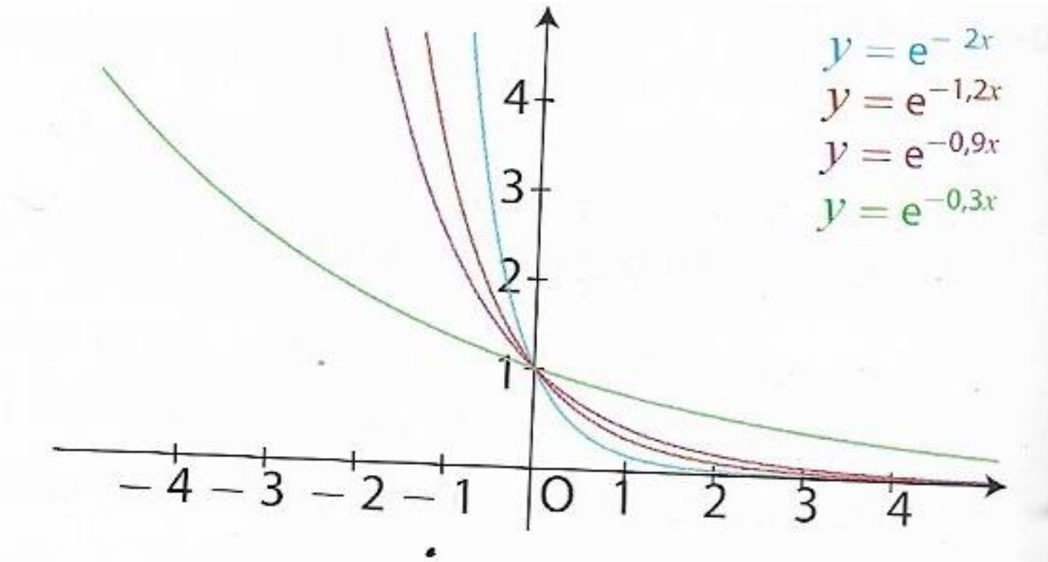
✂ ---

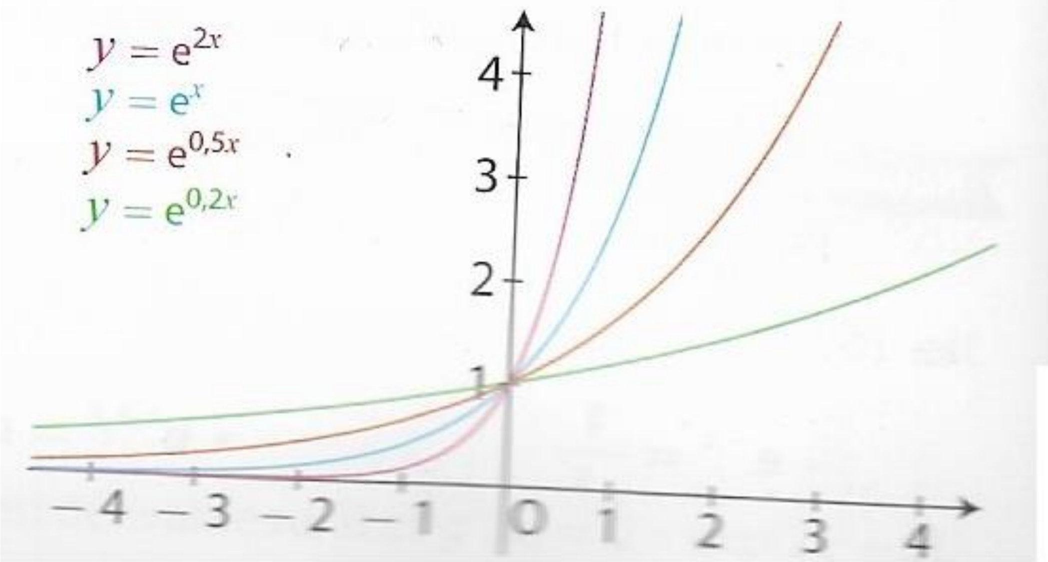
Exercice 7

Soit k un réel strictement positif, et f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = e^{-kt}$ et g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_k(t) = e^{kt}$.

Etudier le sens de variation de f_k et g_k sur $\mathbb{R}$ et dresser leur tableau de variation.

Voici les courbes représentatives de quelques-unes des fonctions de la famille (f_k) et (g_k) :





Exercice 8

Un condensateur de capacité C est branché aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance R.
La tension aux bornes du condensateur en fonction du temps en seconde, est donnée par l'expression $u_c(t) = E \times e^{\frac{-t}{\tau}}$, où E représente la tension d'alimentation, exprimée en volt, et τ une constante telle que $\tau = RC$. (R en ohm (Ω) et C en farad (F)).
On donne $E = 2$ V, $R = 10$ kΩ et $C = 1\,000$ µF.

1. Montrer que la tension aux bornes du condensateur est une fonction décroissante.
2. À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la tension aux bornes du condensateur sur l'intervalle [0 ; 15] et déterminer le temps nécessaire pour que la tension du condensateur devienne inférieure à la moitié de la tension d'alimentation.

Exercice 9

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes représentatives des fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.

Pour tout réel a, on note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_1$ au point d'abscisse a de C_1, et T_2 la tangente à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse a de $\mathscr{C}_2$.

Montrer que ces dernières découpent sur l'axe des abscisses un segment de longueur constante.

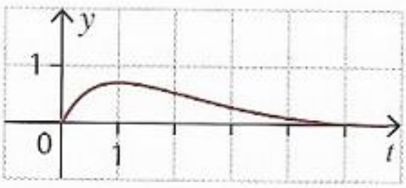
✂--

Exercice 10

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution du taux d'alcool dans le sang d'un individu après ingestion d'une boisson alcoolisée. Ce taux est donné en $g \cdot L^{-1}$.
Une étude sur un jeune homme de 64 kg ayant ingéré une dose de 33 g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans son sang, en fonction du temps t en heure, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}025\ ;+\infty[$ par :

$$f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}.$$

La représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé est fournie ci-dessous.



1. Avec la précision permise par le graphique, déterminer combien de temps après l'ingestion le taux d'alcool passe au-dessous du seuil de $0{,}25\ g \cdot L^{-1}$.
2. Un taux d'alcool dans le sang inférieur à $0{,}001\ g \cdot L^{-1}$ est considéré comme négligeable.
À partir de combien de temps le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est-il négligeable ? On peut utiliser une calculatrice.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}025\ ;+\infty[$, on a :

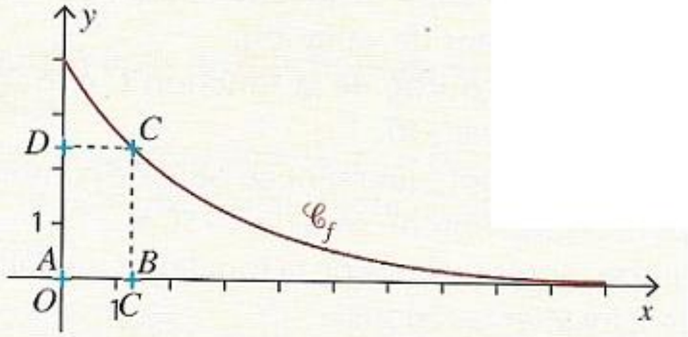
$$f'(t) = (2{,}05 - 2t)e^{-t}.$$

4. Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0{,}025\ ;+\infty[$ et en déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang de ce jeune homme.

Exercice 11

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skate-board. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = 4e^{-0,4x}.$$



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormé d'origine O, la courbe $\mathscr{C}_f$ modélisant la rampe de skate-board et le rectangle $ABCD$ représentant le panneau publicitaire. Le point A est situé en O origine du repère, les points B et D appartiennent respectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées, le point C appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Montrer que si $AB = 2$ m, alors le panneau publicitaire a une aire d'environ $3,6$ m^2.
2. Parmi tous les panneaux possibles répondant aux contraintes de l'énoncé, déterminer, au cm près, les dimensions de celui qui possède l'aire la plus grande possible.

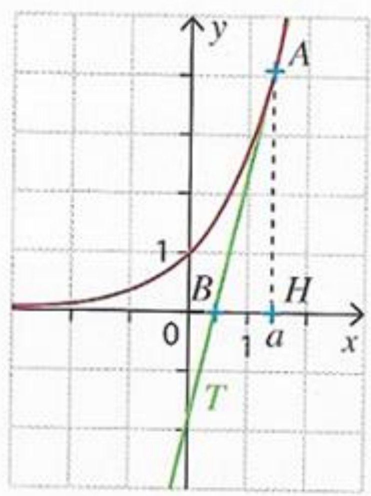
✂ -

Exercice 12

On considère la courbe représentative de la fonction exponentielle définie pour tout réel x par $f(x) = e^x$. On note cette courbe $\mathscr{C}_f$.

Soit a un réel. On considère le point A appartenant à $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A, B l'intersection de $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses et H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.



1. Montrer que l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est :

$$y = e^{a}x + e^{a}(1 - a).$$

2. Déterminer l'abscisse du point B.

3. Montrer que la distance BH est indépendante de a. Quelle est sa valeur ?

✂---

Exercice 13

On appelle fonction cosinus hyperbolique, la fonction notée *ch* définie sur ℝ par :

$$ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

1) Calculer la dérivée de la fonction *ch*, puis étudier le sens de variation de la fonction *ch* sur ℝ.

2) Montrer que *ch* est paire sur ℝ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) Application

En 1947, le Jefferson National Expension Memorial lança un grand concours d'architectes dont le but était la construction d'un monument à Saint-Louis (Missouri, USA) symbolisant la porte de l'ouest et représentatif du XX^{e} siècle. Sur les 172 projets présentés, c'est la grande arche présentée par Eero Saarinen qui fut sélectionnée. La construction de l'arche s'acheva en 1965. Elle fait 190 m de haut et autant de large à sa base.

1. On admet que l'équation de l'arche de Saint-Louis dans le repère orthonormé d'origine le centre du segment joignant les deux pieds de l'arche est de la forme :

$$f(x) = a \times \operatorname{ch}\left(\frac{x}{38}\right) + b.$$

a. Vérifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

b. Déterminer les valeurs approchées au centième des réels a et b.

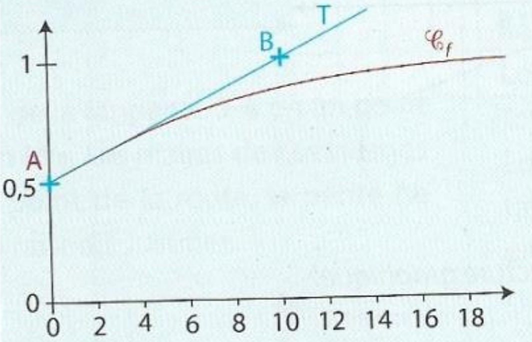
En exercice : méthode d'Euler, et tracé approché de la courbe de l'exponentielle.

Exercice supplémentaire I

Soit a et b des nombres réels.
On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



En détaillant votre démarche, déterminer la valeur des réels a et b.

Exercice supplémentaire II

Une entreprise congèle des frites dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets.

La température en degré Celsius, des frites après leur entrée dans le tunnel de congélation, est modélisée, t heures après leur entrée dans le tunnel de congélation, par la fonction f, définie sur l'intervalle [0 ; 5] par : $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

Le cahier des charges impose que la température de conservation des frites soit inférieure ou égale à -24 °C.

a) Quelle est la température des frites à l'entrée du tunnel de congélation ?

b) Rappeler la relation qui permet de dériver les fonctions de type : $h(x) = e^{ax}$ où a est un réel fixé, puis étudier le sens de variation de f sur l'intervalle [0 ; 5].

c) Si les frites sont laissées une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des frites sera-t-elle conforme au cahier des charges ? Justifier.