« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. » Victor Hugo

Chapitre VI	Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

I – Continuité d'une fonction

A – Généralités sur la continuité

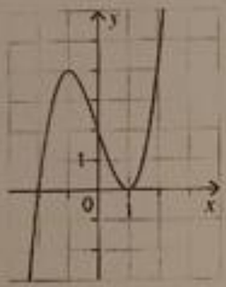
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à l'intérieur de I.
↳ intervalle privé de ses extrémités

♥ ***Définition*** : f est dite continue en a si et seulement si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Ou encore, f est continue en a si et seulement si $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.
En français, f est continue en a si et seulement si f admet une limite ***finie*** en a égale à $f(a)$.

f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel a appartenant à I.

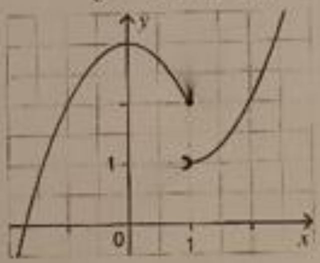
Illustration graphique de la notion de continuité

• f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x + 2$.



f est continue sur $\mathbb{R}$.

• f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 \text{ si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$



• : valeur prise
ↄ : valeur exclue

Montrons que f n'est pas continue en 1 :

$f(1) = 3 - 1^2 = 2$

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 2x + 2) = 1$ et $1 \neq f(1)$ car $1 \neq 2$.

Dans le second exemple, f n'est pas continue en 1, et donc f est non continue sur $\mathbb{R}$.

Concrètement, la continuité de f sur I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut être tracée...SANS avoir à lever le stylo...

Remarque : le terme continuité n'a pas été choisi de façon anodine, il signifie qu'il n'y a pas de « *coupure* » dans le graphe de f.
Post bac, f est continue en a se quantifie en :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0, \forall x \in I, (|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon)$

Exercice 1 La **fonction porte**, notée Π, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Dans un repère, tracer la courbe de la fonction Π.
b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction Π est-elle continue ?

a)

b) Π est continue sur chacun des intervalles :

$]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$ et sur $]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}[$.

Propriété (admise)

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$; $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.
- Sur chaque intervalle où elle est définie, une fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) est continue.
- De façon générale, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et k est un réel, alors les fonctions $kf + g, fg, f^n$ (n entier naturel non nul) sont continues sur I ; $\frac{f}{g}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
- Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathrm{I}$ et si $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ est continue en $f(a) \in \mathrm{J}$, alors $g \circ f$ est continue en a.

De façon générale, la notion de continuité se transmet en faisant de l'algèbre sur des fonctions continues au départ.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ si } x < 1 \\ x^2 + a \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue en 1.

Déjà : $f(1) = -1^2 + a = a - 1$

f est continue en 1 ssi $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = a - 1$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1^2 + 1) = 2$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (-1^2 + a) = a - 1$.

Ainsi f est continue en 1 ssi $2 = a - 1$ càd $a = 3$.

Théorème (*être dérivable implique être continue*)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à $\mathring{I}$.

1) Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2) La réciproque est fausse !

Preuve : 1) Pour h non nul : $f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ permet de conclure instantanément !

En effet :

« f est dérivable en a » signifie que :

$\exists l \in \mathbb{R}$ tq : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.

Rq : $l = f'(a)$

Soit $h \in \mathbb{R}^*$: $f(a+h) \overset{\text{astuce belge}}{=} f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h$

Or f est dérivable en a, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ $(\in \mathbb{R})$

Donc par limite de produit : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h = 0$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{h \to 0} f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h = f(a)$

Ainsi : $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, donc f est continue en a.

2) La fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 !

$f(x) = \sqrt{x}$ avec $x \geq 0$; $f(0) = \sqrt{0} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0 = f(0)$: donc f continue en 0.

Pour $h \neq 0$: $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Comme cette année on ne manipule presque exclusivement que des fonctions dérivables, ces fonctions à disposition sont donc continues !

Il existe cependant des fonctions non continues (on dit discontinues) en un réel a.

A titre culturel, donnons un exemple de fonction discontinue en plusieurs valeurs :

$E(x) = \lfloor x \rfloor$

• f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Dans un tableau de variations, une flèche sans coupure sur un intervalle indique la continuité de la fonction en question sur cet intervalle.

Complément : au chapitre 1, nous avons appris à dériver les fonctions composées.
Voici une preuve du théorème de dérivation des fonctions composées :

> Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout réel x appartenant à I, on ait $u(x)$ qui appartienne à J.
>
> Si u est dérivable sur l'intervalle I et f est dérivable sur J, alors la fonction $g = f \circ u$ est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a :
>
> ♥♥♥ $g'(x) = (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$. ♥♥♥

Preuve: Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I.

On calcule le taux d'accroissement de $g \circ u$ entre a et $a + h$.

$$\frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

De plus :

— La fonction u est continue sur I donc en a et on a :

$$\lim_{h \to 0} u(a+h) = u(a) \iff \lim_{h \to 0} u(a+h) - u(a) = 0.$$

— La fonction f étant dérivable sur J, elle est dérivable en $u(a) \in J$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)} \underset{H = u(a+h) - u(a)}{=} \lim_{H \to 0} \frac{f\big(u(a) + H\big) - f\big(u(a)\big)}{H} = f'\big(u(a)\big).$$

— Enfin, la fonction u est dérivable en a donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

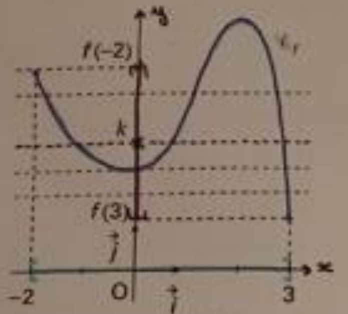
En conclusion, d'après les théorèmes sur les limites de produits :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = u'(a) \times f'\big(u(a)\big).$$

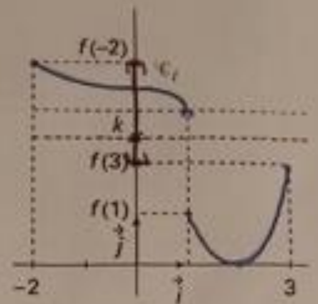
La fonction $f(u)$ est donc dérivable en $a \in I$ quelconque donc sur I tout entier.

II – Le théorème des valeurs intermédiaires et ses innombrables conséquences

Approche graphique :



f est continue sur $[-2\,;3]$. Pour tout réel k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.



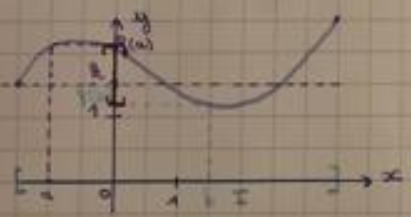
f est définie sur $[-2\,;3]$ mais elle n'est pas continue sur $[-2\,;3]$. Il existe des réels k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

♥♥♥ *Théorème des valeurs intermédiaires* (*noté T.V.I.*) ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors, pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Illustration



Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équa°

f(x) = k admet au - une solu° sur [a ; b] ⊂ I.

On admet ce théorème qui est assez intuitif, dont la preuve est difficile !

Mnémo : ♥♥♥ On retiendra que si f est définie et continue sur $[a\,;b]$, alors f prend *AU MOINS* une fois toute valeur intermédiaire k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. ♥♥♥

Remarque : L'équation $f(x) = k$ où k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\,;b]$. On ne sait pas lequel des deux réels $f(a)$ et $f(b)$ est le plus grand, donc lorsqu'on dit compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ne pas croire que $f(a)<f(b)$!

Le *T.V.I.* va donc permettre de *« prévoir »* l'existence de solution(s) pour une équation donnée, sur un intervalle.

Application 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-2 ; 2]$.

- f est continue sur $[-2 ; 2]$ car f est dérivable sur $[-2 ; 2]$.
- $f(-2) = (-2)^3 + (-2) + 1 = -9$

$f(2) = 2^3 + 2 + 1 = 11$

Or 0 est valeur intermédiaire compris entre -9 et 11 : $-9 \leqslant 0 \leqslant 11$.

Donc d'après le T.V.I, 0 admet au-moins un antécédent par f, donc l'équa° $f(x) = 0$ admet au-moins une solu° sur $[-2 ; 2]$.

Application 2

Montrer que l'équation : $e^{3x+1} = x+4$ a au moins une solution sur $[-5 ; 0]$.

Soit f la f° définie sur $[-5 ; 0]$ par :

$f(x) = e^{3x+1} - x - 4$

But : Mq l'équa° $f(x) = 0$ admet au-1 sol° sur $[-5, 0]$

- f est continue sur $[-5, 0]$ car somme et composée de f° continues sur $[-5, 0]$, et car dérivable sur $[-5, 0]$ (composée et somme de f° dérivables).

$f(-5) = e^{-14} + 5 - 4 = 1 + e^{-14}$ (>1)

$f(0) = e^1 - 0 - 4 = e - 4$ $(\simeq -1{,}28)$

Or 0 est une valeur intermédiaire par f car $0 \in [e-4 ; 1 + e^{-14}]$ $(e - 4 \leqslant 0 \leqslant 1 + e^{-14})$.

Donc d'après le th. des valeurs intermédiaires, l'équa° $f(x) = 0$ admet au-1 sol° sur $[-5 ; 0]$ et donc de m̂ pour l'équa° : $e^{3x+1} = x + 4$.

Application 3 *(principe de Bolzano, important)*

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a ; b]$.

- f est continue sur $[a ; b]$
- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, donc $f(b) < 0 < f(a)$

Donc 0 est une valeur intermédiaire pour f

Or d'après le T.V.I, l'équa° $f(x) = 0$ admet au-moins une sol° sur $[a;b]$.

Corollaire du T.V.I : *(capital, c'est de lui dont on se servira fréquemment en terminale).*

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.
>
> Si f est **continue** sur $[a ; b]$, et si f est **strictement monotone** sur $[a ; b]$ (c'est-à-dire f est strictement croissante sur $[a ; b]$ ou f est strictement décroissante sur $[a ; b]$), alors, pour tout **réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$**, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution sur $[a ; b]$.

Preuve :

f est continue sur $[a;b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, donc d'après le T.V.I, l'équa° $f(x) = k$ admet au-moins 1 sol° sur $[a;b]$.

Supposons que $f(x) = k$ admettent 2 sol° distinctes sur $[a;b]$. Notons les x_1 et x_2 :

$f(x_1) = k$; $f(x_2) = k$ avec $x_1 \neq x_2$

Ainsi : $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$

cas où f est strictement croissante sur $[a;b]$:

On a donc : $f(x_1) < f(x_2)$ On a : $f(x_1) > f(x_2)$

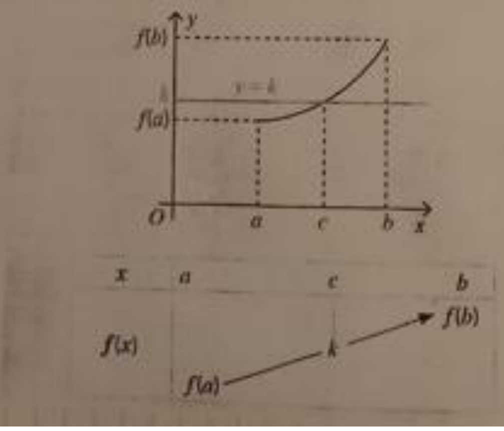
Donc : $k < k$: absurde   Donc : $k > k$: absurde

Ainsi $f(x) = k$ n'admet pas 2 sol° distinctes sur $[a;b]$.

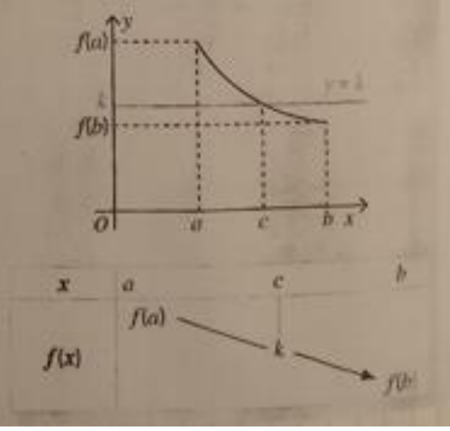
Donc $\hat{c}$ $f(x) = k$ admet au-moins 1 sol° sur $[a;b]$, on déduit que $f(x) = k$ admet 1 unique sol° sur $[a;b]$. Idem si f strict. $\searrow$ sur $[a;b]$.

Illustration

- Cas où f est strictement croissante sur $[a;b]$:



- Cas où f est strictement décroissante sur $[a;b]$:



Remarques importantes

Trois conditions sont nécessaires pour pouvoir appliquer ce corollaire du T.V.I : ↱ th. de la bijection

1) ...f est continue sur [a,b]...

2) ...f est strictement monotone sur [a,b]...

3) ...k soit compris entre f(a) et f(b) (k est une valeur intermédiaire pr f)...

Le corollaire du *T.V.I.* s'applique aussi sur un intervalle de la forme : $[a ; b[$; $]a ; b[$; $]a ; b]$; $[a ; +\infty[$; $]a ; +\infty[$; $]-\infty ; b[$; $]-\infty ; b]$.

Si l'intervalle est ouvert en une borne a ou b est ouverte, alors <u>on remplace l'image $f(a)$ ou $f(b)$ par la *LIMITE* de f en cette borne</u> ; si une borne de l'intervalle est $-\infty$ (ou $+\infty$), alors on considère la limite de f en $-\infty$ (ou en $+\infty$).

Pour un intervalle, la borne écrite à gauche est toujours inférieure à celle écrite à droite : ainsi écrire 0 appartient à [4 ; -2], ou encore 1 appartient à]+∞ ; 0[sont des inexactitudes.

Exercice graphique

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = 2$ *sur* $]0 ; 1]$.

b) $f(x) = 0$ *sur* $]0 ; +\infty[$

c) $f(x) = 0{,}5$ *sur* $[1 ; e^2]$ puis sur $]0 ; +\infty[$.

d) $f(x) = -1$ *sur* $]0 ; +\infty[$

a) 1) f est continue sur]0; 1].

2) f est strictement décroissante sur]0; 1].

3) 2 ∈]0, +∞[(2 est VI pour f).

Donc d'après le corollaire du th. des V.I l'équa° f(x) = 2 a une unique sol° sur]0; 1]. On le note f(α) = 2.

b) D'après le tableau de varia° : sur]0, 1], f(x) = 0 a pr unique sol° x = 1.

Sur]1; +∞[, d'après le tableau de varia° on a : f(x) > 0, donc f(x) = 0 n'a aucune solu° sur]1; +∞[.

Donc sur $]0; +\infty[$, $f(x) = 0$ admet pour unique sol° : $x = 1$.

c) $f(x) = 0,5$ sur $[1; e^2]$:

$\frac{4}{e^2} \approx 0,54$

1) f est continue sur $[1; e^2]$

2) f est strict. ↗ sur $[1; e^2]$

3) $\frac{4}{e^2} \approx 0,54$, donc $0,5 \in [0; \frac{4}{e^2}]$ ($0 \leq 0,5 \leq \frac{4}{e^2}$: 0,5 est VI pour f)

Donc d'après le C.T.V.I, l'équa° $f(x) = 0,5$ admet 1 unique sol° sur $[1; e^2]$.

On la note β : ainsi $f(\beta) = 0,5$, sur $]0; +\infty[$.

. f n'est pas strict. monotone sur $]0; +\infty[$:

On subdivise $]0, +\infty[$ en intervalles sur lesquels f est strict. monotone, càd en : $]0; 1]$ puis $[1; e^2]$ puis $[e^2; +\infty[$.

Par la m̃ rédac° :

Sur $]0; 1]$, $f(x) = 0,5$ admet une unique sol°.

Notons la γ : $f(\gamma) = 0,5$ et $\gamma \in]0; 1]$.

De m̃ sur $[e^2; +\infty[$, $f(x) = 0,5$ admet une unique sol°, notons la δ :

$f(\delta) = 0,5$ et $\delta \in [e^2; +\infty[$.

d) $f(x) = -1$ sur $]0; +\infty[$

Grâce au tableau de varia° : $f(x) \geq 0$ pour tt réel : $x > 0$.

Donc $f(x) = -1$ n'admet aucune sol° sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2

f est définie sur $[0 ; 2]$ par : $f(x) = -x^3 - x + 3$.

a) Démontrer que f est strictement décroissante sur $[0 ; 2]$ et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 2]$.

---

a) $\forall x \in [0, 2]$, $f(x) = -x^3 - x + 3$

$f'(x) = -3x^2 - 1$

Signe de $f'(x)$ sur $[0, 2]$: $\forall x \in [0, 2]$, $x^2 \geq 0$, donc $-x^3 \leq 0$

donc $-x^3 - 1 \leq -1 \leq 0$

Donc $\forall x \in [0;2]$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement $\searrow$ sur $[0;2]$.

x	0	2
$f(x)$	3 $\searrow$	-7

$f(0) = 3$

$f(2) = -2^3 - 2 + 3 = -7$

b) • f est continue sur $[0, 2]$ car dérivable sur $[0;2]$.

• f est strict. $\searrow$ sur $[0;2]$.

• 0 est compris entre -7 et 3 càd $-7 < 0 < 3$.

Donc d'après le C.T.V.I, l'équa° $f(x) = 0$ admet 1 unique sol° sur $[0;2]$.

On note α cette sol° : $f(\alpha) = 0$.

Donnons un encadrement de α au dixième près :

(à l'aide de la calculatrice $\Rightarrow$ table de valeurs) :

↳ pas = 0,1

x	$f(x)$
1,2	0,072
α	0
1,3	-0,497

On a : $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$: encadrement de α à 0,1 près.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x - 2$.

a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α.
d) Encadrer α à : l'unité près, puis au dixième près, puis à 10^{-2} près à l'aide de votre calculatrice. (Méthode des balayages successifs).
e) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Bien retenir cette façon de faire pour déterminer le signe des valeurs prises par une fonction sur un intervalle.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x + 1$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 1 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2) = -\infty$.

Donc par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

c) • f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$.

• f est stric. ↗ sur $\mathbb{R}$.

• $0 \in]-\infty ; +\infty[$

Donc d'après le C.T.V.I, l'éq° $f(x) = 0$ admet 1 unique sol° α avec $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(\alpha) = 0$.

d) Grâce à la machine :

$0 < \alpha < 1$: encadrement à l'unité près de α.

$0,4 < \alpha < 0,5$: à $0,1$ près

$0,44 < \alpha < 0,45$: à $0,01$ près.

e) f croît strictement sur $\mathbb{R}$ et $f(\alpha) = 0$ donc si $x < \alpha$, alors $f(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $f(x) > 0$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 4

f est la fonction définie sur $[-10 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^x - 3$.

En détaillant les étapes de votre démarche, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

$x \geq -10$: $f(x) = (x+1)e^x - 3$

$f(x) = u(x) \times v(x) - 3$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$

Donc $f'(x) = u'v + uv' - 0$

$f'(x) = e^x + (x+1)e^x$

$f'(x) = e^x(1 + x + 1) = (x+2)e^x$

Signe de $f'(x)$: $e^x > 0$ pour tout réel : $x \geq -10$.

Donc $f'(x)$ a le m̂ signe que $x+2$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$.

Donc

x	-10		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}-3$	$\nearrow$	

$g(-10) = -9e^{-10} - 3$
$g(-2) = -e^{-2} - 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Donc par pdt et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Sur $[-10;-2]$ g décroît et $g(-10) = -9 \times e^{-10} - 3$, donc $g(-10) < 0$.

Par suite : $\forall x \in [-10;-2]$, $g(x) < 0$.

Plaçons-nous sur $[-2;+\infty[$:

g est continue sur $[-2;+\infty[$ car dérivable.

g est strict. $\nearrow$ sur $[-2;+\infty[$

$0 \in [-e^{-2}-3;+\infty[$

Donc d'après le corollaire du TVI, $g(x)=0$ admet une unique solt° α sur $[-2;+\infty[$

$g(\alpha) = 0$

Enfin grâce au TVI : $\forall x \in [-2;\alpha]$, $g(x) \leq 0$ et $\forall x \in [\alpha;+\infty[$, $g(x) \geq 0$

Donc

x		α		$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	

avec la calculette $0,61 < \alpha < 0,62$

Remarques : *T.V.I* et son corollaire ***permettent de montrer l'existence et /ou l'unicité de(s) solution(s) à une équation donnée,*** sur un intervalle donné, mais néanmoins, ces gros théorèmes ***ne permettent pas de savoir combien vaut chaque solution (valeur exacte).***

On se contentera, dans les exercices, de donner une valeur approchée de chaque solution, avec la précision que l'on nous demandera. L'utilisation d'une calculatrice sera nécessaire.

III- Continuité et suite récurrentes

Propriété *(admise)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I.
Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

1) Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

2) Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, où *f est continue sur I.*

Si (u_n) converge vers $L \in I$, alors L est solution de l'équation : ....$L = g(L)$..........

Schéma : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n)$ dès que f est continue en a où $a = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$.

Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; 2]$ et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) En déduire que (u_n) converge, puis calculer sa limite.

$u_0 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$

1) f est définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3} = \sqrt{u(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x + 3 \\ u'(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

f est dérivable sur $[0; 2]$ car $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ l'est et ne s'annule pas sur $[0; 2]$.

$\forall x \in [0; 2]$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}}$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}}$$

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0; 2]$.

Donc f croît strict' sur $[0; 2]$.

x	0	2
$f(x)$	$\sqrt{3}$ $\nearrow$	2

2) $n \geq 1$ et $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

Initialisat° : pour $n = 1$: Mq : $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2$.

Or $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}u_0 + 3} = f(u_0) = \sqrt{\frac{1}{2} \times (-5) + 3} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\simeq 0{,}707)$

$u_2 = f(u_1) = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3} = \sqrt{3 + \frac{\sqrt{2}}{4}}$ $(\simeq 1{,}83)$

Ainsi on a bien : $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tq $P(n)$ soit vraie.

On suppose donc que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

But : Mq $P(n+1)$ est vraie càd mq que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

Par h. rec : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$ car f croît sur $[0;2]$

$\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

Or $0 \leq \sqrt{3}$ donc en perte d'info°, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$:

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire :

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) (u_n) croît et elle est majorée par 2.

Donc (u_n) converge d'après le th. de convergence des suites monoto[nes]

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ℓ est sol° de $\ell = f(\ell)$ car f est continue sur $[0;2]$.

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\ell + 3} = \ell \Rightarrow \ell^2 = \frac{1}{2}\ell + 3 \Rightarrow \ell^2 - \frac{1}{2}\ell - 3 = 0$

$\ell = 2$ est racine évidente donc $\ell_2 \times 2 = \frac{c}{a}$

$2\ell_2 = \frac{-3}{1} = -3$

$\ell_2 = \frac{-3}{2}$.

Donc 2 ici $\ell \in [0;2]$.

Donc $\ell = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Exercices de synthèse

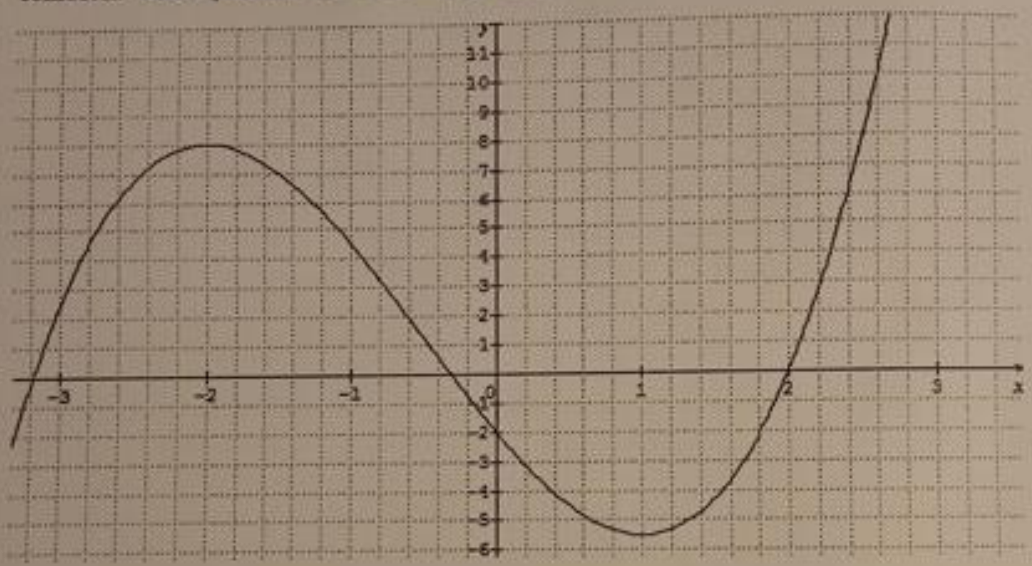
Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x - 2$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O ; I ; J).

Le but de l'exercice est de chercher s'il existe des tangentes à C_f passant par le point O.

0) Conjecturer graphiquement si le problème posé admet des solutions, le cas échéant, préciser combien. oui, une à $x = -1{,}3$ environ.



1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a de C_f passe par l'origine du repère si et seulement si : $f(a) - af'(a) = 0$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

a) **Exprimer $g(x)$ en fonction de x.**

b) **Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.**

c) **Etudier le sens de variation de g sur ∞, et dresser son tableau de variation complet.**

d) **Démontrer que la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$. On note α cette valeur.**

e) **Donner un encadrement de α à 10^{-2} près, puis la valeur approchée de α au dixième près.**

f) **Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.**

3) Résoudre alors le problème posé en début d'énoncé.

1) T_a : tangente à C_f en son point d'abscisse a.

T_a a pour équa° : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

T_a passe par $O(0;0)$ ssi $0 = f'(a)(0-a) + f(a)$, càd :

$0 = f'(a) \times (-a) + f(a)$

Donc $f(a) - af'(a) = 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - xf'(x)$

Rq: T_a passe par O ssi $g(a) = 0$.

a) $f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Donc $g(x) = f(x) - xf'(x)$

$g(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2 - x(3x^2 + 3x - 6)$

$g(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2 - 3x^3 - 3x^2 + 6x$

$g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2$

b) En $+\infty$: Par limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -1,5x^2 = -\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

En $-\infty$: F.I. de type "$+\infty - \infty$"

$g(x) = x^2(-2x - 1,5) - 2$

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 1,5) = +\infty$.

Par produit et somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

c) $g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -6x^2 - 3x = x(-6x - 3)$

Étude du signe de $g'(x)$:

$g'(x)$ est un trinôme : $-6x^2 - 3x$ qui a pour racines évidentes :

$x = 0$ et $-6x - 3 = 0$

$6x = -3$

$x = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$.

$a = -6$ donc $a < 0$

Donc :

x	$-\infty$		α		$-0,5$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2,125$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = -2$

$g(-0,5) = -2 \times (-0,5)^3 - 1,5 \times (-0,5)^2 - 2$

$g(-0,5) = -2,125$

d) g s'annule en α signifie : $g(\alpha) = 0$.

→ Sur $[-0,5 ; +\infty[$ d'après la q. 2.c., $g(x) < -2$, donc l'équa° $g(x) = 0$ n'admet aucune solu° sur $[-0,5 ; +\infty[$.

→ Sur $]-\infty ; -0,5]$:

- g est continue sur $]-\infty ; -0,5]$ car dérivable sur cet intervalle.
- g est strict. ↘ sur $]-\infty ; -0,5]$ (q. 2.c)
- 0 est V.I. pour g car $0 \in [-2,125 ; +\infty[$.

Donc d'après le CTVI, l'équa° $g(x) = 0$ a une unique sol° α $]-\infty ; -0,5]$.
Donc $g(x) = 0$ a donc une unique sol° sur $\mathbb{R}$.

e) Avec la machine (méthode des balayages) :

Pas égal à 0,1 :

x	$g(x)$
$-1,3$	$-0,14$
$-1,4$	$0,35$

$-1,4 < \alpha < -1,3$: encadrement au dixième près de α.

Pas égal à 0,01 :

x	$g(x)$
$-1,33$	$0,05$
α	0
$-1,32$	$-0,01$

$-1,33 < \alpha < -1,32$: encadrement de α à 10^{-2} p

f) D'après q. c) et q. d) :

g ↘ sur $]-\infty, \alpha]$ donc $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$, $g(x) \geq 0$.

Enfin, sur $[\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

3) D'après q.1, T_a passe par $O(0;0)$ ssi : $f(a) - f'(a) \times a = 0$

ssi : $g(a) = 0$.

Or d'après q.2), l'équa° $g(x)=0$ a une unique sol° α sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : T_α est l'unique tangente à C_f qui passe par O.

$-1,33 < \alpha < -1,32$: confirma° de la conjecture à q.a).

Exercice II

Un vase cylindrique de base un disque de rayon 1 dm, contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.

On plonge une bille de diamètre *d* dm dans ce cylindre et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.

1. a) Exprimer en fonction de *d* le volume, en dm^3 :

• d'eau versé initialement, • de la bille.

b) Exprimer de deux façons différentes le volume du cylindre de hauteur *d* contenu dans le vase après avoir plongé la bille.

c) En déduire que *d* vérifie $0 < d < 2$ et :

$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$

2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; 2[$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du diamètre *d* de la bille.

1. a) V_i = volume initial d'eau

$V_i = V_{cylindre} = B \times h = \pi . R^2 . h$ avec $R = 1$ et $h = 0,5$.

$V_i = \pi \times 1^2 \times 0,5$

$V_i = 0,5\pi$ (dm^3)

V_B = volume de la bille de diamètre d.

V_B rayon x = $\frac{4}{3}\pi \times r^3$ avec $r = \frac{d}{2}$.

Donc $V_B = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{8} = \frac{\pi d^3}{6}$ (dm^3)

b) V_C = volume du cylindre final

$V_C = V_L + V_B = 0{,}5\pi + \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi d^3}{6}$ (dm^3)

V_C = vol. d'un cylindre de hauteur d et de rayon 1 dm

$V_C = \pi \times 1^2 \times d = \pi d$ (dm^3)

c) $d > 0$: existence de la bille.

$d < 2$: la bille rentre ds le cylindre.

Donc $0 < d < 2$.

Enfin grâce à q. 1b) : $V_C = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi d^3}{6} = \pi d$

Donc : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi d^3}{6} = \pi d$

$\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{d^3}{6}\right) = \pi d$

$\frac{1}{2} + \frac{d^3}{6} = d$ (car $\pi \neq 0$)

$\frac{3 + d^3}{6} = d$

$3 + d^3 = 6d$

$d^3 - 6d + 3 = 0$

2a) $x^3 - 6x + 3 = 0$ avec $0 < x < 2$

Rq : d est sol° de cette équa° : $x^3 - 6x + 3 = 0$ car $d^3 - 6d + 3 = 0$ (q.c)

Soit f la f° définie sur $]0; 2[$ par : $f(x) = x^3 - 6x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$

$f'(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

Étude du signe de $f'(x)$ sur $]0; 2[$:

$3 > 0$; $0 < x < 2$ donc $x + \sqrt{2} > \sqrt{2} > 0$.

Donc $f'(x)$ a m̃ signe que $x - \sqrt{2}$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff x - \sqrt{2} \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$.

Donc :

x	0		α		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	‖	$-$			0	$+$	‖
$f(x)$	‖ 3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-4\sqrt{2}+3$	$\nearrow$	-1 ‖

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^3 - 6\sqrt{2} + 3 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 3 = -4\sqrt{2} + 3$
$\approx -2,6$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$.

Sur $]0, \sqrt{2}[$:

- f est continue car dérivable.
- f est strict. $\searrow$.
- 0 est VI pour f car $-4\sqrt{2}+3 < 0 < 3$

Donc d'après le CTVI l'équa° $f(x) = 0$ admet une unique sol° α avec $\alpha \in]0 ; \sqrt{2}[$.

Enfin, sur $[\sqrt{2} ; 2[$:

D'après le tableau de varia° :

Si $\sqrt{2} \leq x < 2$ alors $f(x) \leq -1 < 0$.

Donc $f(x) = 0$ n'admet aucune sol° sur $[\sqrt{2} ; 2[$.

Conclusion : $f(x) = 0$ a une unique sol° sur $]0 ; 2[$. On la note α.

d est sol° de $x^3 - 6x + 3 = 0$ sur $]0 ; \sqrt{2}[$ car $d^3 - 6d + 3 = 0$ et $0 < d < 2$.

Or l'équa° $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique sol° α sur $]0 ; 2[$.

Donc $d = \alpha$.

b) Avec la machine :

Pas de 0,01 :

x	$f(x)$
0,52	0,02
0,53	-0,03

$0,52 < d < 0,53$

La bille a un diamètre compris entre 0,52 dm et 0,53 dm.

→ Donner la valeur approchée de $d = \alpha$ au centième près :

<u>Rappel</u> : a est une valeur approchée d'un réel x à 10^{-2} près, si $|x - a| \leq 10^{-2}$

Pour ce faire, on encadre α à 10^{-3} près :

$0,523 < \alpha < 0,524$

Donc $\alpha \approx 0,52$ à 10^{-2} près.

Exercice III (*métropole 2022*)

g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = (-0,15x+2,2)e^{0,2x} - 2,2$.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x+0,29)e^{0,2x}$.

c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0,15x+2,2) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,2x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

Donc par limite de composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0,2x} = +\infty$.

Donc par limite de produit et somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

b) $g(x) = (-0,15x+2,2)e^{0,2x} - 2,2 = u(x) \times v(x) - 2,2$ avec $\begin{cases} u(x) = -0,15x+2,2 \\ u'(x) = -0,15 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{0,2x} \\ v'(x) = 0,2e^{0,2x} \end{cases}$

Donc $g'(x) = u'v + uv' = -0,15 e^{0,2x} + (-0,15x+2,2)\,0,2e^{0,2x}$

$g'(x) = e^{0,2x}(-0,15 + 0,2(-0,15x+2,2))$

$g'(x) = e^{0,2x}(-0,15 + 0,3x + 0,44)$

$g'(x) = (-0,03x+0,29)e^{0,2x}$

c) Étudions le signe de $g'(x)$ sur $[0; +\infty[$:

Or $\forall x \in [0; +\infty[$, $e^{0,2x} > 0$.

Donc $g'(x)$ a le m̂ signe que $-0,03x + 0,29$.

Donc $g'(x) \geqslant 0 \iff -0,03x + 0,29 \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{-0,29}{-0,03} \iff x \leqslant \frac{29}{3}$.

x	0		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

Grâce au tableau, g admet un maximum sur $[0; +\infty[$ atteint lorsque $x = \frac{29}{3}$.
Ce maximum est $M = g\left(\frac{29}{3}\right) = \left(-0,15 \times \frac{29}{3} + 2,2\right)e^{0,2 \times \frac{29}{3}} - 2,2$

$M \approx 2,98$ à 10^{-2} près.

d) $g(0)=0$ et g croît sur $[0;\frac{23}{3}]$ donc pas de sol° à $g(x)=0$ sur $]0;\frac{23}{3}]$.

Sur $[\frac{23}{3};+\infty[$:

- g est continue sur cet intervalle car dérivable.
- g est strict. $\searrow$ sur $[\frac{23}{3};+\infty[$.
- $0 \in]-\infty; M]$ car $M \simeq 2,98$.

Donc d'après le CTVI $g(x)=0$ admet une unique sol° sur $[\frac{23}{3};+\infty[$.

Notons la α : $g(\alpha)=0$

Grâce à la machine et méthode des balayages.

<u>Pas de 0,1</u>

x	$g(x)$
13,7	0,05
13,8	-0,146

$13,7 < \alpha < 13,8$

<u>Pas de 0,01</u>

x	$g(x)$
13,72	0,08
13,73	-0,011

$13,72 < \alpha < 13,73$

<u>Pas de 0,001</u>

x	$g(x)$
13,724	0,0033
13,725	-0,001

Donc : $13,724 < \alpha < 13,725$

Ainsi : $\alpha \simeq 13,72$ arrondi à 10^{-2} près.

IV – Algorithme de dichotomie

Méthode d'encadrement d'une solution à l'aide d'un algorithme de dichotomie

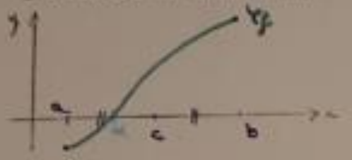
On considère une fonction f ***continue et strictement monotone sur*** $[a ; b]$, avec $a \leq b$.

On suppose également que l'équation : $f(x) = 0$ ***admet une unique solution sur*** $[a ; b]$ que l'on ne sait pas déterminer explicitement par le calcul ! On note α cette solution.

Le principe de dichotomie (en grec signifie couper en deux) consiste à déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe α, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque itération.

Pour ce faire, on détermine le centre c de chacun des intervalles, et on teste si α est situé dans $[a ; c]$ ou $[c ; b]$:

Les dessins ci-dessous sont importants :



Si la solution est dans $[a ; c]$, on recommence successivement ce procédé appliqué à $[a ; c]$.

Si la solution est située dans $[c ; b]$, on recommence ce procédé appliqué à $[c ; b]$.

D'après le corollaire du T.V.I :

Si $f(a)\times f(c)<0$, alors α appartient à $]a ; c[$. → f(a) et f(c) de signes contraires.

Si $f(a)\times f(c)>0$, alors α appartient à $]c ; b[$. → f(a) et f(c) de m̂ signe.

En itérant cette procédure, on arrive rapidement à encadrer α à la précision voulue.

Algorithme de Dichotomie :

Demander à l'utilisateur a, b et ε (ε désigne l'amplitude de l'encadrement souhaité) $\varepsilon > 0$.

Tant que $b - a \geq \varepsilon$

Affecter à c la valeur $\frac{a+b}{2}$.

Si $f(a)\times f(c)<0$

Alors

Affecter à b la valeur c

Sinon

Affecter à a la valeur c.

Fin de Si

Fin de Tant que

Sortie : Afficher a et b.

Application

On considère l'équation : $x^3 + 5x + 7 = 0$.

On admet que cette équation a une unique solution sur $[-2 ; -1]$ car la fonction f définie sur $[-2 ; -1]$ par : $f(x) = x^3 + 5x + 7$ est continue, strictement croissante sur $[-2 ; -1]$ et que $0 \in [f(-2) ; f(-1)]$ vu que $f(-2) = -11$ et $f(-1) = 1$.

$\exists! \alpha \in [-2;-1]$ tq $g(\alpha)=0$
↳ un unique

Avec Python **: avoir une valeur approchée à 10^{-n} près de l'unique solution α de l'équation $f(x)=0$: l'entier naturel n est choisi par l'utilisateur).**

```
def f(x):
    y=x**3+5*x+7  (-R) ni g(x)=8
    return y

def Dichotomie(n):
    a=-2
    b=-1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Utiliser ce programme, puis déterminer une valeur approchée de α à : 10^{-2} près ; 10^{-3} près. 10^{-4} près.

= -1,1171875

= -1,1201171875

= -1,11945 --

Attention, avant de modifier ce programme et l'appliquer à une autre fonction f, il faudra toujours commencer par prouver que f est continue sur $[a ; b]$, strictement monotone sur $[a ; b]$ et telle que l'équation : $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[a ; b]$!

On peut facilement adapter ce programme pour encadrer l'unique solution sur un intervalle donné d'une équation de la forme : $f(x) = k$ où k est un réel.