« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. » Victor Hugo

Chapitre VI | **Continuité et théorème des valeurs intermédiaires**

I – Continuité d'une fonction

A – Généralités sur la continuité

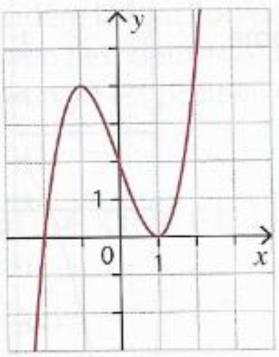
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à l'intérieur de I.

Définition : f est dite continue en a si et seulement si : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Ou encore, f est continue en a si et seulement si $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$.
En français, f est continue en a si et seulement si f admet une limite ***finie*** en a égale à $f(a)$.

f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel a appartenant à I.

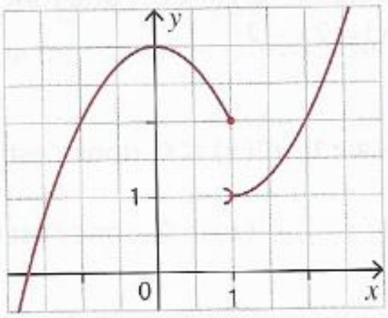
Illustration graphique de la notion de continuité

• f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x + 2$.



f est continue sur $\mathbb{R}$.

• f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Montrons que f n'est pas continue en 1 :

Dans le second exemple, f n'est pas continue en 1, et donc f est non continue sur $\mathbb{R}$.

Concrètement, la continuité de f sur I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut être tracée……………………………………………………………………………….

Remarque : le terme continuité n'a pas été choisi de façon anodine, il signifie qu'il n'y a pas de *« coupure »* dans le graphe de f.
Post bac, f est continue en a se quantifie en :

Exercice 1

La **fonction porte**, notée Π, est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}.$$

a) Dans un repère, tracer la courbe de la fonction Π.
b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction Π est-elle continue ?

Propriété (admise)

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$; $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- Sur chaque intervalle où elle est définie, une fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) est continue.
- De façon générale, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et k est un réel, alors les fonctions $kf + g, fg, f^n$ (n entier naturel non nul) sont continues sur I ; $\frac{f}{g}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
- Si f : I $\to \mathbb{R}$ est continue en $a \in$ I et si g : J $\to \mathbb{R}$ est continue en $f(a) \in$ J, alors $g \circ f$ est continue en a.

De façon générale, la notion de continuité se transmet en faisant de l'algèbre sur des fonctions continues au départ.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \; si \; x < 1 \\ x^2 + a \; si \; x \geq 1 \end{cases}$. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue en 1.

✂---

***Théorème* (être dérivable implique être continue)**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.

1) Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2) La réciproque est fausse !

Preuve : 1) Pour h non nul : $f(a+h) = f(a) + \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\, h$ permet de conclure instantanément !

En effet :

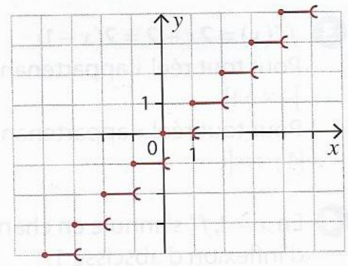
2) La fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 !

Comme cette année on ne manipule presque exclusivement que des fonctions dérivables, ces fonctions à disposition sont donc continues !

Il existe cependant des fonctions non continues (on dit discontinues) en un réel a.

A titre culturel, donnons un exemple de fonction discontinue en plusieurs valeurs :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.



Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Dans un tableau de variations, une flèche sans coupure sur un intervalle indique la continuité de la fonction en question sur cet intervalle.

__Complément__ : au chapitre 1, nous avons appris à dériver les fonctions composées.
Voici une preuve du théorème de dérivation des fonctions composées :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout réel x appartenant à I, on ait $u(x)$ qui appartienne à J.

Si u est dérivable sur l'intervalle I et f est dérivable sur J, alors la fonction $g = f \circ u$ est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a :

♥♥♥ $g'(x) = (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$. ♥♥♥

Preuve: Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I.

On calcule le taux d'accroissement de $f(u)$ entre a et $a + h$.

$$\frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

De plus :

— La fonction u est continue sur I donc en a et on a :

$$\lim_{h \to 0} u(a+h) = u(a) \iff \lim_{h \to 0} u(a+h) - u(a) = 0.$$

— La fonction f étant dérivable sur J, elle est dérivable en $u(a) \in J$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)} \underset{H = u(a+h) - u(a)}{=} \lim_{H \to 0} \frac{f\big(u(a) + H\big) - f\big(u(a)\big)}{H} = f'\big(u(a)\big).$$

— Enfin, la fonction u est dérivable en a donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

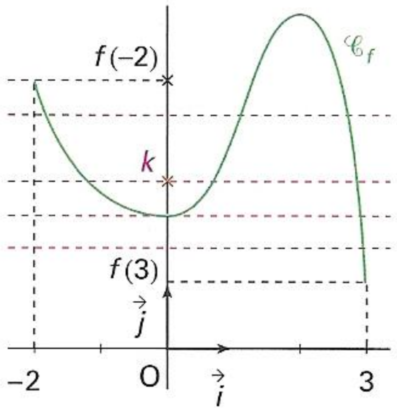
En conclusion, d'après les théorèmes sur les limites de produits :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = u'(a) \times f'\big(u(a)\big).$$

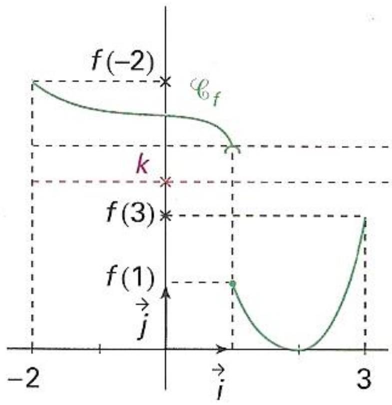
La fonction $f(u)$ est donc dérivable en $a \in I$ quelconque donc sur I tout entier.

II – Le théorème des valeurs intermédiaires et ses innombrables conséquences

Approche graphique :



f est continue sur $[-2\ ;3]$. Pour tout réel k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.



f est définie sur $[-2\ ;3]$ mais elle n'est pas continue sur $[-2\ ;3]$. Il existe des réels k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

♥♥♥ ***Théorème des valeurs intermédiaires*** ***(noté T.V.I.)*** ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est continue sur $[a\ ;b]$, alors, pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Illustration

On admet ce théorème qui est assez intuitif, dont la preuve est difficile !

Mnémo : ♥♥♥ On retiendra que **si f est définie et continue sur $[a\ ;b]$, alors f prend *AU MOINS* une fois toute valeur intermédiaire k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.** ♥♥♥

Remarque : L'équation $f(x) = k$ où k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\ ;b]$. On ne sait pas lequel des deux réels $f(a)$ et $f(b)$ est le plus grand, donc lorsqu'on dit compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ne pas croire que $f(a)<f(b)$!

Le *T.V.I* va donc permettre de « *prévoir* » l'existence de solution(s) pour une équation donnée, sur un intervalle.

Application 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-2\ ;2]$.

Application 2

Montrer que l'équation : $e^{3x+1} = x+4$ a au moins une solution sur [-5 ; 0].

Application 3 (*principe de Bolzano, important*)

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$.

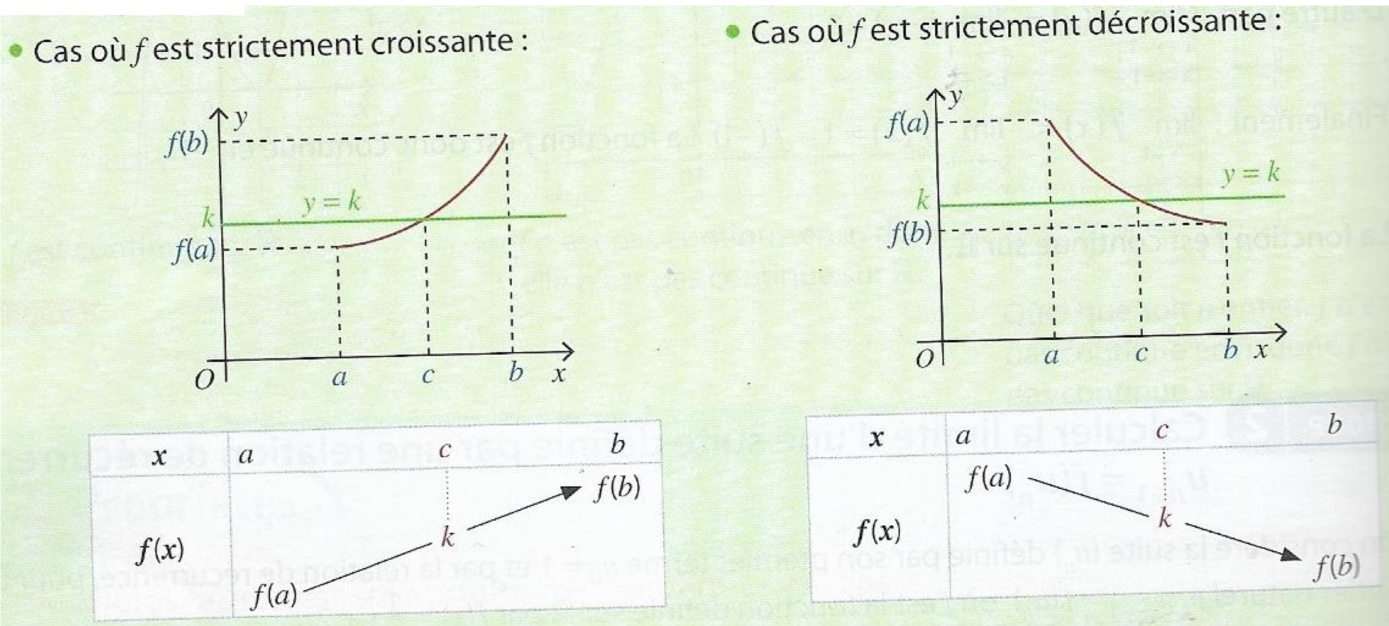
Corollaire du T.V.I* : *(capital, c'est de lui dont on se servira fréquemment en terminale).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est *continue* sur $[a\,;b]$, et si f est *strictement monotone* sur $[a\,;b]$ (c'est-à-dire f est strictement croissante sur $[a\,;b]$ ou f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$), alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a\,;b]$.

Preuve :

Illustration



Remarques importantes

Trois conditions sont nécessaires pour pouvoir appliquer ce corollaire du T.V.I :

1) **……………………………………………………………………………………………………**

2) **……………………………………………………………………………………………………**

3) **……………………………………………………………………………………………………**

Le corollaire du ***T.V.I.*** **s'applique aussi sur un intervalle de la forme : [*a* ; *b*[;]*a* ; *b*[;]*a* ; *b*] ; [*a* ; +∞[;]*a* ; +∞[;]-∞ ; *b*[;]-∞ ; *b*].**

Si l'intervalle est ouvert en une borne *a* ou *b* est ouverte, alors <u>on remplace l'image *f(a)* ou *f(b)* par la *LIMITE* de *f* en cette borne</u> ; si une borne de l'intervalle est -∞ (ou +∞), alors on considère la limite de *f* en -∞ (ou en +∞).

💣 Pour un intervalle, la borne écrite à gauche est toujours inférieure à celle écrite à droite : ainsi écrire 0 appartient à [4 ; −2], ou encore 1 appartient à]+∞ ; 0[sont des inexactitudes. 💣

Exercice graphique

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = 2$ *sur*]0 ; 1].

b) $f(x) = 0$ *sur*]0 ; +∞[

c) $f(x) = 0{,}5$ *sur* [1 ; e^2] puis sur]0 ; +∞[.

d) $f(x) = -1$ *sur*]0 ; +∞[

✂---

Exercice 2

f est définie sur [0 ; 2] par : $f(x) = -x^3 - x + 3$.

a) Démontrer que *f* est strictement décroissante sur [0 ; 2] et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution sur [0 ; 2].

✂---

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x - 2$.

a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.
c) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α.
d) Encadrer α à : l'unité près, puis au dixième près, puis à 10^{-2} près à l'aide de votre calculatrice. (Méthode des balayages successifs).
e) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Bien retenir cette façon de faire pour déterminer le signe des valeurs prises par une fonction sur un intervalle.

✂---

Exercice 4

f est la fonction définie sur $[-10 \; ; \; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^x - 3$.

En détaillant les étapes de votre démarche, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

✂---

Remarques : *T. V. I* et son corollaire ***permettent de montrer l'existence et /ou l'unicité de(s) solution(s) à une équation donnée,*** sur un intervalle donné, mais néanmoins, ces gros théorèmes ***ne permettent pas de savoir combien vaut chaque solution (valeur exacte).***

On se contentera, dans les exercices, de donner une valeur approchée de chaque solution, avec la précision que l'on nous demandera. L'utilisation d'une calculatrice sera nécessaire.

III- Continuité et suite récurrentes

Propriété (*admise*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I.
Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

1) Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

2) Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, *où f est continue sur I.*

Si (u_n) converge vers $L \in I$, alors L est solution de l'équation *:* ....

Schéma : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$ dès que f est continue en a où $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0 \; ; \; 2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$.

Etudier le sens de variation de f sur $[0 \; ; \; 2]$ et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) En déduire que (u_n) converge, puis calculer sa limite.

Exercices de synthèse

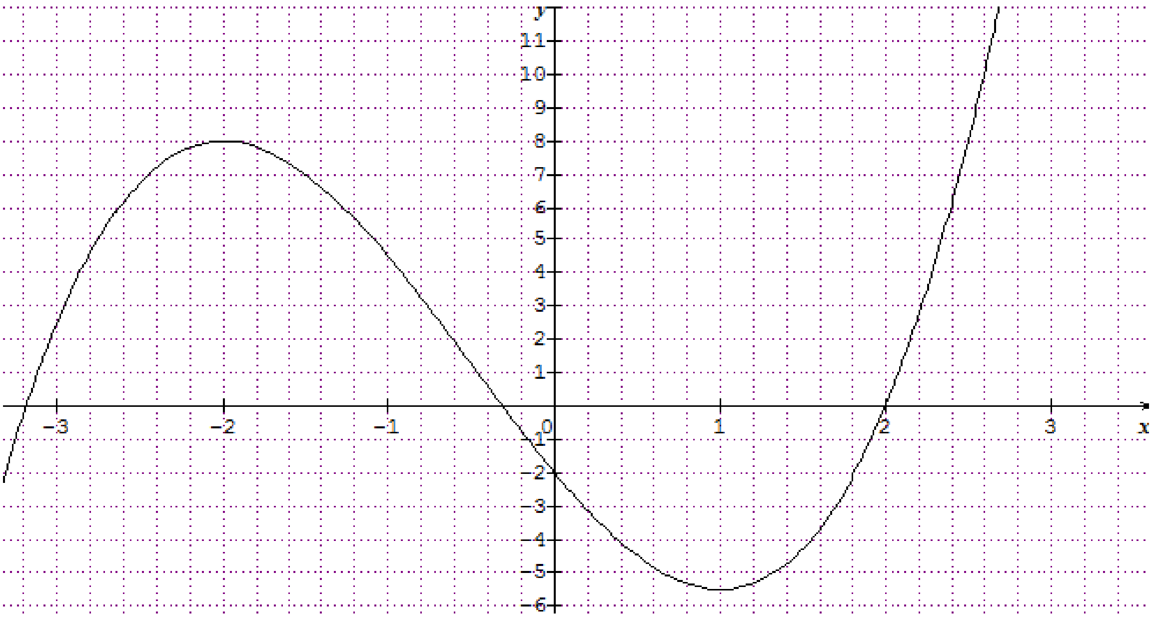
Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x - 2$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O ; I ; J).

Le but de l'exercice est de chercher s'il existe des tangentes à C_f passant par le point O.

0) Conjecturer graphiquement si le problème posé admet des solutions, le cas échéant, préciser combien.



1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a de C_f passe par l'origine du repère si et seulement si : $f(a) - af'(a) = 0$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Etudier le sens de variation de g sur ∞, et dresser son tableau de variation complet.

d) Démontrer que la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$. On note α cette valeur.

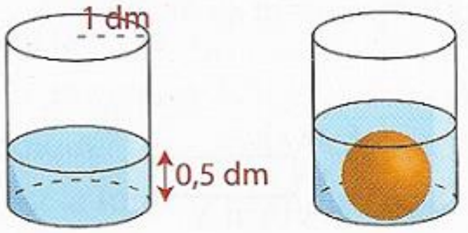
e) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près, puis la valeur approchée de α au dixième près.

f) Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre alors le problème posé en début d'énoncé.

Exercice II

Un vase cylindrique de base un disque de rayon 1 dm, contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.
On plonge une bille de diamètre d dm dans ce cylindre et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.



1. a) Exprimer en fonction de d le volume, en dm^3 :
- d'eau versé initialement,
- de la bille.

b) Exprimer de deux façons différentes le volume du cylindre de hauteur d contenu dans le vase après avoir plongé la bille.

c) En déduire que d vérifie $0 < d < 2$ et :

$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$

2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;2[$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du diamètre d de la bille.

Exercice III **(*métropole* 2022)**

g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = (-0,15x+2,2)\mathrm{e}^{0,2x} - 2,2$.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x+0,29)\mathrm{e}^{0,2x}$.

c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

IV – Algorithme de dichotomie

Méthode d'encadrement d'une solution à l'aide d'un algorithme de dichotomie

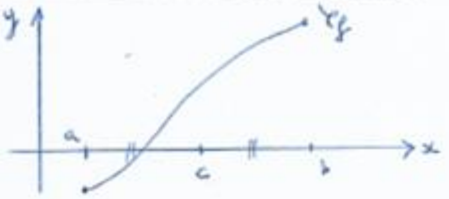
On considère une fonction f ***continue et strictement monotone sur*** $[a\,;b]$, avec $a \leq b$.

On suppose également que l'équation : $f(x) = 0$ ***admet une unique solution sur*** $[a\,;b]$ que l'on ne sait pas déterminer explicitement par le calcul ! On note α cette solution.

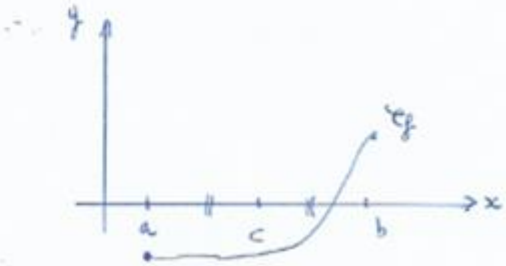
Le principe de dichotomie (en *grec* signifie couper en deux) consiste à déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe α, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque itération.

Pour ce faire, on détermine le centre c de chacun des intervalles, et on teste si α est située dans $[a\ ;\ c]$ ou $[c\ ;\ b]$:

Les dessins ci-dessous sont importants :



Si la solution est dans $[a\ ;\ c]$, *on recommence recommence* ce procédé appliqué à $[a\ ;\ c]$.



Si la solution est située dans $[c\ ;\ b]$, *on recommence* ce procédé appliqué à $[a\ ;\ c]$.

D'après le corollaire du T.V.I :

Si $f(a)\times f(c)<0$, alors α appartient à $]a\,;c[$.

Si $f(a)\times f(c) >0$, alors α appartient à $]c\,;b[$.

En itérant cette procédure, on arrive rapidement à encadrer α à la précision voulue.

Algorithme de Dichotomie :

Demander à l'utilisateur a, b et e (e désigne l'amplitude de l'encadrement souhaité) $e>0$.

Tant que $b-a \geq e$

Affecter à c la valeur $\frac{a+b}{2}$.

Si $f(a)\times f(c)<0$

Alors

Affecter à b la valeur c

Sinon

Affecter à a la valeur c.

Fin de Si.

Fin de Tant que

Sortie : Afficher a et b.

__Application__

On considère l'équation : $x^3 + 5x + 7 = 0$.

On admet que cette équation a une unique solution sur $[-2\,;-1]$ car la fonction f définie sur $[-2\,;-1]$ par : $f(x) = x^3 + 5x + 7$ est continue, strictement croissante sur $[-2\,;-1]$ et que $0\in[f(-2)\,;f(-1)]$ vu que $f(-2) =-11$ et $f(-1) = 1$.

__Avec Python__ **: avoir une valeur approchée à 10^{-n}** près de l'unique solution α de l'équation *f*(*x*)=0 : l'entier naturel *n* est choisi par l'utilisateur).

```
def f(x):
    y=x**3+5*x+7
    return y

def Dichotomie(n):
    a=-2
    b=-1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Utiliser ce programme, puis déterminer une valeur approchée de α à :10^{-2} près ; 10^{-4} près.
10^{-4} près.

Attention, avant de modifier ce programme et l'appliquer à une autre fonction *f*, il faudra toujours commencer par prouver que *f* est continue sur [*a* ; *b*], strictement monotone sur [*a* ; *b*] et telle que l'équation : *f*(*x*) = 0 admet une seule solution sur [*a* ; *b*] !

On peut facilement adapter ce programme pour encadrer l'unique solution sur un intervalle donné d'une équation de la forme : *f*(*x*) = *k* où *k* est un réel.