Chapitre 6 — Les suites numériques

I – Introduction

Compléter, de façon logique, les listes de nombres suivantes :

a) 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 ; 22 (+3)

b) 0,25 ; 1 ; 4 ; 16 ; 64 ; 256 (×4)

c) 2 ; 1 ; – 1 ; – 5 ; – 13 ; – 29 ; – 61 (–1, –2, –4, –8, –16, –32)

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ⇒ Suite de Fibonacci

I – Définitions et notations

- On appelle suite numérique, toute <u>fonction définie sur ℕ</u> (ou une partie de ℕ) et <u>à valeurs réelles</u>.
  ensemble des entiers naturels ↳ {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ...}

  Notant U une telle fonction, on a : $U: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to U(n)$

  Par commodité, et surtout, pour la distinguer d'une fonction définie sur un intervalle de ℝ, on notera U_n [lire u indice n] à la place de $U(n)$.

- On a donc, par <u>convention d'écriture</u>, $\boxed{U_n = U(n)}$

- A présent, la suite $U: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to U_n$ sera notée $(U_n)_{n\in N}$ ou encore, (U_n). ← ts les termes de la suite !

- Le nombre U_n est appelé le terme de rang n (↳ entier), ou encore le terme général de cette suite.

Associer aux énumérations des deux premiers exemples de l'introduction une suite sous forme de tableau :

a) (U_n) avec

n	0	1	2	3	4	5
U_n	1	4	7	10	13	16

$U_n = 3n + 1$

b)

n	0	1	2	3	4	5
V_n	0,25	1	4	16	64	256

$V_n = 0{,}25 \times 4^n$ pr tt entier naturel

Remarque : Pour une suite, parler de $\cancel{U_{2,8}}$ n'a aucun sens.

♥ Si elle est définie sur ℕ, U_0 est appelé le premier terme de la suite (U_n).
♥ Si elle est définie pour tout entier naturel n non nul (↳ ℕ*), U_1 est le premier terme de la suite (U_n).

Exemple 1

1) Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $U_n = 2n + 4$.

Calculer U_0 ; U_1 ; U_2

2) Exprimer U_{n+1} en fonction de n.

3) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \dfrac{1}{n}$. Sur quel ensemble cette suite est-elle définie ? Combien vaut son premier terme ? Comment le notez-vous ?

1) Pour tout entier naturel n, $\boxed{U_n = 2n + 4}$ *

Rq: le n en indice et le n de $2n+4$ désigne la m̂ valeur.

Faisons $n=0$ ds * : $U_0 = 2\times 0 + 4 = 4$.

Faisons $n=1$ ds * : $U_1 = 2\times 1 + 4 = 6$.

Faisons $n=2$ ds * : $U_2 = 2\times 2 + 4 = 8$.

2) $U_{n+1} = 2(n+1)+4 = 2n+2+4 = 2n+6$.

3) $V_n = \frac{1}{n}$

$\underbrace{(V_n)}_{\text{la suite}}$ est définie sur $\mathbb{N}^* = \{1; 2; \dots\}$

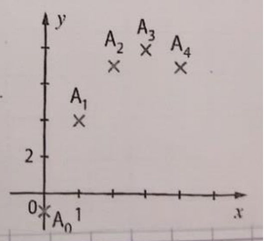
$n \neq 0$ ici à cause du dénominateur !

V_1 est le premier terme de cette suite :

$V_1 = \frac{1}{1} = 1$.

Une suite (u_n) peut être représentée graphiquement par un nuage de points A_n de coordonnées $(n\,;u_n)$ où n est entier naturel (éventuellement non nul) :

EXEMPLE : La représentation graphique ci-contre est celle des premiers termes de la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n^2 + 6n - 1$. Comme $u_0 = -1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 8$, $u_4 = 7$, …, on obtient les points $A_0(0\,;-1)$, $A_1(1\,;4)$, $A_2(2\,;7)$, $A_3(3\,;8)$, $A_4(4{,}7)$.

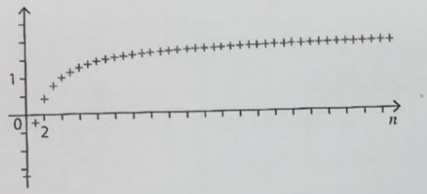


Exemple 2

(u_n) est définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$,
pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exemple 3

(v_n) est définie par $v_n = \dfrac{4n-5}{2n+3}$,
pour tout entier naturel n.



2- Suites définies explicitement

Lorsque l'on connaît l'expression $U_n = f(n)$, où f est une fonction donnée, on dira que la suite (U_n) est définie explicitement.

Cela signifie, que l'on peut calculer d'un seul coup, pour n'importe laquelle des valeurs de l'entier n, la valeur de U_n.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = 2n^2 + n + 3$. où f est la fonc° trinôme définie par : $f(x) = 2x^2 + x + 3$.

1) Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2) Calculer le terme de rang 6 de cette suite, puis le dixième terme de cette suite.
3) Exprimer u_{n+1} en fonction de n. Même question pour $u_n + 1$. A-t-on $u_{n+1} = u_n + 1$?
4) Exprimer u_{2n} en fonction de n.

1) On cherche ici à calculer U_0 ; U_1 et U_2 !!

$U_0 = 2 \times 0^2 + 0 + 3 = 3.$
$U_1 = 2 \times 1^2 + 1 + 3 = 6.$
$U_2 = 2 \times 2^2 + 2 + 3 = 13.$

2) $U_6 = 2 \times 6^2 + 6 + 3 = 81.$

Le dixième terme de la suite est U_9 car la suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$!
$U_9 = 2 \times 9^2 + 9 + 3 = 174.$

3) $U_{n+1} = 2(n+1)^2 + n + 1 + 3 = 2(n^2 + 2n + 1) + n + 4 = 2n^2 + 4n + 2 + n + 4$
$U_{n+1} = 2n^2 + 5n + 6.$

$U_n + 1 = 2n^2 + n + 3 + 1 = 2n^2 + n + 4.$

Donc $U_{n+1} \neq U_n + 1$!

4) $U_{2n} = 2 \times (2n)^2 + 2n + 3 = 2 \times 4n^2 + 2n + 3 = 8n^2 + 2n + 3.$

Exemple 2

Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par : $v_n = \sqrt{n-2}$.

Ici : $V_2 \rightarrow 1^{er}$ terme de la suite (V_n) : $V_2 = \sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0.$
$V_3 \rightarrow 2^{ième}$ terme de la suite (V_n) : $V_3 = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1.$
$V_4 \rightarrow 3^{ième}$ terme de la suite (V_n) : $V_4 = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}.$

Voici une fonction Python qui permet de calculer u_n pour l'entier n de votre choix, lorsque (u_n) est définie par : $u_n = n^3 - 4n^2 + n - 1$.

```
def u(n):
    return n**3-4*n**2+n-1
```

* : multiplie

** : puissance

En tapant dans la console : $u(3)$ on obtient le terme u_3 = -7

Voici un tutoriel (à **travailler seul et à maîtriser**) pour calculer sur sa calculatrice *TI* et faire apparaître sous forme d'une table, <u>les termes d'une suite définie explicitement</u> :

https://www.youtube.com/watch?v=bvXdeTRQrD0

Faire une table de valeurs de la suite précédente sur sa TI.

n	$U(n) = U_n$
0	-1
1	-3
2	-7
3	-7
4	3
5	29

3 – Suites définies par une relation de récurrence

On peut aussi générer une suite en calculant ses termes de proche en proche, c'est-à-dire la définir par la donnée de son premier terme, et par une relation de récurrence, c'est-à-dire une égalité reliant deux termes consécutifs quelconques de cette suite :

Exemple

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 4$, et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 3U_n - 1$.
Calculer U_1, U_2, U_3. Comprenez-vous la terminologie de proche en proche ou encore, par récurrence ?

$U_0 = 4$

Pour tout entier naturel n : $\boxed{U_{n+1} = 3U_n - 1}$ *

Suite définie par une relaᵒ de récurrence.

Pour $n = 0$ ds * : $U_{0+1} = 3U_0 - 1$

$U_1 = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$.

Pour $n = 1$ ds * : $U_{1+1} = 3U_1 - 1$

$U_2 = 3 \times 11 - 1 = 32$.

Pour $n = 2$ ds * : $U_{2+1} = 3U_2 - 1$

$U_3 = 3 \times 32 - 1 = 95$.

On calcule donc les termes successifs de cette suite de proche en proche.

__Remarques__ : Dans l'exemple précédent, est-il aisé de calculer U_{2023} ? Pourquoi ?

Non car il aurait fallu calculer d'abord la valeur de ts les termes précédents : U_1 ; U_2 ; U_3 ; .....

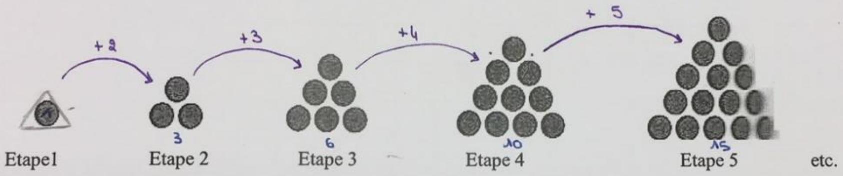
U_{n+1} est appelé le terme successeur au terme U_n.

__*Exercice 1*__

1a) Définir de façon explicite la suite des entiers naturels pairs, puis définir cette même suite par une relation de récurrence.

1b) Définir la suite correspondant à l'énumération : 0,25 ; 1 ; 4 ; 16 ; 64.......par son premier terme et une relation de récurrence.

2) Soit n un entier naturel non nul, et u_n le nombre de points composant le motif triangulaire à l'étape n :



Définir la suite (u_n) par son premier terme et une relation de récurrence.

3) Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n) + 2$.

Calculer v_2.

4) Chaque année, une ruche perd 40 % de ses abeilles, et l'apiculteur remet 10000 nouvelles abeilles dans la ruche chaque année.
En 2022, la ruche contenait 50000 abeilles. On note u_n le nombre d'abeilles en l'année $2022 + n$.

a) Combien vaut u_0 ?

b) Calculer la valeur exacte de u_1.

c) Déterminer une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

1a) 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ...

*) Pr tt entier naturel n : $U_n = 2n$: Forme explicite.

**) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \text{Pour tt entier naturel : } U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$: (U_n) est définie par une rela° de récurrence.

1b) 0,25 ; 1 ; 4 ; 16 ; 64 ; 256

$V_0 = 0,25$ et pr tt entier naturel n : $V_{n+1} = 4V_n$

2) $\begin{cases} U_1 = 1 \\ \text{Pour tt entier } n \text{ non nul : } U_{n+1} = U_n + n + 1 \end{cases}$

3) $V_0 = \frac{3}{2}$

$\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}}_{\text{pr tt entier naturel } n}, V_{n+1} = 2V_n(1 - V_n) + 2$

Pour $n = 0$: $V_{0+1} = 2V_0(1 - V_0) + 2$

$V_1 = 2 \times \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) + 2$

$V_1 = 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 2$

$V_1 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$

Pour $n = 1$: $V_{1+1} = 2V_1(1 - V_1) + 2 = 2 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{5}{2}$

$V_2 = \frac{5}{2}$

4) a) $U_0 = 50000$ (nb d'abeilles en $2022 + 0 = 2022$)

b) U_1 = nb d'abeilles en 2023.

Baisser de 40 % une quantité revient à multiplier cette dernière par $CM = 1 - \frac{40}{100} = 0,6$.

$U_1 = \underbrace{50000 \times 0,6}_{\text{abeilles en vie}} + \underbrace{10\,000}_{\text{rajout}} = 40\,000$

c) Pr tt entier naturel n : $\underbrace{U_{n+1}}_{\text{nb d'abeilles en l'an } 2022+n+1} = \overbrace{\boxed{0{,}6U_n}}^{\text{abeilles survivantes}} + \underbrace{10\,000}_{\text{rajout d'abeilles}}$

Exercice 2

1) Calculer sous forme de fraction irréductible les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$$ pr tt entier naturel n.

2) Même question avec la suite (v_n) définie par :
$v_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n - n + 4$.

1) $U_0 = 5$

$n=0 \rightarrow U_1 = \dfrac{2U_0}{U_0+1} = \dfrac{2\times 5}{5+1} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.

$n=1 \rightarrow U_2 = \dfrac{2U_1}{U_1+1} = \dfrac{2\times\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}+1} = \dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}} = \dfrac{10}{3}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$.

$n=2 \rightarrow U_3 = \dfrac{2U_2}{U_2+1} = \dfrac{2\times\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}+1} = \dfrac{\frac{10}{4}}{\frac{9}{4}} = \dfrac{10}{9}$.

2) $V_1 = V_0 - 0 + 4 = 4 + 4 = 8$. $\rightarrow n = 0$

$V_2 = V_1 - 1 + 4 = 8 - 1 + 4 = 11$. $\rightarrow n = 1$

$V_3 = V_2 - 2 + 4 = 11 - 2 + 4 = 13$. $\rightarrow n = 2$

Voici un tutoriel (à **travailler seul** et à maîtriser) pour calculer sur sa calculatrice *TI* et faire apparaître sous forme d'une table, les termes d'une suite définie par une relation de récurrence :

https://www.youtube.com/watch?v=D5OAi2_h_bw

Retrouver les résultats de la question 1) de l'exercice ci-dessus.

Calcul des termes d'une suite récurrente à l'aide d'un algorithme

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

En utilisant une boucle Pour, cela se fait sans problème :

En pseudo code :

Une fois l'entier N choisi par l'utilisateur :

```
U← 1
Pour K variant de 1 à N,
 U←2U+3
Fin
Afficher U
```

K vaut successivement 1 puis 2,… jusqu'à N inclu : K prend donc N valeurs.

K : compteur de boucles

La variable K est un compteur de boucle : on demande à la machine de répéter N fois une même instruction, ici remplacer la valeur stockée dans U par $2U+3$.
Comme $U = 1$ au départ correspond à la valeur de $u_0 = 1$ de la suite (u_n), après N itérations (=répétitions) de l'instruction, on obtient en sortie la valeur u_N cherchée.

Avec Python :

```
def u(n):
    u=1
    for k in range (n):
      u=2*u+3
    return u
```

u=1 ← valeur initiale de (U_n) à savoir celle de U_0

for k in range (n): pour K variant

ou encore

```
def u(n):
    u=1
    for k in range(1,n+1):
        u=2*u+3
    return u
```

$1 \leq k < n+1$

Remarque :

L'instruction : *for k in range (n)* signifie que l'entier k vérifie la condition : $0 \leq k < n$, et prend successivement les valeurs 0 ; 1 ; ….. et pour dernière valeur $n-1$. Donc k prend successivement n valeurs.

Attention dans l'inégalité : $0 \leq k < n$, la valeur n est exclue !

On utilise encore plus fréquemment l'instruction : *for k in range (0, n)* qui signifie que l'entier k vérifie la double inégalité : $0 \leq k < n$.

Pour afficher ***tous les termes jusqu'à celui de rang n*** d'une suite, on utilise des listes :

Par exemple, considérons la suite définie par :

$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$.

L'algorithme ci-dessous, à retenir, génère en sortie les termes : $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$ où n est choisi par l'utilisateur.
En pseudo code :

$A \leftarrow 0$	..........> Initialement A prend la valeur 0 car $u_0 = 0$.
$L \leftarrow [A]$	..........> Au départ, la liste L contient seulement l'élément u_0.
Pour k variant de 1 à n	...........> On répète n fois une même instruction
$A \leftarrow A^2 - 5$	...........> On calcule un terme à partir du précédent contenu dans A
$L \leftarrow L + [A]$	............> Le terme calculé à l'étape précédente est inséré dans la liste L.
Fin de pour	
Retourner L	....> En fin du programme, L contient ***tous*** les termes de la suite, ***de*** u_0 ***à*** u_n .

Pour $k = 1$: $A = 0^2 - 5 = -5$

$L = [0 ; -5]$ avec $0 = u_0$ et $-5 = u_1$

Pour $k = 2$: $A = (-5)^2 - 5 = 20$

$L = [0 ; -5 ; 20]$ avec $0 = u_0$, $-5 = u_1$ et $20 = u_2$

En Python :

```
def termes_u(n):
    A=0
    L=[A]
    for k in range (n):
        A=A*A-5
        L=L+[A]
    return(L)
```

ou encore :

```
def termes_u(n):
    A=0
    L=[A]
    for k in range (1,n+1):
        A=A*A-5
        L=L+[A]
    return(L)
```

Exemple

Dans l'algorithme ci-dessous, on note u_n la dernière valeur de la liste obtenue.

$A \leftarrow -1$
$L \leftarrow [A]$
Pour k variant de 1 à n
  $A \leftarrow 2A+3$
  $L \leftarrow L + [A]$
Fin de pour
Retourner L

a) L'utilisateur choisit $n = 2$. Déterminer le contenu de la liste L en sortie de programme.
b) Quel est le rôle de cet algorithme vis-à-vis d'une suite à définir ?

En Python :

```
def u(n):
    A = -1
    L = [A]
    for k in range (1, n+1) :
        A = 2*A + 3
        L = L + [A]
    Return (L)
```

$1 \leq k < n+1$

a) $n = 2$: → Donc boucle : for k in range $(1 ; \overbrace{2+1}^{3})$

k va prendre deux valeurs : 1 puis 2 !

$A = -1$

$L = [-1]$

Pour $k = 1$: $A = 2 \times (-1) + 3 = 1$

$L = [-1 ; 1]$

Pour $k = 2$: $A = 2 \times 1 + 3 = 5$

$L = [-1 ; 1 ; 5]$

Sortie : $L = [-1 ; 1 ; 5]$

b) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = -1$
et pour tout entier naturel : $U_{n+1} = 2U_n + 3$.

Ce programme permet d'afficher en sortie la liste des termes : $U_0, U_1 \dots$ jusqu'à U_n !

II – Sens de variation d'une suite

Définition (fondamentale, à mémoriser par cœur).

- Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite croissante lorsque pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} \geq U_n$ ou $U_n \leq U_{n+1}$
- Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite décroissante lorsque pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} \leq U_n$ ou $U_n \geq U_{n+1}$
- Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite constante lorsque pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = U_n$

Remarques

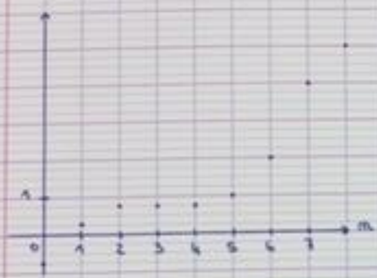
On dira qu'une suite est monotone, dès lors qu'elle est croissante ou décroissante.

Une suite est dite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) lorsque pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} > U_n$ (respectivement $U_{n+1} < U_n$).

Exemple d'illustration

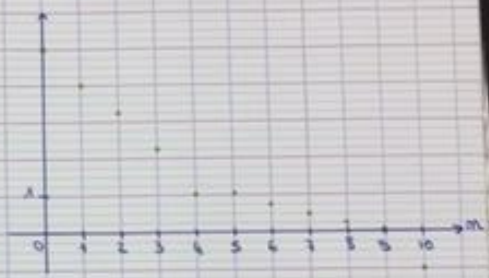
Tracez quatre nuages de points associés respectivement à :

a) Une suite croissante



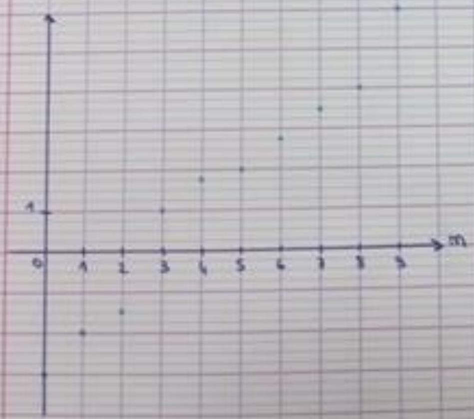
On autorise à un ou plus termes d'être égaux !

b) Une suite décroissante



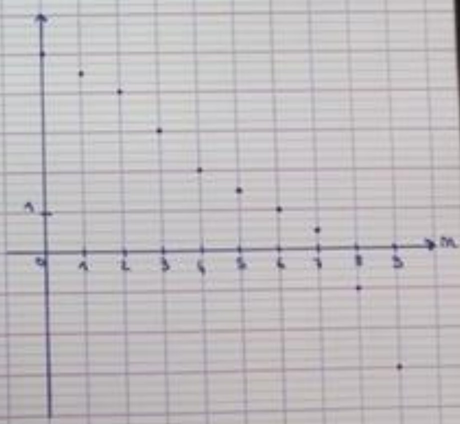
$u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3$ ...

c) Une suite strictement croissante



$u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ...

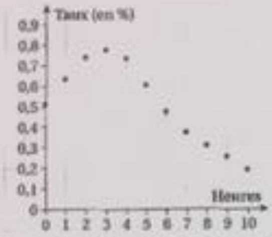
d) Une suite strictement décroissante



$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ...

Remarque

Le nuage de point ci-dessous est associé au pourcentage de bactérie dans le sang d'un animal.
On note (B_n) la suite des taux observés durant les dix premières heures.



La suite (B_n) est-elle monotone ? A partir de quel rang *noté* p **la suite (B_n) est-elle monotone** décroissante **?**

(B_n) n'est pas une suite monotone ! À partir du rang $p = 3$, (B_n) est décroissante !

Pour tout entier $n \geqslant 3$, (B_n) décroit.

On peut donc dire qu'une suite numérique (u_n) est croissante à partir du rang p, où $p \in \mathbb{N}$, si :

Pour tout entier $n \geqslant p$, on a : $U_{n+1} \geqslant U_n$

Une suite numérique (u_n) est décroissante à partir du rang p, où $p \in \mathbb{N}$, si :

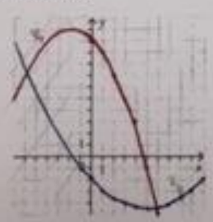
Pour tout entier $n \geqslant p$, on a : $U_{n+1} \leqslant U_n$

Attention **: pour une suite, ne pas être croissante ne signifie pas être décroissante !**

Contre-exemple : Pour tout entier naturel n : $U_n = (-1)^n$.

Exercice 3

On a représenté graphiquement ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g.



Conjecturer graphiquement le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$ pour tout entier naturel n.

→ Manifestement (U_n) a l'air décroissante.
(à partir du rang 0).

→ (V_n) n'est pas monotone.
Mais (V_n) semble être croissante à partir du rang 5
càd pr tt entier $n \geqslant 5$, $V_n \leqslant V_{n+1}$.

Des méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

1 – Méthode de la différence *(la plus fréquemment utilisée)*

Au vu de la définition précédente, et en se souvenant que pour des réels A et B, dire que $A > B$ équivaut à dire que $A - B > 0$, on a :

- Si pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n >$ 0, alors (U_n) est croissante.
- Si pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n <$ 0, alors (U_n) est décroissante.

Ainsi, pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on pourra étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, en laissant n entier quelconque.

Exemples importants

1) Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_n = n^2 - 2n + 5$

2) Etudier le sens de variation de la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{2n+5}{n+2}$

3) Etudier le sens de variation de la suite (W_n) définie par :
$W_0 = 4$, et pour tout entier naturel n, $W_{n+1} = W_n - 2$

4) Etudier le sens de variation de la suite (Z_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

5) Etudier le sens de variation de la suite (X_n) où $X_n = (n-5)^2$, $n \geqslant 5$

6) (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n^2 - 10$.
A partir de quel rang cette suite est-elle croissante ?

7) Une entreprise a modélisé ses émissions, en tonnes de CO_2, en l'année 2020 $+n$ où n est entier naturel, par la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 40000 \times 0{,}89^n + 13000$.

0) Que représente concrètement u_0 ?

a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

c) Comment interpréter ce résultat dans le cadre de la situation ici étudiée ?

1) Pour tout entier naturel : $U_n = n^2 - 2n + 5$.

Pour tout entier n : $U_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 5$
$U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 5$
$U_{n+1} = n^2 + 4$.

Pour tout entier n : $U_{n+1} - U_n = n^2 + 4 - (n^2 - 2n + 5)$

$$U_{n+1} - U_n = n^2 + 4 - n^2 + 2n - 5$$

$$U_{n+1} - U_n = 2n - 1$$

Étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$:
Résolvons l'inéquation :

$2n - 1 \geqslant 0 \iff 2n \geqslant 1 \iff n \geqslant \frac{1}{2}$, donc comme n est entier naturel, donc $n \geqslant 1$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$
Donc (U_n) est croissante à partir du rang 1.

2) Pour tout entier n : $V_n = \frac{2n+5}{n+2}$, donc $V_{n+1} = \frac{2(n+1)+5}{n+1+2} = \frac{2n+7}{n+3}$

Pour tt entier n : $V_{n+1} - V_n = \frac{2n+7}{n+3} - \frac{2n+5}{n+2}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(2n+7)(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(2n+5)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2n^2 + 4n + 7n + 14 - (2n^2 + 6n + 5n + 15)}{(n+3)(n+2)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2n^2 + 4n + 7n + 14 - 2n^2 - 6n - 5n - 15}{(n+3)(n+2)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}$$

Étudions le signe de $V_{n+1} - V_n$, càd celui de $\frac{-1}{(n+3)(n+2)}$:

$-1 < 0$
$n \in \mathbb{N}$, donc $n + 3 \geqslant 3 > 0$ et $n + 2 > 0$

Donc d'après la règle des signes d'un produit et quotient on a :

Pour tout entier n : $\frac{-1}{(n+3)(n+2)} < 0$

Donc $V_{n+1} - V_n < 0$

Donc (V_n) est strictement décroissante.

3) $W_0 = 4$ et pour tout entier n : $W_{n+1} = W_n - 2$

pour tt entier n : $W_{n+1} - W_n = -2$

$-2 < 0$, donc pr tt entier n : $W_{n+1} - W_n < 0$

donc (W_n) est strictement décroissante.

4) $n \in \mathbb{N}^*$

$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$: somme de n termes !

donc $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_{n+1} - Z_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$

Or $1 > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, donc $n+1 > 0$, donc $\frac{1}{n+1} > 0$, donc

$Z_{n+1} - Z_n > 0$.

Donc (Z_n) est strictement croissante.

5) Pour $n \geqslant 5$: $X_n = (n-5)^2$

$$X_{n+1} = (n+1-5)^2 = (n-4)^2$$

Donc pr tt entier $n \geqslant 5$:

$$X_{n+1} - X_n = (n-4)^2 - (n-5)^2 = (n-4+n-5)(n-4-(n-5))$$

$$X_{n+1} - X_n = 2n-9$$

Étudions le signe de $2n-9$:

Or $n \geqslant 5$, donc $2n \geqslant 10$
donc $2n-9 \geqslant 1$ (>0)

Par suite pr tt entier $n \geqslant 5$.

$$X_{n+1} - X_n > 0.$$

Donc (X_n) est strictement croissante à partir du rang 5.

6) $U_0 = 1$ et pr tt $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n + n^2 - 10$
$U_{n+1} - U_n = n^2 - 10$

On cherche à partir de quel rang n on a :

$U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ càd $n^2 - 10 \geqslant 0$
$n^2 \geqslant 10$
$\sqrt{n^2} \geqslant 10$ car $\sqrt{n^2}$ croît sur $[0, +\infty[$.
$n \geqslant \sqrt{10}$ car $\sqrt{n^2} = |n| = n$
car $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geqslant 0$.

Or $\sqrt{10} \approx 3,16$

$U_{n+1} - U_n \geqslant 0 \iff n \geqslant \sqrt{10} \iff n \geqslant 4$

(U_n) est croissante à partir du rang 4.

7) Pr tt entier naturel n :

$U_n = 40\,000 \times 0{,}89^n + 13000$ = masse en tonnes de CO_2 rejeté en 2020 + n

0) U_0 : masse de CO_2 rejeté en l'an 2020.

Rq : $U_0 = 40\,000 \times 0{,}89^0 + 13\,000 = 40\,000 \times 1 + 13000 = 53\,000$ T.

a) Pr tt n entier : $U_{n+1} = 40000 \times 0{,}89^{n+1} + 13000$

Donc $U_{n+1} - U_n = 40\,000 \times 0{,}89^{n+1} + 13000 - (40000 \times 0{,}89^n + 13000)$

$U_{n+1} - U_n = 40000 \times 0{,}89^{n+1} + 13\,000 - 40\,000 \times 0{,}89^n - 13000$

$U_{n+1} - U_n = 40\,000\,(0{,}89^{n+1} - 0{,}89^n)$

$a^{n+1} = a^n \times a$

$U_{n+1} - U_n = 40\,000\,(0{,}89^n \times 0{,}89 - 0{,}89^n)$

$U_{n+1} - U_n = 40\,000\,(0{,}89^n\,(0{,}89 - 1))$

$U_{n+1} - U_n = 40000 \times 0{,}89^n \times (-0{,}11) = -4400 \times 0{,}89^n$

b) $-4400 < 0$; $0{,}89 > 0$, donc $0{,}89^n > 0$ (produit de n facteurs positifs).

Donc $-4400 \times 0{,}89 < 0$ (règle des signes d'un produit).

Donc pr tt $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n < 0$, donc (U_n) décroît.

c) L'entreprise produit chaque année de moins en moins d'émissions de CO_2 (décroissance de (U_n)).

II – Méthode des quotients pour les suites à valeurs positives

Si pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

En effet :

① Si pour tout entier naturel : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est ...croissante...

Si pour tout entier naturel : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est ..décroissante...

① preuve : Si pour tout entier n : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$, alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} \times U_n \geqslant 1 \times U_n$ car $U_n > 0$

$U_{n+1} \geqslant U_n$: (U_n) est donc croissant.

La méthode des quotients n'est applicable qu'à des suites dont tous les termes sont strictement positifs. Il vous faudra systématiquement, si vous voulez utiliser cette méthode, vérifier ce dernier point !

Exercice 4

Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

b) $v_n = 4 \times 0{,}5^n$

a) Pour tout entier n : $U_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \frac{8^n}{9^n}$

$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$ avec $8 > 0$ donc $8^n > 0$

$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$ avec $9 > 0$ donc $9^n > 0$ donc $U_n > 0$ car quotient de deux positifs

Méthode des quotients : Pour tout entier n : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{8}{9}\right)^n}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1-n} = \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{9}$

Or $\frac{8}{9} < 1$, donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$. Donc (U_n) est strictement décroissante.

b) $4 > 0$ et $0,5 > 0$ donc $0,5^n > 0$
Donc pr tt entier n : $4 \times 0,5^n > 0$
$v_n > 0$

Donc pour tt $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4 \times 0,5^{n+1}}{4 \times 0,5^n} = \frac{0,5^{n+1}}{0,5^n} = 0,5^{n+1-n} = 0,5.$$

Or $0,5 < 1$, donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$.

Donc (v_n) décroît (strictement).

III – Les suites arithmétiques

a) Définition des suites arithmétiques par une relation de récurrence

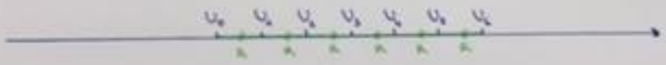
Définition : Une suite (U_n) est arithmétique, s'il existe un réel R appelé la raison de la suite, tel que :

Pour tout entier naturel n, $\boxed{U_{n+1} = U_n + R}$

Remarque : Cela ne fait que traduire le fait que pour les suites arithmétiques, on passe d'un terme quelconque à son terme successeur, en ajoutant à chaque fois le même nombre R appelé raison de la suite.

Les termes consécutifs d'une suite arithmétique sont régulièrement espacés de R en R :

Illustration :



Pour être encore plus terre à terre, quand vous comptez par exemple de 3 en 3, vous générez une suite arithmétique de raison $R = 3$.

Par exemple, si je commence avec le nombre 1, je vais dire : 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13......

Modéliser cette énumération par une suite à définir : $U_0 = 1$ et pr tt entier n : $U_{n+1} = U_n + 3$.

Exemple 1 : Etablir que la suite (U_n) des entiers naturels impairs est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme ainsi que la raison.

$U_0 = 1$ et pr tt entier n : $U_{n+1} = U_n + 2$; donc (U_n) est arithmétiques de raison $R = 2$ et de premier terme : $U_0 = 1$.

Exemple 2 : Soit (U_n) la suite définie sur N par : $U_n = 2n + 5$. Démontrer que cette suite est arithmétique, et préciser sa raison.

Méthode :

Méthode : On montre l'existence d'un réel R tel que :
Pour tout entier n : $U_{n+1} - U_n = R$.

Ici pr tout entier n : $U_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 7$

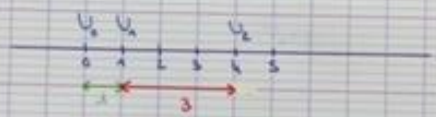
donc $U_{n+1} - U_n = 2n + 7 - (2n + 5) = 2$

Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $R = 2$.

11

Exemple 3 : Soit (U_n) la suite définie sur ℕ par $U_n = n^2$. Cette suite est-elle arithmétique ? Justifier.

$U_0 = 0$
$U_1 = 1$
$U_2 = 4$



$U_1 - U_0 = 1$ et $U_2 - U_1 = 3$
Pas le m̂ écart entre U_0 et U_1 qu'entre U_1 et U_2.

Donc (U_n) n'est pas arithmétique.

Exemple 4 : Soit (U_n) une suite arithmétique de raison R. Etudier son sens de variation.

(U_n) est une suite arithmétique de raison R, cela signifie que :
Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n + R$

$U_{n+1} - U_n = R$

Si $R > 0$, alors (U_n) est strictement croissante.
Si $R < 0$, alors (U_n) est strictement décroissante.
Si $R = 0$, alors (U_n) est constante.

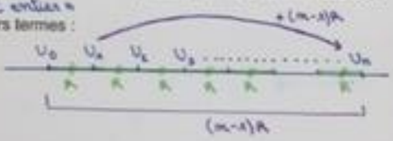
b) Expression explicite des suites arithmétiques

Propriété *(expression explicite dans le cas d'une suite arithmétique)*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison R et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $\boxed{u_n = U_0 + n \times R}$ (expression explicite de u_n en fonction de n).
De même, pour tout entier naturel p et tout entier naturel $n \geq p$, on a : $\boxed{u_n = U_p + (n-p) \times R}$
En particulier, si (u_n) est définie à partir du rang 1, on a : $U_n = U_1 + (n-1) \times R$

Preuve :

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation
$u_{n+1} = u_n + r$. pour tt entier n
En calculant les premiers termes :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
...
$u_n = u_{n-1} + r$



En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :
$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + n \times r$
Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :
$u_n = u_0 + nr$

Exercice 5

1a) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $R = 3$.
Déterminer l'expression générale de u_n en fonction de n, où n est entier naturel quelconque.

1b) En déduire le quinzième terme de la suite (u_n).

1a) (U_n) est arithmétique de raison $R = 3$ et de premier terme : $U_0 = -2$.

Donc pr tt entier naturel n : $U_n = U_0 + n \times R$
$U_n = -2 + 3n$
$\boxed{U_n = 3n - 2}$

1b) Le quinzième terme de la suite (U_n) est U_{14}.

Grâce à la q 1a) appliqué à $n = 14$ on a :

$U_{14} = 3\times 14 - 2 = 40$

Exercice 6

1a) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que : $u_5 = 7$ et $u_{16} = 40$.
Déterminer la raison et le premier terme u_0 de cette suite (u_n).

1b) En déduire l'expression générale de u_n en fonction de n.

1a) Pour tout entier n, $U_n = U_0 + n\times R$

donc : $U_5 = U_0 + 5\times R$ et $U_{16} = U_0 + 16\times R$

$7 = U_0 + 5\times R$ $\qquad 40 = U_0 + 16R$

Donc : $\begin{cases} U_0 + 5R = 7 \\ U_0 + 16R = 40 \end{cases} \underset{L2-L1}{\Longrightarrow} \begin{cases} U_0 + 5R = 7 \\ 16R - 5R = 40 - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} U_0 + 5R = 7 \\ 11R = 33 \end{cases}$

$\begin{cases} R = \frac{33}{11} = 3 \\ U_0 = 7 - 5R = 7 - 5\times 3 = -8 \end{cases}$

Donc (U_n) est arithmétique de raison $R = 3$ et de premier terme $U_0 = -8$.

1b) On a pr $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n = U_0 + n\times R$ avec $U_0 = -8$ et $R = 3$

$U_n = -8 + 3n$

$U_n = 3n - 8$

Exercice 7 (fondamental)

Soit (U_n) la suite à valeurs strictement positives définie par : $U_0 = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1}$.

Soit enfin la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{1}{U_n}$

1) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4. En déduire que (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

2) Calculer les cinq premiers termes de la suite (V_n). Conjecture sur la suite (V_n) ?

3) Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique, préciser sa raison.

4) En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n en fonction de n.

$U_0 = 1$ et pr tt entier n : $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1}$

1) Pour $n = 0$: $U_1 = \frac{U_0}{U_0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Pour $n = 1$: $U_2 = \frac{U_1}{U_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Pour $n = 2$: $U_3 = \frac{U_2}{U_2+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Pour $n = 3$: $U_4 = \frac{U_3}{U_3+1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$.

$U_1 - U_0 = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2}$ et $U_2 - U_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{-1}{6}$.

Donc $\frac{-1}{2} \neq \frac{-1}{6}$, $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$

Donc (U_n) n'est pas arithmétique.

2) Pour tout entier naturel n : $V_n = \frac{1}{U_n}$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$V_1 = \frac{1}{U_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$V_2 = \frac{1}{U_2} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

$$V_3 = \frac{1}{U_3} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

$$V_4 = \frac{1}{U_4} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5.$$

Conjecture : Il semblerait que la suite (V_n) soit arithmétique de raison $R = 1$ et de premier terme $V_0 = 1$.

3) Exprimons pr tt entier naturel n, $V_{n+1} - V_n$:

Pr tt entier n : $V_n = \frac{1}{U_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}}$.

Donc $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$.

Or pr tt entier n : $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_{n+1}}$.

Donc $$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{\frac{U_n}{U_{n+1}}} - \frac{1}{U_n}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} = 1.$$

Donc (V_n) est arithmétique de raison $R = 1$.

4) $\hat{C}$ (V_n) est arithmétique de raison $R = 1$ et que $V_0 = 1$, on a :

Pour tt entier naturel n : $V_n = V_0 + nR$

$$V_n = 1 + n \times 1$$

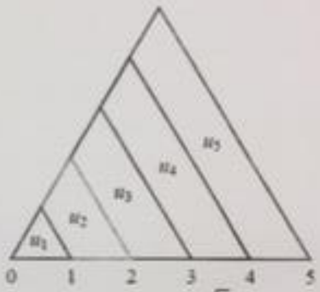
$$V_n = n + 1$$

Enfin : $V_n = \dfrac{1}{U_n}$, donc $U_n = \dfrac{1}{V_n} = \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 8

La figure ci-dessous, indique le début de la construction de zones colorées que l'on peut prolonger indéfiniment. Tous les triangles de la figure sont équilatéraux.

Prouver que la suite (u_n) des aires définies par la figure est arithmétique. Quelle est sa raison ?



On rappelle que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut : $h = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$

$n \in \mathbb{N}^*$

Soit A_n l'aire du triangle équilatéral de côté n :

$$A_1 = u_1 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3} \times 1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$u_2 = A_2 - A_1 = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3} \times 2}{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Pour tout entier n non nul.

$$u_n = A_n - A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{n \times \frac{\sqrt{3} \times n}{2}}{2} = \frac{n^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad A_{n-1} = \frac{(n-1)^2\sqrt{3}}{4}$$

Donc : $u_n = \frac{n^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(n-1)^2\sqrt{3}}{4}$

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(n^2 - (n-1)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(n^2 - (n^2 - 2n + 1)\right)$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(n^2 - n^2 + 2n - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2n-1)$$

Par suite, pour tout entier n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(2(n+1)-1) - \frac{\sqrt{3}}{4}(2n-1)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{3}}{4}(2n+2-1) - \frac{\sqrt{3}}{4}(2n-1)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2n+1-(2n-1)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2n+1-2n+1)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \leftarrow \text{constante !}$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les suites arithmétiques sont donc à rapprocher de quel type de fonction ? Pourquoi ?

↳ Des fonctions affines car : pr tt entier n, $U_n = U_0 + R \times n$ car (u_n) est arithmétique.

$u(n) = u(0) + R \times n$

↳ $g(x) = b + Rx = Rx + b \rightarrow$ fonction affine

Propriété

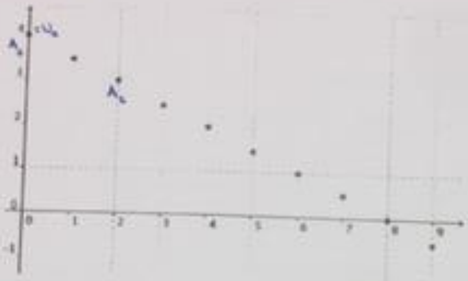
Lorsqu'on a une suite arithmétique (u_n), pour tout entier naturel n, les points $A_n(n\,;u_n)$ sont alignés.

Preuve : $A_n(n\,;u_n)$ avec $u_n = u_0 + Rn$

Donc $A_n \in \Delta$ où Δ est la droite d'équation : $y = u_0 + Rx$

Exemple

On a représenté ci-dessous les premiers points du nuage de points associé à la suite (u_n) arithmétique de raison $R = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4$.



R = coefficient directeur de la droite contenant les points rouges.

$A_1(0;4)$ et $A_2(2;3)$

Donc $R = \frac{y_{A_2} - y_{A_1}}{x_{A_2} - x_{A_1}} = \frac{3-4}{2-0} = -\frac{1}{2}$.

c) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Introduction :

Carl-Friedrich Gauss était un élève très doué en mathématiques qui s'ennuyait un peu au cours de calcul en première année scolaire. Un jour, lorsqu'il dérangeait trop le cours, le maître lui donna comme punition de calculer la somme des 100 premiers nombres. Gauss y réfléchit un court instant et répondit 5050. Le maître le regardait tout étonné, se mit à vérifier le calcul et resta bouche bée.
"*Mais comment as-tu fait pour trouver ce résultat aussi vite ?*" lui demanda-t-il après un moment.

Nous allons essayer de comprendre l'astuce utilisée par le jeune Gauss :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$
$$+ \quad S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1$$
$$S + S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101$$ ← Somme 100 termes tous égaux à 101 !

$$2S = 101 \times 100$$
$$S = \frac{101 \times 100}{2} = 101 \times 50 = 5050.$$

C'est ce résultat que nous allons généraliser :

Propriété

Pour tout entier naturel n non nul on a : $1+2+\dots\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

La somme $1+2+\dots.n$ ***se note rigoureusement :*** $\sum_{k=1}^{n} k$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Preuve :

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$
$$+ \quad S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$
$$S + S = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$ → il y a n termes de cette somme tous égaux à $n+1$.

$$2S = n(n+1)$$

Donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 9

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, T_n désigne le nombre de points sur le $n^{ème}$ dessin :

T_1 T_2 T_3 T_4 etc.

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = 3 + T_2 = 3 + 3 = 6$

Exprimer T_n en fonction de n.

Relation de récurrence : Pour tout entier $n \neq 0$:

$$T_{n+1} = T_n + n + 1$$

$T_1 = 1$

$T_2 = T_1 + 2$

$T_3 = T_2 + 3$

$\vdots$

$T_n = T_{n-1} + n$

+

$$T_1 + \cancel{T_2} + \dots + \cancel{T_{n-1}} + T_n = T_1 + \cancel{T_2} + \dots + \cancel{T_{n-1}} + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Donc après simplification :

$$T_n = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\text{Somme de Gauss}}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 10

a) Calculer la somme de tous les multiples de 5 inférieurs à 999.

b) Calculer astucieusement la somme : S = 33 + 36 + 39 + ...+ 273.

a) Rappel : les multiples de 5 sont les entiers de la table de 5 càd les nb de la forme $5 \times k$, où k est entier

On cherche ici la valeur de S où :

$S = 5 + 10 + 15 + \dots + 995$

$S = 5(\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + 199}_{\text{somme de Gauss}})$ factorisation

$S = 5 \times \dfrac{199\,(199+1)}{2} = 5 \times 199 \times \dfrac{200}{2} = 5 \times 199 \times 100$

$S = 500 \times 199 = 99\,500$

b) $S = 33 + 36 + 39 + \dots + 273$

$S = 3\,(11 + 12 + 13 + \dots + 91)$

$S = 3\,(\underbrace{1 + 2 + \dots + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 91}_{1^{\text{ère}} \text{ somme de Gauss (91 termes)}} - \underbrace{(1 + 2 + \dots + 10)}_{2^{\text{ème}} \text{ somme de Gauss (10 termes)}})$

$S = 3\left(\dfrac{91 \times 92}{2} - \dfrac{10 \times 11}{2}\right)$

$S = 3\,(91 \times 46 - 5 \times 11)$

$S = 12\,393$

Propriété ***(somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)***

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison R.

Notons, pour tout entier naturel n, S la somme définie par : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

On a : $S = (n+1) \times \boxed{\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)}$ = ♥♥ nb de termes de S × $\boxed{\text{Moyenne des termes extrêmes de la somme}}$ ♥♥

Plus généralement, pour tout entier $p \leq n$ on a :

$\underbrace{u_p + \dots + u_n}_{\text{somme de } n-p+1 \text{ termes}} = (n-p+1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}$ = ♥♥ nb de termes de la somme × moyenne des termes extrêmes ♥♥

Preuve :

(u_n) est arithmétique de raison R !

Donc pour tout entier n : $u_n = u_0 + n \times R$

$S = u_0 + \boxed{u_1} + \boxed{u_2} + \dots + \boxed{u_n}$

$S = u_0 + \boxed{u_0 \times 1 \times R} + \boxed{u_0 \times 2R} + \dots + \boxed{u_0 + m \times R}$

$S = u_0 + u_0 + \dots + u_0 + 1 \times R + 2 \times R + \dots + m \times R$

$S = (m+1) \times u_0 + R(1 + 2 + \dots + n)$

$S = (n+1) \times u_0 + R \times \frac{m(m+1)}{2}$

$S = (n+1) \times \left[u_0 + \frac{R \times n}{2}\right] = (n+1) \times \left[\frac{2u_0}{2} + \frac{R \times n}{2}\right]$

$S = (n+1) \times \left[\frac{2u_0 + R \times n}{2}\right]$

$S = (n+1) \times \left[\frac{u_0 + u_0 + R \times m}{2}\right]$

$S = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

Exercice 11

Calculer la somme des entiers naturels impairs inférieurs à 100.

$S = 1 \overset{+2}{+} 3 \overset{+2}{+} 5 + \dots + 99$

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ où (u_n) est la suite arithmétique de raison $R = 2$

et de premier terme $u_0 = 1$.

Il y a ds cette somme : $\frac{99}{2} = 49$ espaces de 2

Donc il y a 50 termes.

$S = 50 \times \frac{(1+99)}{2} = 50 \times 50 = 2500$

Exercice 12

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi :

- le premier mètre coûte 1 000 euros.
- Le second mètre coûte 1 050 euros et chaque mètre supplémentaire coûte 50 euros de plus que le précédent.
- On dispose d'un crédit de 519 750 €.

On appelle (u_n) la suite telle que $u_1 = 1\ 000$ et u_n représente de coût du n^e mètre.

a) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer alors u_n en fonction de n.

b) Montrer que le nombre de mètres n que l'on peut forer avec le crédit alloué vérifie : $n^2 + 39n - 20\ 790 = 0$

c) **En déduire la profondeur du forage que l'on peut creuser avec le crédit dont on dispose.**

a) Pour tout entier n non nul :

$u_{n+1} = u_n + 50$, donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $R = 50$, et son premier terme est : $u_1 = 1000$.

Donc pr tt entier n non nul :

$u_n = u_1 + (n-1) \times R$

$u_n = 1000 + (n-1) \times 50 = 1000 + 50n - 50$

$u_n = 50n + 950$

b) On cherche m tel que :

$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 519750$ avec (u_n) suite arithmétique.

$m \times \dfrac{u_1 \times u_n}{2} = 519750$

$m \times \left(\dfrac{1000 + 50n + 950}{2}\right) = 519750$

$n \times \left(\dfrac{50n + 1950}{2}\right) = 519750$

$n(50n + 1950) = 519750 \times 2$

$50n^2 + 1950n = 1039500$

$50n^2 + 1950n - 1039500 = 0$

$50(n^2 + 39n - 20790) = 0$

$n^2 + 39n - 20790 = \frac{0}{50} = 0$

Donc : $n^2 + 39n - 20790 = 0$.

c) $a = 1$; $b = 39$ et $c = -20790$

$\Delta = b^2 - 4ac = 39^2 - 4 \times (-20790)$

$\Delta = 84681 = 291^2$

$\Delta > 0$ donc deux racines :

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (<0) \\ n_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-39 + 291}{2} = \dfrac{252}{2} = 126. \end{cases}$$

Donc le grillage fait 126 mètres.

IV- Les suites géométriques

a) Définition des suites géométriques par une relation de récurrence

Définition : Une suite (U_n) est géométrique, s'il existe un réel noté Q, et appelé la raison de la suite, tel que :

Pour tout entier naturel n, $\boxed{U_{n+1} = Q \times U_n}$ Q = constante

Remarque 1 : Les cas où $Q = 0$ ou $Q = 1$ n'ont pas un grand intérêt. Pourquoi ?
Si $Q = 0$, alors (U_n) est nulle à partir de 1 ! Si $Q = 1$, alors (U_n) est constante !

Remarque 2 : Cela ne fait que traduire le fait que pour les suites géométriques, on passe d'un terme à son successeur en multipliant à chaque fois le même nombre Q appelé raison de la suite.

Pour être encore plus terre à terre, n'avez-vous jamais joué à ce jeu qui consiste à doubler le résultat précédent ?

Quand vous comptez comme précédemment, vous générez une suite géométrique de raison $Q = 2$.

Par exemple, si je commence avec le nombre 1, je vais dire : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16............

Modéliser cette énumération par une suite à définir.

Exemple : Soit (U_n) la suite définie sur N par : $U_n = \dfrac{2^n}{9}$

Montrer que cette suite est géométrique, préciser sa raison Q ainsi que son premier terme.

Pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{2^n}{9}$.

Donc : $U_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{9} = \dfrac{2^n \times 2}{9}$

$U_{n+1} = 2U_n$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison $Q = 2$.
Son premier terme est $u_0 = \dfrac{2^0}{9} = \dfrac{1}{9}$.

Remarque : si (u_n) est une suite géométrique de raison Q telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$, alors, pour tout entier naturel n, $Q = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

Cela donne une méthode pour calculer Q, à condition de vérifier au préalable que tous les termes de la suite (u_n) sont non nuls !

Exemple

Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 2\times 3^{2n+4}$ est géométrique et préciser sa raison.

Pour tout entier naturel n : $u_n = 2\times 3^{2n+4}$

$3 \neq 0$, donc pour $n \in \mathbb{N}$: $3^{2n+4} \neq$ et $2 \neq 0$.
Donc $2\times 3^{2n+4} \neq 0$ donc $u_n \neq 0$

et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2\times 3^{2(n+1)+4}}{2\times 3^{2n+4}} = \dfrac{3^{2n+6}}{3^{2n+4}} = 3^{2n+6-2n-4} = 3^2 = 9$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $Q = 9$
et son premier terme est $u_0 = 2\times 3^4 = 2\times 81 = 162$.

b) Expression explicite des suites géométriques

Propriété (expression de U_n en fonction de n, lorsque (U_n) est une suite géométrique).

Soit (U_n) une suite géométrique de raison Q, et de premier terme U_0.

Alors, pour tout entier naturel n, on a : ♥♥♥♥ $U_n = u_0 \times Q^n$ ♥♥♥♥

Plus généralement, pour tout entier naturel p (avec $n \geq p$) et tout entier naturel n, on a : $U_n = u_p \times Q^{n-p}$

En particulier, dans le cas où une suite géométrique (V_n) a pour premier terme V_1 et raison Q, on a pour tout entier $n \geq 1$: ♥♥♥♥ $V_n = V_1 \times Q^{n-1}$ ♥♥♥♥

Cette propriété permet donc de calculer de façon explicite tous les termes d'une suite géométrique.

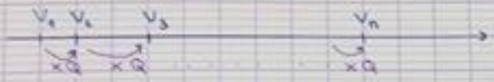
Nous verrons dans le prochain chapitre que si (u_n) est géométrique, alors $u_n = f(n)$ où f est une fonction de type exponentielle.

Preuve :

On multiplie u_0 n fois consécutivement par Q pour obtenir u_n.

Donc $u_n = u_0 \times \underbrace{Q \times Q \dots \times Q}_{n \text{ fois}}$

$$u_n = u_0 \times Q^n$$



On multiplie ici $n-1$ fois consécutivement par Q pour arriver à V_n en partant de V_1.

Donc : $V_n = V_1 \times Q^{n-1}$

<u>Exemple 1</u>

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $Q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 3$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel n, U_n en fonction de n.

b) En déduire U_{12}.

a) (u_n) est géométrique de raison $Q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 3$.

Donc pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times Q^n$

$$u_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) $u_{12} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 3 \times \frac{1^{12}}{2^{12}} = \frac{3}{4096}$

<u>Exemple 2</u>

Exemple : Soit une suite (u_n) géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4\,374$ et $u_5 = 486$. Trouver la raison q, le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

(u_n) est une suite géométrique de raison q et $u_7 = 4374$ et $u_5 = 486$.

avec $q > 0$.

On a pr tt entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc $u_7 = u_0 \times q^7$ et $u_5 = u_0 \times q^5$

$4374 = u_0 \times q^7$ $\quad 486 = u_0 \times q^5$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} u_0 \times q^5 = 486 & \text{Donc } u_0 \neq 0 \text{ et } q > 0. \\ u_0 \times q^7 = 4374 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{486}{q^5} \\ \dfrac{486}{q^5} \times q^7 = 4374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \dfrac{486}{q^5} \\ 486 \times q^2 = 4374 \end{cases}$$

Donc : $q^2 = \dfrac{4374}{486} = 9$

Donc : $q = -\sqrt{9} = -3$ ou $q = 3$

Or $q > 0$, donc $q = 3$ et $u_0 = \dfrac{486}{q^5} = \dfrac{486}{3^5} = \dfrac{486}{243} = 2$.

Par suite, $u_{10} = u_0 \times q^{10} = 2 \times 3^{10}$ $\quad (\neq 6^{10})$

Exemple 3

modèle mathématiques

La production de blé (en tonne) d'un pays croit de 2 % chaque année.

En 2020 ce pays produisait 200000 tonnes de blé.
On note u_n la masse en tonnes de blé produite par ce pays en l'an 2020 $+n$ où n est un entier naturel.

a) Calculer u_1.
b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Reprendre les questions précédentes avec le modèle d'évolution suivant : baisse de 5 % de la production par an à partir de l'an 2021 sachant qu'en 2020 le pays produisait 200000 tonnes de blé.

a) $u_1 = 1{,}02 \times u_0 = 1{,}02 \times 200\,000 = 204\,000$ T

(car augmenter une valeur de 2% revient à la multiplier par le coeff. multiplicateur : $CM = 1 + \frac{2}{100} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$.)

b) De m : $u_{n+1} = 1{,}02\, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Grâce à la q. b) on peut dire que (u_n) est une suite géométrique de raison $Q = 1{,}02$.

Donc pr tt naturel n :

$u_n = u_0 \times Q^n$

$u_n = 200\,000 \times 1{,}02^n$

B% Baisse de 5% par an de la prod°

$V_0 = 200\,000$ T

V_n = prod° en T en l'an 2020+n

a) $V_1 = 0{,}95 \times V_0 = 0{,}95 \times 200\,000 = 190\,000$ T

(car diminuer de 5% une quantité revient à la multiplier par $CM = 1 - \frac{5}{100} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.)

b) $V_{n+1} = 0{,}95 \times V_n$ (pr tt $n \in \mathbb{N}$)

c) Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$.

Donc pr tt $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times q^n = 200\,000 \times 0{,}95^n$.

Exemple 4

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.
On suppose que le taux d'évolution d'un terme quelconque au suivant est constant et égal à un réel k donné.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Rappel : $V_{initiale} = V_i \xrightarrow{+t\,\%} V_{finale} = V_f$

$$\text{taux d'évolu}^\circ = \frac{V_f - V_i}{V_i}$$

Ici pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$k = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_n}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

$$k = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = k + 1$

Donc $u_{n+1} = (k+1)u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = k + 1$.

Exemple 5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $Q > 0$. Etudier son sens de variation en fonction de la valeur de son premier terme u_0.

(u_n) est géo. de raison Q, avec $Q > 0$.

Donc pr ∀ $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times Q^n$

Donc $u_{n+1} - u_n = u_0 \times Q^{n+1} - u_0 \times Q^n$

$u_{n+1} - u_n = u_0 \times Q^n \times (Q - 1)$

Or $Q > 0$ donc $Q^n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n$ a le m̂ signe que $u_0(Q-1)$:

Si $u_0(Q-1) > 0$, càd si u_0 et $Q-1$ ont le m̂ signe, alors (u_n) est constante.

Si $u_0(Q-1) < 0$, càd si u_0 et $Q-1$ sont de signes contraires alors (u_n) est décroissante.

Si $u_0 = 0$: alors (u_n) est la suite nulle.
Si $Q = 1$, alors (u_n) est constante et égale à u_0.

Exemple 6

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est de 1 013 hectopascals.
On suppose que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.
On note p_n la pression atmosphérique en hectopascals à l'altitude $100n$ en mètres. On a donc $p_0 = 1013$. On arrondira tous les résultats à l'unité.

1. Calculer les pressions p_1 et p_2 aux altitudes 100 et 200 m.
2. Écrire p_{n+1} en fonction de p_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire sur la suite (p_n) ?
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. Calculer la pression atmosphérique à l'altitude 3 200 m.

P_n = pression à l'altitude $100n$ (m)
$P_0 = 1013$

1. $P_1 = P_0 \times \left(1 - \frac{1,25}{100}\right) = P_0 \times (1 - 0,0125)$

$P_1 = 1013 \times 0,9875$
$P_1 \approx 998$ hPa.

$P_2 = P_1 \times 0,9875$
$P_2 = 998 \times 0,9875$
$P_2 \approx 985$ hPa.

2. $P_r \; \forall n \in \mathbb{N}$:
$P_{n+1} = P_n \times 0,9875$

Donc (P_n) est géométrique de raison $q = 0,9875$
et $P_0 = 1013$.

3. Vu que (P_n) est géo. de raison $q = 0,9875$ et $P_0 = 1013$

On a pr $\forall n \in \mathbb{N}$: $P_n = P_0 \times q^n$
$P_n = 1013 \times 0,9875^n$

4. $3200 = 32 \times 100$
Donc on cherche ici la valeur de P_{32} :

$P_{32} = 1013 \times 0,9875^{32}$
$P_{32} \approx 677$ hPa.

Exercice 13

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 65$, et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,8U_n + 18$.
1) Calculer U_1 puis U_2.
2) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - 90$.
Calculer V_0, puis prouver que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
3) Exprimer V_n en fonction de n, puis en déduire l'expression de U_n en fonction de n.

4) En s'aidant d'une calculatrice, prévoir le comportement des valeurs prises par cette suite lorsque n devient grand *($n = 50$ puis $n = 100$ puis $n = 200$ etc.)*.

$u_0 = 65$ et pr $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$ (**)

1) $u_1 = 0,8 \times u_0 + 18$
$u_1 = 0,8 \times 65 + 18$
$u_1 = 70$.

$u_2 = 0,8 \times 70 + 18$
$u_2 = 74$.

2) Pr $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = u_n - 90$ (*)

$v_0 = u_0 - 90$
$v_0 = 65 - 90$
$v_0 = -25$

But : montrer que pr $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = V_n \times 0,8 = 0,8V_n$

Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n

Grâce à (*), pr $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 90$$

Grâce à (**) : $V_{n+1} = 0,8U_n + 18 - 90$

$$V_{n+1} = 0,8U_n - 72$$

Or (*) : $V_n = U_n - 90$, donc $U_n = V_n + 90$

Donc $V_{n+1} = 0,8(V_n + 90) - 72$

$$V_{n+1} = 0,8V_n + 72 - 72$$

donc $V_{n+1} = 0,8V_n$

Donc (V_n) est géo. de raison $q = 0,8$.

3) (V_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et son premier terme est : $V_0 = -25$
Donc pour tout entier naturel n : $V_n = V_0 \times q^n$

$$V_n = -25 \times 0,8^n$$

Or $V_n = u_n - 90$

donc $u_n = V_n + 90$

$u_n = -25 \times 0{,}8^n + 90$

4) $u_{50} \simeq 90$

$u_{100} \simeq 90$

$u_{200} \simeq 90$

c) Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété phare

Soit q un réel quelconque et n un entier naturel.

Notons S la somme : S $= 1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$

Si $q \neq 1$ on a : S $= \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Si $q = 1$ on a : S $= n + 1$

Preuve :

Si $q = 1$: $S = \underbrace{1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^n}_{\text{somme de } n+1 \text{ termes égaux à } 1} = 1(n+1) = n+1$

Si $q \neq 1$: $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ $*$

Donc $qS = q(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$

$qS = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$ $**$

Donc $\underset{* - **}{S - qS} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1})$

$S(1-q) = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \ldots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - q^3 - \ldots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$

$S(1-q) = 1 - q^{n+1}$ donc comme $q \neq 1$, $1-q \neq 0$, donc $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemple : La légende raconte qu'un roi de Perse voulu récompenser l'inventeur du jeu d'échecs. Après avoir réfléchi, ce dernier lui proposa "*Vous déposerez un grain de riz sur la première case, puis deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, vous doublez ainsi le nombre de grains en passant d'une case à l'autre jusqu'à la 64ème et je vous prends tous les grains*". "*Ce n'est pas une grosse récompense*" lui répondit le *roi*". Qu'en pensez-vous ? Quelle masse de blé cela représente-t-il ?

On admettra qu'en moyenne un grain de riz a une masse de 0,04 gramme, et on prendra comme approximation du nombre 2^{10} la valeur 1000. ($2^{10} = 1024$).
Comparer à la production mondiale de blé en 2019 qui était de 513 millions de tonnes.

On commencera par exprimer le nombre de grains de riz sur la i ième case, pour tout entier i valant successivement : 1 ; 2 ; ….; i ; ……; 64.

✂ -

Soit S le nb total de grain de blé sur l'échiquier.

$$S = \overset{\text{case 1}}{1} + \overset{\text{case 2}}{2} + \overset{\text{case 3}}{4} + \dots + \overset{\text{case 64}}{2^{63}}$$

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$ grains de blé sur l'échiquier.

Par la propriété précédente avec ici $q = 2$ $(2 \neq 1)$:

$$S = \frac{1-2^{64}}{1-2} = \frac{1-2^{64}}{-1} = -(1-2^{64}) = -1 + 2^{64} = 2^{64} - 1 \text{ grains.}$$

Soit M la masse totale de blé sur l'échiquier :

$$M = 0{,}04\,(2^{64}-1) \quad \text{donc } M \approx 0{,}04 \times 2^{64} \text{ g.}$$

$$M \approx \frac{0{,}04 \times 2^{64}}{1000 \times 1000} \text{ T.}$$

$$M \approx 7{,}4 \times 10^{11} \text{ T.}$$

Or $10^{11} = 100$ milliards.

Donc Sissa réclame environ 740 milliards de tonnes de blé !
↳ demande irréalisable.
Le roi est ruiné.

Propriété ***(somme des termes d'une suite géométrique).***

Soit (U_n) une suite géométrique de raison $Q \neq 1$, et de premier terme U_0.

Alors : $S = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n = u_0 \times \dfrac{1-Q^{n+1}}{1-Q} =$ ♥♥♥♥ $\text{Premier terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nb de terme de la somme}}}{1-\text{raison}}$ ♥♥♥♥

Retenir SURTOUT ce qui est écrit après le dernier signe = de la propriété encadrée

Preuve :

(u_n) est une suite géo de raison $Q \neq 1$.

Donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times Q^n$

Donc ici : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S = u_0 + u_0 \times Q + u_0 \times Q^2 + \ldots + u_0 \times Q^n$

Donc : $S = u_0 (1 + Q + Q^2 + \ldots + Q^n)$

Par propriété : $Q \neq 1$ donc $S = u_0 \times \dfrac{1-Q^{n+1}}{1-Q}$.

Exercice 14

Calculer $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3^{16}$ puis $S' = \sum_{k=0}^{15} 3 \times 2^{-k}$.

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{16}$: suite des termes d'une suite géométrique de raison $q = 3$.

$u_0 = 1^{er}$ terme

$3 \neq 1$, donc $S = 1 \times \dfrac{1-3^{17}}{1-3} = \dfrac{1-3^{17}}{-2} = \dfrac{3^{17}-1}{2}$.

$S' = \sum_{k=0}^{15} = 3 \times 2^{-k} = 3 \times 2^0 + 3 \times 2^{-1} + 3 \times 2^{-2} + \ldots + 3 \times 2^{-15}$

$$S' = 3\left(2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-15}\right)$$

$$S' = 3 \times \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{15}}\right)$$

$$S' = 3 \times \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right)}$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

$$S' = 3 \times 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right)}{\frac{1}{2}} = 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{16}\right).$$

Exercice 15

Une maison est louée depuis exactement 10 années par un même locataire.
La première année, le loyer mensuel s'élevait à 900€. Puis chaque année, ce montant a augmenté de 1 % par rapport à l'année précédente.

a) **On note u_n le loyer au bout de n années de location. Exprimer u_n en fonction de n.**

b) **Calculer la somme totale (au centime d'euro près) dépensée par le locataire au cours de ces 10 années.**

a) u_n = loyer mensuel au bout de n années de location.

u_1 = loyer de la 1ère année = 900 €

$$\underset{900}{u_1} \xrightarrow[\times CM]{+1\%} u_2 \xrightarrow[\times 1{,}01]{+1\%} u_3$$

avec $CM = 1 + \frac{1}{100} = 1{,}01$

On a pr $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n \times 1{,}01$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}01$ et son premier terme est $u_1 = 900$.

Donc pour tout entier $n \neq 0$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$u_n = 900 \times 1{,}01^{n-1}$

Applica° numérique : $u_5 = 900 \times 1{,}01^4 \approx 936{,}54$ €

$u_{10} = 900 \times 1{,}01^9 \approx 984{,}32$ €

b) S = la somme d'argent déboursée pour 10 ans de location.

$S = 12 \times (u_1 + u_2 + \dots + u_{10})$ (1 an = 12 mois)

$S = 12\,(900 + 900 \times 1{,}01 + 900 \times 1{,}01^2 + \dots + 900 \times 1{,}01^9)$

$S = 12 \times 900\,(1 + 1{,}01 + 1{,}01^2 + \dots + 1{,}01^9)$

$S = 10800 \times \dfrac{1 - 1{,}01^{10}}{1 - 1{,}01}$ $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{-b}$

$S = 10\,800 \times \dfrac{1{,}01^{10} - 1}{1{,}01 - 1} = \dfrac{10\,800}{0{,}01} \times (1{,}01^{10} - 1)$

$S = 1080000 \times (1{,}01^{10} - 1)$

$S \approx 112991.$

V- Notion intuitive de limite de suite

a) Suite admettant une limite finie

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Regardons, grâce au tableau ci-dessous, le comportement des valeurs prises par cette suite (u_n) lorsque n devient très grand :

n	1	10	100	1000	10000	10^6	10^9
u_n	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000001	0,000000001

Quel constat faites-vous ? lorsque n "devient très grand" les valeurs prises par u_n tendent à se rapprocher de la valeur 0.

On dira que : la suite (u_n) converge vers 0, c'est-à-dire que lorsque n devient "très grand", les valeurs prises par cette suite se rapprochent de 0.

On dira que la limite de cette suite vaut 0, ce que l'on notera : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. (lire : la limite qd n tend vers $+\infty$ de (u_n) est égale à 0.)

Fixez bien cette notation qui sera d'usage quotidien en terminale.

Définition plus rigoureuse de la limite d'une suite

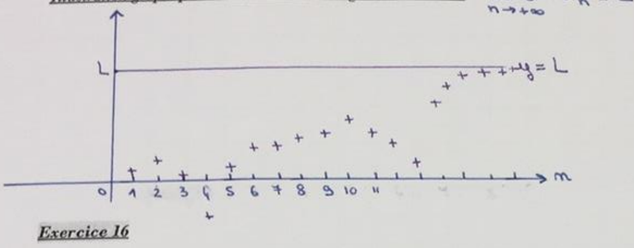
Soit (u_n) une suite, et L un nombre réel fixé.

On dit que la suite (u_n) converge vers L si et seulement si, à partir d'un certain rang de l'entier n, tous les termes u_n sont aussi proches de L que l'on veut.

Dans un tel cas, on dira que la suite (u_n) est convergente, et quelle converge vers L. On notera cela :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Illustration graphique de la notion de convergence d'une suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$



Exercice 16

A l'aide de votre calculatrice, déterminer la limite de chacune des suites suivantes définies par :

$u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2+1}$; $v_n = 5 + 0{,}2^n$.

$u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2+1}$

Faire une table de valeur :

Début : $n = 100$

Pas : $\Delta = 100$

n	u_n
100	2,0001
200	2,0000
⋮	...
1000	2,000

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

De m̂ : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 5$

Exercice 17

On lance à volonté un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit n le nombre de lancers effectués, et u_n la probabilité de l'événement E_n :
E_n : "obtenir au moins un six au cours des n lancers".

Montrer que $u_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$, puis déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le cadre de ce jeu.

$\overline{E_n}$ = "Obtenir aucun 6 au cours des n lancers".

À chaque lancer, la probabilité de ne pas obtenir 6 est égale à $\frac{5}{6}$.
On répète n fois cette action :

Donc $p(\overline{E_n}) = \underbrace{\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{5}{6}}_{n \text{ facteurs}} = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Or $p(\overline{E_n}) = 1 - p(E_n)$, donc $p(E_n) = 1 - p(\overline{E_n}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$u_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

n	u_n arrondi à 0,001 près
10	0,8385
20	0,9739
50	0,9998
100	0,99999

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ Or $\frac{5}{6} \neq 0$.

Donc $\left(\frac{5}{6}\right)^n \neq 0$

dans le

e à $\frac{5}{6}$.

b) Suite admettant une limite infinie

Considérons la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.
Regardons, grâce au tableau ci-dessous, le comportement des valeurs prises par cette suite (u_n) lorsque n devient très grand :

n	1	10	100	200	300
u_n	2	1024	$1{,}27 \times 10^{30}$	$1{,}61 \times 10^{60}$	$2{,}04 \times 10^{90}$

Quel constat faites-vous ? Il semblerait que les valeurs prises par la suite (u_n) deviennent aussi grandes que l'on veut.

On dira que : la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ c'est-à-dire que lorsque n devient "très grand", les valeurs prises par cette suite finissent par dépasser la valeur de n'importe quel réel A arbitrairement fixé, aussi grand que soit A !

On notera : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ⚠ $+\infty$ n'est pas un réel !

21

De même si, à partir d'un certain rang, les valeurs prises par une suite (u_n) deviennent inférieures à n'importe quel réel arbitrairement fixé aussi petit soit-il, on dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

On notera : $\lim\limits_{n \to -\infty} u_n = -\infty$ ⚠ $-\infty$ n'est pas un réel !

Exemple

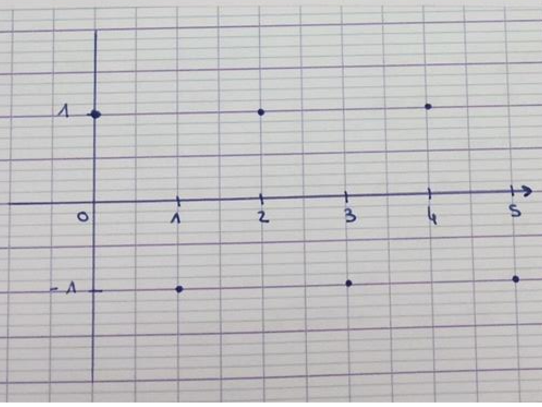
La suite (u_n) définie par : $u_n = -n^2$ diverge vers $-\infty$.

n	10	1000	...
u_n	-100	-100000	...

c) Suite n'admettant aucune limite

Il existe des suites n'admettant aucune limite (ni finie, ni infinie).
C'est par exemple le cas de la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n$.

On dit qu'une telle suite diverge grossièrement. Pas possible ici d'utiliser le symbole de limite vu que cette dernière n'existe pas !! ↳ pas de limite, ni finie, ni infinie.



VI – Algorithmes de seuil

A-Boucle Tant que

Exemple 1

Considérons l'algorithme suivant écrit en pseudo-code.

```
U←0          => on stocke le nb 0 ds la variable U
Tant que U<20
  U←2U+4
Fin de tant que
Afficher U.
```

Faire tourner à la main cet algorithme et déterminer l'affichage en sortie.
Quel est le rôle de cet algorithme vis-à-vis de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 4$?

Il permet de trouver le premier terme de (u_n) qui est supérieur ou égal à 20 !

Ici ça correspond à $28 = u_3$.

Le pgm s'arrête de fonctionner dès que le condi° : $u < 20$ n'est plus vraie, càd dès que $\underbrace{u \geqslant 20}_{\text{condition d'arrêt}}$.

En Python, il se code ainsi :

```python
def seuil():
    u=0
    while u<20:
        u=2*u+4
    return(u)
```

À la main :

$U = 0$

Test de condi° : $0 < 20$: Vrai

Instruction : $U = 2 \times 0 + 4 = 4$

Test : $4 < 20$: Vrai

Instruction : $U = 2 \times 4 + 4 = 12$

Test : $12 < 20$: Vrai

Instruction : $U = 2 \times 12 + 4 = 28$

Test : $28 < 20$: Faux ! → Fin du pgm

Affichage : 28.

Exemple 2

Considérons l'algorithme suivant écrit en pseudo code.

```
U←100
N←0
Tant que U≥20
  U←0,5U
  N←N+1
Fin de tant que
Afficher N.
```

a) Déterminer à la main la valeur affichée par ce programme, puis interpréter cette dernière vis-à-vis d'une suite (u_n) que l'on définira.

b) Le coder en Python.

c) On admet que la suite (u_n) précédemment définie converge vers 0 et qu'elle décroit.
Soit A un réel strictement positif. Modifier l'algorithme initial, et celui en python pour qu'il affiche en sortie le rang à partir duquel $u_n < A$ pour la première fois.

a)

U	100	100	50	25	12,5
N	0	0	1	2	3
Condi° $U \geq 20$	$\times$	$100 \geq 20$ Vrai	$50 \geq 20$ Vrai	$25 \geq 20$ Vrai	$12,5 \geq 20$ Faux

↳ arrêt du pgm

Affichage en sortie : $\underline{\underline{3}}$

b)

```
def seuil ( ):
    u = 100
    n = 0
    while u >= 20 :
        u = 0.5* u
        n = n +1
    return (n)
```

<u>Python :</u> $\geq$ → >=

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ \text{Pour tout entier naturel : } u_{n+1} = 0,5\,u_n \end{cases}$$

Rôle de cet algo : Il permet de trouver le rang du plus petit entier n à partir duquel $u_n < 20$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Algo modifié :

```
def seuil (A)
    u = 100
    n = 0
    while U >= A :
        u = 0.5* u
        n = n+1
    return (n)
```

Applica° numérique : $A = 10^{-3} = 0,001$

Sortie : n = 17 $\underbrace{\text{à partir du rang } 17}_{\text{si } n \geqslant 17}$, $u_n < 0,001$

Exemple 3

↱ suite géo avec $u_0 = 3$ et $q = 1,25$

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 1,25^n$. donc $U_{n+1} = 1,25\,u_n$.

On admet que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, et donc, que les valeurs prises par cette suite finissent par dépasser n'importe quel réel A fixé (aussi grand soit-il), on parle de franchir le seuil A.

Compléter l'algorithme suivant qui cherche la valeur du plus petit entier naturel N tel que $u_N \geq A$, où A est un réel positif choisi par l'utilisateur, et qui affiche en sortie cet entier N ainsi que le terme U_N correspondant :

```
def seuil(A):
    n=0
    u=3
    while u < A :
        n= n+1
        u= 3* 1,25** n
    return n
```

VII- Des exercices de baccalauréat !

Exercice 1

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 20 % de son intensité lumineuse. L'intensité lumineuse est exprimée en candela (cd).

On utilise une lampe torche qui émet un rayon d'intensité lumineuse réglée à 400 cd.

On superpose n plaques de verres identiques (n étant un entier naturel) et on désire mesurer l'intensité lumineuse I_n du rayon à la sortie de la n-ième plaque.

On note $I_0 = 400$ l'intensité lumineuse du rayon émis par la lampe torche avant de traverser les plaques (intensité lumineuse initiale). Ainsi, cette situation est modélisée par la suite (I_n).

1. Montrer par un calcul que $I_1 = 320$.
2. a. Pour tout entier naturel n, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   b. En déduire la nature de la suite (I_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   c. Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n.
3. On souhaite déterminer le nombre minimal n de plaques à superposer afin que le rayon initial ait perdu au moins 70 % de son intensité lumineuse initiale après sa traversée des plaques.
   a. Afin de déterminer le nombre de plaques à superposer, on considère la fonction Python suivante.

```
def nombrePlaques(J):
    I=400
    n=0
    while I > J:
        I = 0.8*I
        n = n+1
    return n
```

   Préciser, en justifiant, le nombre j de sorte que l'appel `nombrePlaques(j)` renvoie le nombre de plaques à superposer.

   b. Le tableau suivant donne des valeurs de I_n. Combien de plaques doit-on superposer ?

n	0	1	2	3	4	5	6	7
I_n	400	320	256	204,8	163,84	131,07	104,85	83,886

1. $I_1 = 400\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 400 \times 0,8 = 320$ cd.

2. a. $I_{n+1} = I_n - \frac{20}{100} I_n = 0,8 I_n$

b. Grâce à 2a. on peut dire que (I_n) est géométrique, de raison $q = 0,8$ et de premier terme $I_0 = 400$.

c. Grâce à 2b., (I_n) est une suite géométrique.
Donc pour tout entier n : $I_n = I_0 \times q^n$
$I_n = 400 \times 0,8^n$

3. a. Perte minimale : $\frac{70}{100} \times 400 = 280$
Donc $400 - 280 = 120$.
Donc prendre $J = 120$.

b. $n = 6$ donc 6 plaques à superposer :
I_n devient inférieur à 120, pour la première fois, lorsque $n = 6$.

Exercice 2

Les résultats seront arrondis à l'unité.

La quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant d'une ville de taille moyenne a été de 537 kg en 2019 et la municipalité espère réduire ensuite cette production de 1,5 % par an.

Pour tout entier naturel n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produit par habitant de cette ville durant l'année $2019 + n$, on a donc $d_0 = 537$.

1. Montrer par un calcul que $d_1 = 0{,}985 \times d_0$
2. Pour tout entier naturel n, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
3. En déduire la nature de la suite (d_n) puis une expression de d_n en fonction de n.
4. On souhaite savoir à partir de quelle année la production moyenne de déchets produite par chaque habitant sera inférieure à celle enregistrée en 2019 au niveau national, à savoir **513 kg**. Pour cela, on considère l'algorithme suivant rédigé en langage Python.

```
def année():
    n=0
    d=537
    while d>513:
        n=n+1
        d=0.985* d
    return(n)
```

a. Recopier et compléter l'algorithme afin de répondre au problème posé

b. À partir de quelle année la production moyenne de déchets produite par chaque habitant sera-t-elle inférieure à celle enregistrée en 2019 au niveau national ?

1. Modèle : cq année, réduc° de 1,5 % de la quantité de déchets produite !

Donc $d_1 = d_0 - \dfrac{1{,}5}{100} \times d_0$

$d_1 = d_0 \left(1 - \dfrac{1{,}5}{100}\right) = d_0 \times 1 - 0{,}015$

$d_1 = 0{,}985 \times d_0$

$\left(d_1 = 537 \times 0{,}985 \right.$

$\left. d_1 \approx 529 \right)$

M_2 : Baisser de 1,5 % une quantité c'est multiplier cette dernière par :

$CM = 1 - \frac{1,5}{100} = 0,985.$

2. $d_{n+1} = CM \times d_n = 0,985 d_n$ où $n \in \mathbb{N}$

3. Grâce à q.2., on peut dire que (d_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,985$ et de premier terme $d_0 = 537$.

Donc pour tt entier naturel n :

$d_n = d_0 \times q^n$

$d_n = 537 \times 0,985^n$

4. a. → voir algorithme

b. Faire une table de valeurs de (d_n) :

n	---	...	3	4
d_n	---	...	513,2	505,5

$n = 4$ donc c'est en l'an $2019 + 4 = 2023$ que la quantité de déchets produite deviendra inférieure à celle de niveau national.

Exercice 4

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$. => modèle mathématiques !

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.
   c. Déterminer la limite de la suite (T_n).
   d. Retrouver par le calcul que la suite (T_n) est décroissante.

1. On peut conjecturer que la suite (T_n) va être décroissante.

2. Pr tt entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$

$$T_{n+1} = -0{,}2(T_n - 10) + T_n$$
$$T_{n+1} = -0{,}2T_n + 2 + T_n$$
$$T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$$

↳ car $-0{,}2T_n + T_n = T_n(-0{,}2+1) = 0{,}8T_n$

3. a. Montrons qu'il existe un réel q tel que pr tt entier naturel n, $u_{n+1} = q u_n$

Exprimons donc u_{n+1} en fonction de u_n :

Or pr tt entier naturel n : $u_n = T_n - 10$

Donc : $u_{n+1} = T_{n+1} - 10$

Or d'après q. 2. , $T_{n+1} = 0,8\,T_n + 2$

Donc $u_{n+1} = 0,8\,T_n + 2 - 10$
$u_{n+1} = 0,8\,T_n - 8$

Or $u_n = T_n - 10$, donc $T_n = u_n + 10$

Donc $u_{n+1} = 0,8\,(u_n + 10) - 8$
$u_{n+1} = 0,8\,u_n + 8 - 8$
$u_{n+1} = 0,8\,u_n$

Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.

b. $T_n = u_n + 10$. Or $u_n = q^n \times u_0 = 0,8^n \times 70$ grâce à 3a.

Donc $T_n = 0,8^n \times 70 + 10$
$T_n = 70 \times 0,8^n + 10$

c. On cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$: avec la machine on donne à n "des valeurs grandes" n = 100 ...

Manifestement : $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 10$.

À long terme, la température de la tasse de café se stabilise à celle de l'air ambiant (10°C).

d. Pour tt entier naturel n, étudions le signe de $T_{n+1} - T_n$.

Or $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$ donc $T_{n+1} = 70 \times 0{,}8^{n+1} + 10$

Donc $T_{n+1} - T_n = 70 \times 0{,}8^{n+1} + 10 - (70 \times 0{,}8^n + 10)$

$T_{n+1} - T_n = 70 \times 0{,}8^{n+1} + 10 - 70 \times 0{,}8^n - 10$

$T_{n+1} - T_n = 70 \times 0{,}8^n (0{,}8 - 1)$

$T_{n+1} - T_n = 70 \times 0{,}8^n \times (-0{,}2) = -14 \times 0{,}8^n$.

$-14 < 0$ et $0{,}8 > 0$, donc $0{,}8^n > 0$.

Donc $-14 \times 0{,}8^n < 0$

donc $T_{n+1} - T_n < 0$

Donc (T_n) est strictement décroissante.

Exercice 6

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année 2017 + n. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

1. u_1 = nb de cétacés au 1^{er} juin 2018

avec $u_1 = (\underbrace{u_0}_{\text{nb de cétacés au 31/10/2017}} + 80) \times \underbrace{0,95}_{\text{baisse de 5\% du nb de cétacés entre le 01/11/2017 et le 01/05/2018}}$

2. De m̂, $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95$

$u_{n+1} = 0,95\, u_n + 76$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def cetace():
    n=0
    u=3000
    while..........:
        n=..........
        u=..........
    return .........
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

3. On tape ds b2 : = 0.95 * (C2 + 80)

5. a. $v_n = u_n - 1520$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520$

$v_{n+1} = 0,95\, u_n + 76 - 1520$

$v_{n+1} = 0,95\, u_n - 1444$

Or $u_n = v_n + 1520$

Donc $v_{n+1} = 0,95(v_n + 1520) - 1444$

$v_{n+1} = 0,95\, v_n + 1444 - 1444$

$v_{n+1} = 0,95\, v_n$

Donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

b. $u_n = v_n + 1520$.

Or d'après 5a., $v_n = v_0 \times q^n = 1480 \times 0,95^n$

Donc $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$

À long terme, il y aura 1520 cétacés ds la réserve.

6.
```
def cetace ( ):
    n = 0
    u = 3000
    while u > 2000:
        n = n + 1
        u = 1480 * 0.95**n + 1520
    return n + 2017
```

7. La réserve marine fermera au bout de 22 années, càd en 2039.

<u>Exercice 7</u> ***(Métropole 2022, partie d'exercice)***

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en utilisant votre calculatrice, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

1. $u_1 = 2\left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1,8$

$u_1 = 2 \times 0,70 + 1,8$

$u_1 = 3,2$

2. $u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1,8$

$u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$

a. $v_{n+1} = 6 - u_{n+1}$. Or $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$

Donc $v_{n+1} = 6 - (0,7u_n + 1,8)$

$v_{n+1} = 6 - 0,7u_n - 1,8$

Or $u_n = 6 - v_n$

Donc $v_{n+1} = 6 - 0,7(6 - v_n) - 1,8$

$v_{n+1} = 6 - 4,2 + 0,7 v_n - 1,8$

$v_{n+1} = 0,7 v_n$

(v_n) est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

b. $v_n = q^n \times v_0 = 0,7^n \times 4$, pr tt entier naturel n.

Donc $u_n = 6 - v_n = 6 - 0,7^n \times 4$

$u_n = -0,7^n \times 4 + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$

c. $u_n \geqslant 5,5$ lorsque $n = 6$.

On cherche la + petite valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 5,5$:

n	u_n
5	5,33
6	5,53

Il faut donc réaliser 6 injections.

Exercice 7 *(Métropole 2022, partie d'exercice)*

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en utilisant votre calculatrice, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

1. $u_1 = 2\left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1,8$

$u_1 = 2 \times 0,70 + 1,8$

$u_1 = 3,2$

2. $u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1,8$

$u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$

a. $v_{n+1} = 6 - u_{n+1}$. Or $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$

Donc $v_{n+1} = 6 - (0,7u_n + 1,8)$

$v_{n+1} = 6 - 0,7u_n - 1,8$

Or $u_n = 6 - v_n$

Donc $v_{n+1} = 6 - 0,7(6 - v_n) - 1,8$

$v_{n+1} = 6 - 4,2 + 0,7 v_n - 1,8$

$v_{n+1} = 0,7 v_n$

(v_n) est donc bien une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

b. $v_n = q^n \times v_0 = 0,7^n \times 4$, pr tt entier naturel n.

Donc $u_n = 6 - v_n = 6 - 0,7^n \times 4$

$u_n = -0,7^n \times 4 + 6 = 6 - 4 \times 0,7^n$

c. $u_n \geqslant 5,5$ lorsque $n = 6$.

On cherche la + petite valeur de n pour laquelle $u_n \geqslant 5,5$:

n	u_n
5	5,33
6	5,53

Il faut donc réaliser 6 injections.