*« Qui parle sème, qui écoute récolte.» Pythagore de Samos*

# *Chapitre V — Limites de fonctions-Asymptotes*

## *I – Limite d'une fonction à l'infini*

### *A – Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$*

***Définition***

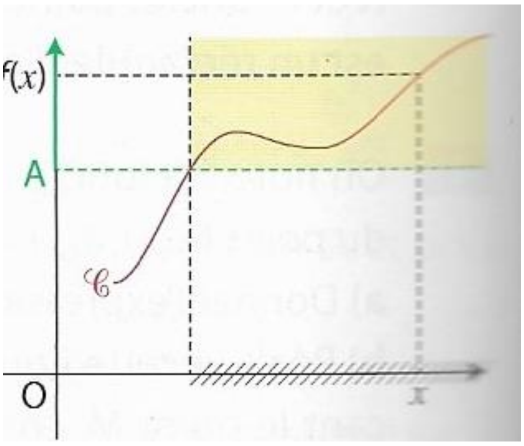
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme : $]w\ ;\ +\infty[$, où *$w$ est un réel.*

Dire que $f$ a pour limite $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ signifie que les valeurs prises par $f$ finissent par être supérieures à n'importe quel nombre réel $A$ arbitrairement fixé (aussi grand soit-il) dès que $x$ est suffisamment grand.

En des termes plus savants, tout intervalle ouvert de la forme : $]A\ ;\ +\infty[$ (avec $A$ nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment grand.

On notera : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ pour décrire ce phénomène.

***Illustration graphique*** :




***Propriété* (limites de fonctions de référence)**

♥♥♥ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n =$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} k =$ ♥♥♥

***Remarque*** : à partir de maintenant, on fera figurer ces résultats dans les tableaux de variation des fonctions.

***Exemple*** : dresser le tableau de variation complet de la fonction racine carrée.

***Preuve***: pour $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ :
Autre preuve ultérieurement.

**DÉMONSTRATION AU PROGRAMME** **Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$**

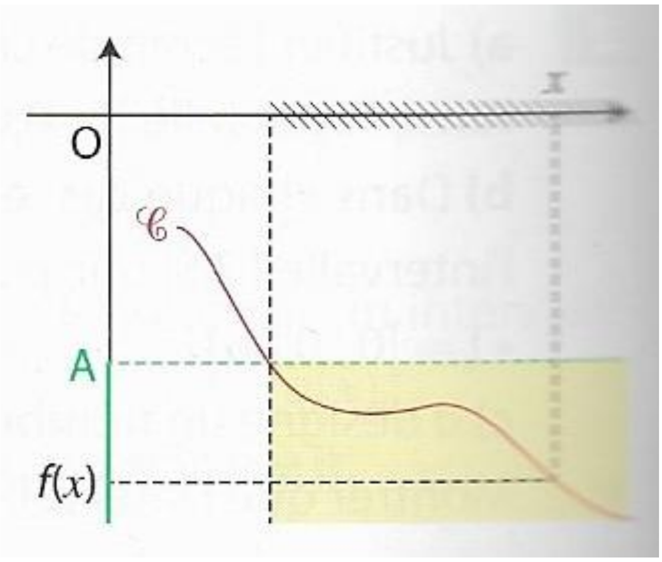
Puisque e $>$ 1, la suite géométrique $(e^n)$ a pour limite $+\infty$
Donc, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang $n_0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ : $e^n > A$.
Pour $x$ assez grand, $x \geqslant n_0$, d'où $e^x \geqslant e^{n_0}$ par croissance de la fonction exponentielle, et par suite $e^x > A$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

***Définition***

De même, on dira que *f* admet pour limite - ∞ lorsque $x$ tend vers + ∞ (on notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$), pour signifier que, les valeurs $f(x)$ deviennent inférieures à n'importe quel nombre arbitrairement fixé aussi petit soit-il, dès lors que $x$ est suffisamment grand.

En des termes plus savants, tout intervalle ouvert de la forme ]-∞ ; $A$[ (avec $A$ nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment grand.

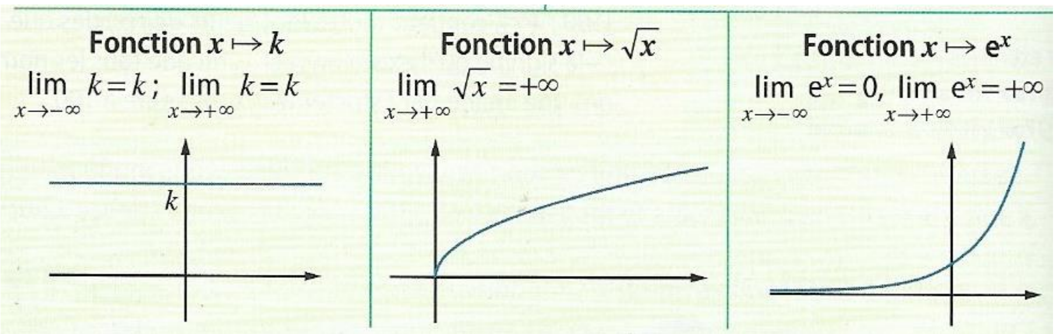
***Illustration graphique :***



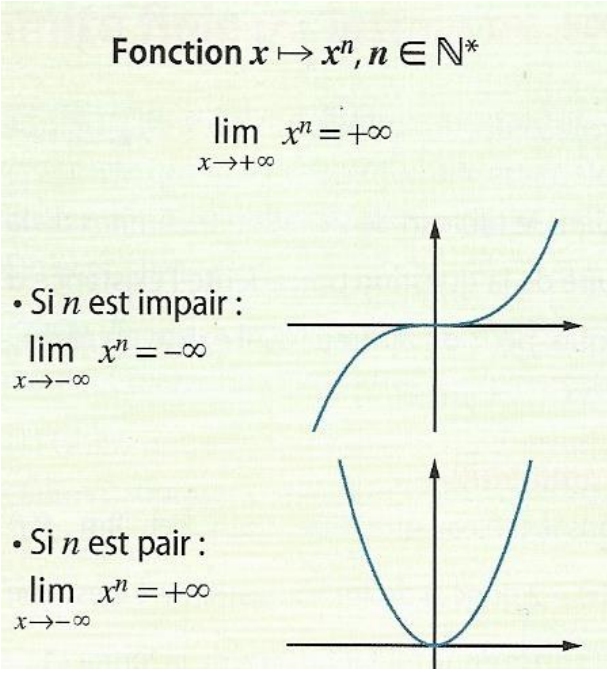

***Propriété (limites de fonctions de référence)***

♥♥♥ $\forall k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} k =$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} si\ n\ \dots\dots\dots \\ si\ n \dots\dots\dots.. \end{cases}$ ♥♥♥

***Illustration graphique*** :




La limite en -∞ de la fonction exponentielle est admise provisoirement et sera justifiée plus loin.




## B – Limite finie en +∞ ou en -∞

***Définition*** : Dire qu'une fonction $f$ a pour limite le nombre réel $L$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $L$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ (et on dit encore que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $+\infty$).

Dire qu'une fonction $f$ a pour limite le nombre réel $L$ en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant $L$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment petit.

On note : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ (et on dit encore que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $-\infty$).

***Illustration graphique*** :

Concrètement, pour $x$ suffisamment grand, la portion de $C_f$ correspondante à ces valeurs de $x$ reste entièrement emprisonnée dans la bande formée par les droites horizontales délimitant l'intervalle ouvert contenant $L$.

***<u>Propriété</u> (limites de fonctions de référence)***

| |
|---|
| ♥♥♥ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}$ =…. et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}$ =…. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ =……. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \cdots$… ♥♥♥ |

*<u>Remarque</u> :* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ sera justifiée ultérieurement au paragraphe limite de fonctions composées.

***<u>Définition</u> (à mémoriser par cœur)***

| |
|---|
| ♥♥♥ Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, avec $L \in \mathbb{R}$, on dit que la droite $(d)$ d'équation : $y = L$ est ………………… ……………….. à la courbe $C_f$ représentative de la fonction $f$ au voisinage de $+\infty$. |

*<u>Illustration</u>* :

Graphiquement, cela se traduit par le fait que $C_f$ et la droite horizontale d'équation : $y = L$ se confondent quasiment pour les grandes valeurs de $x$ : plus précisément, la longueur MP tend vers 0 dès lors que $x$ tend vers $+\infty$ :

| |
|---|
| De même, si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ ***est asymptote horizontale*** à $C_f$ en $-\infty$. |

*<u>Remarque</u>*

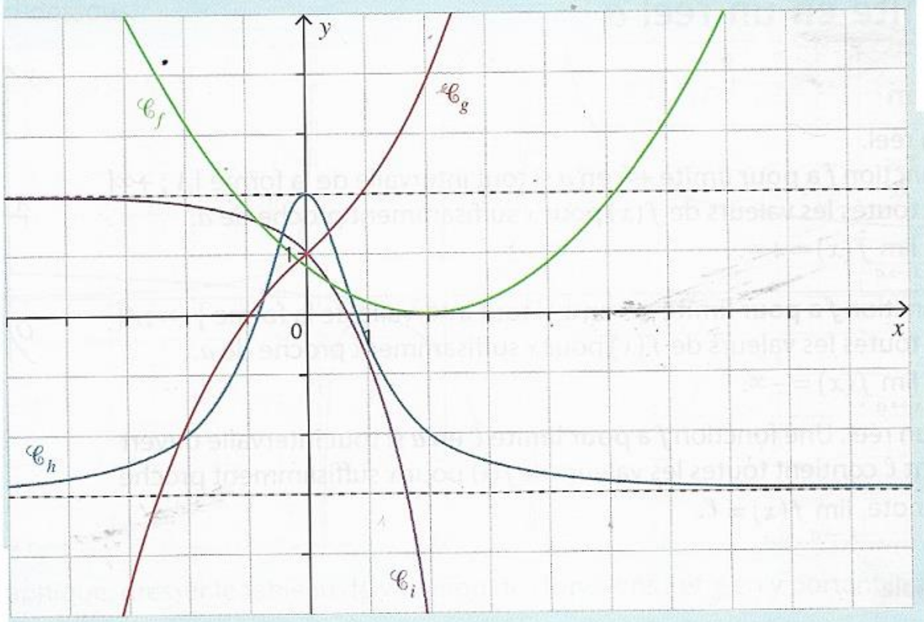
En traçant la courbe représentative d'une fonction à l'aide d'une calculatrice, on peut conjecturer la présence d'asymptote horizontale.

*<u>Exemple 1</u>* : Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ .

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Qu'en déduit-on en termes d'asymptote ?

***Exercice 1***

**1** Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-dessous.




**2** Certaines courbes représentatives semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ? Si oui, donner leurs équations.

3) Dresser les tableaux de variation complets des fonctions $f$, $g$, $h$ définies sur $\mathbb{R}$.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 2***

**Énoncé** On considère une fonction $f$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

1. Quelle est la limite de $f$ en $+\infty$ ? en $-\infty$ ?
2. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Proposer une courbe pouvant représenter la fonction $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ |

✂-----------------------------------------------------------------------------------

## *C – Limite infinie en un réel a*

***Exemple***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Intéressons-nous aux valeurs prises par $f$ lorsque $x$ est proche de 0, sans jamais valoir 0.

| $x$ | -0,1 | -0,01 | $-10^{-3}$ | 0 | $10^{-3}$ | 0,01 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | ☠ | | | |

***Constat*** :

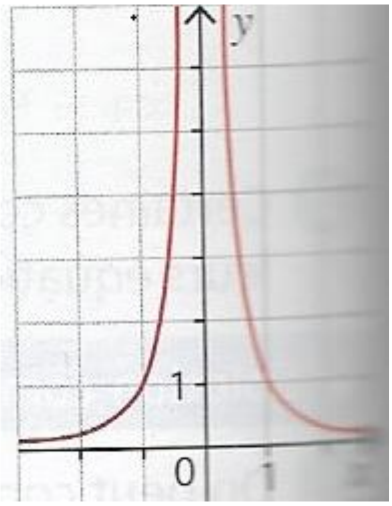
On notera :

***Définition***

Soit $a$ un nombre réel. Dire qu'une fonction $f$ admet pour limite $+\infty$ en $a$, signifie que tout intervalle de la forme $]A\ ;+\infty[$ (avec $A$ nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$.

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

***Illustration*** : Ici, $\lim\limits_{x\to\cdots} f(x) = \ldots$




Limite à gauche d'un point – Limite à droite d'un point

Quand $x$ est proche de 0, qu'en est-il de $\dfrac{1}{x}$ ?

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (appelée limite à droite de la fonction inverse).

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ (appelée limite à gauche de la fonction inverse).

***Remarque*** : la notation $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ peut se noter : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. De même, la notation $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ sera notée :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

♥ ***Formulaire*** : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \cdots$ ; Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} \ldots.\text{ si } n \text{ est} \ldots\ldots \\ \ldots \text{ si } n \text{ est} \ldots\ldots \end{cases}$

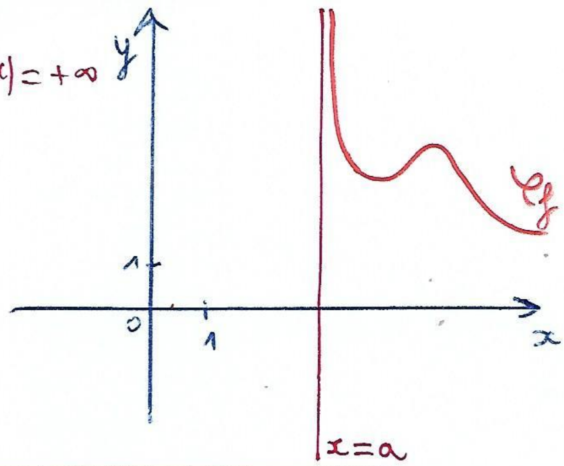
***Définition***

Soit $a$ un réel.

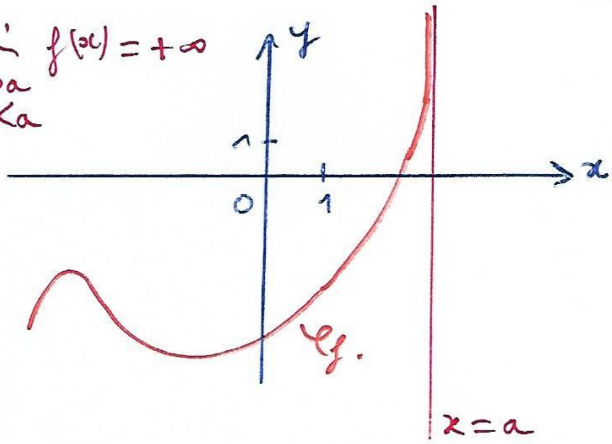
Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $(-\infty)$, on dit que la droite verticale d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ est ***asymptote verticale*** à $C_f$.

***Illustration graphique*** : 8 cas de figures sont possibles : les voici :

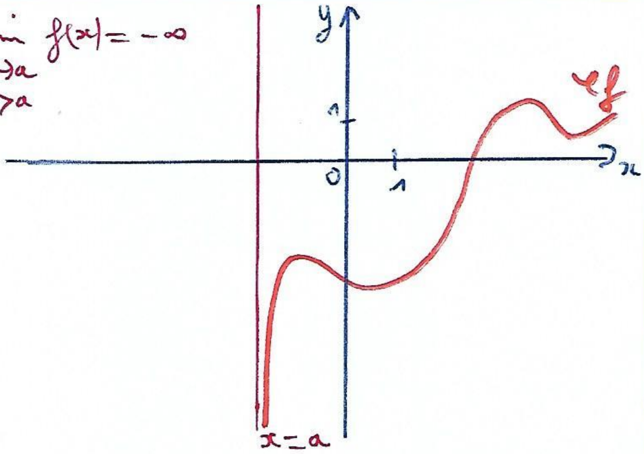
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$



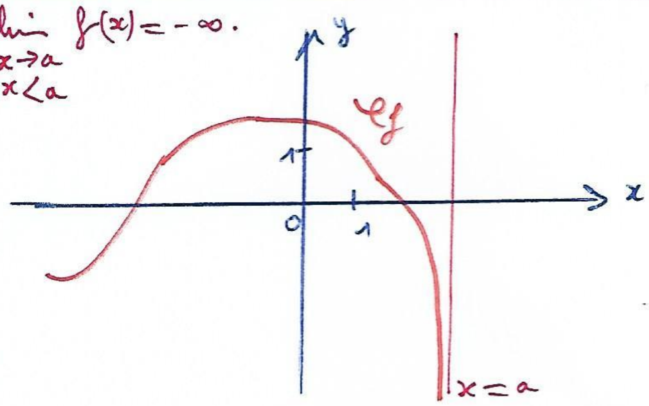

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$



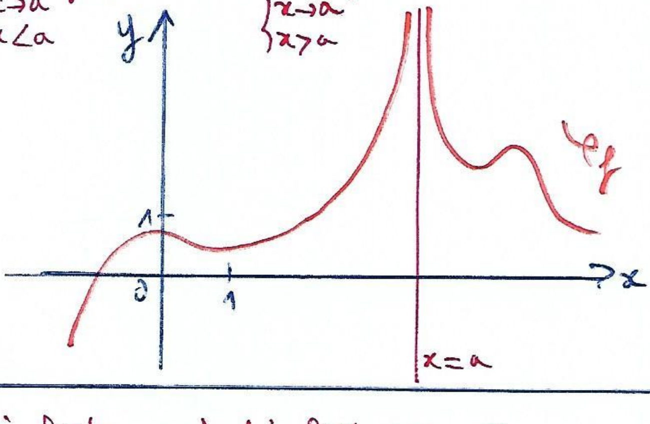

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$



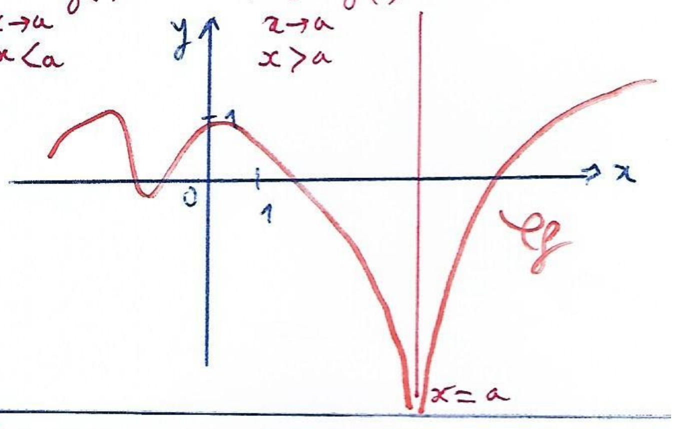

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$.



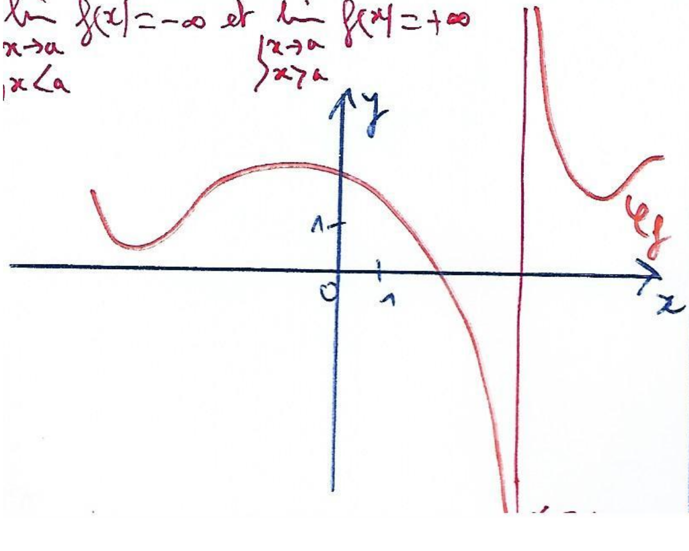

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$



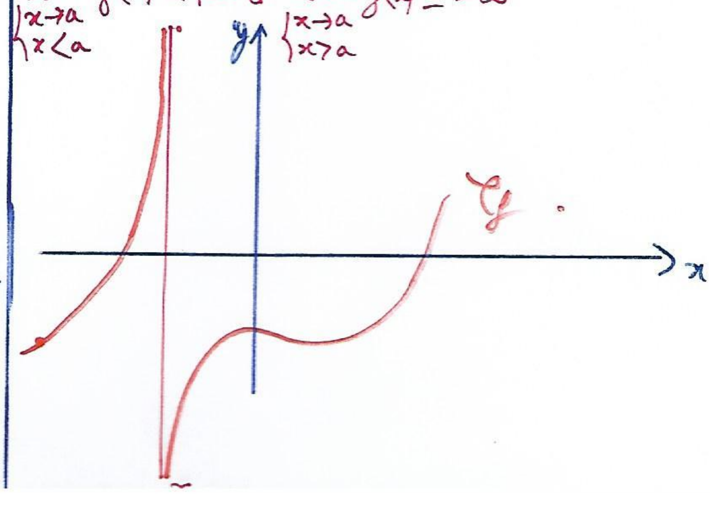

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$




$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

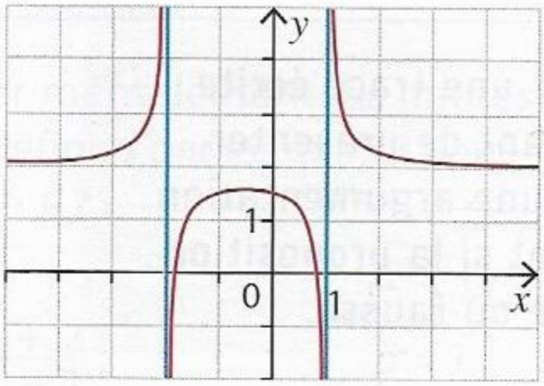



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$



***Exercice 3***

On a représenté ci-dessous une fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.




**1.** Conjecturer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

**2.** Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction $f$.

**3.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

✂-------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 4***

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $1$ |

**1.** Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

**2.** Donner les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction $f$.

**3.** Construire une courbe susceptible de représenter la fonction $f$.

**Exercice 5**

Donner une représentation graphique possible d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}-\{-4\}$ telle que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{\substack{x\to-4 \\ x<-4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4 \\ x>-4}} f(x) = +\infty$.

✂---------------------------------------------------------------------------------------

## III – Calculs de limites

### A – Opérations sur les limites

Toutes les règles sur les limites vues au chapitre *"suites"* se généralisent sans difficulté aux fonctions.

Les tableaux suivants résument les différents cas de figures :

$f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition.
$a$ désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et $\ell$, $\ell'$ désignent des nombres réels.

**A Somme et produit de deux fonctions : règles admises**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ldots$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \ldots$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI | $-\infty$ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots$ | $\ell$ | $\ell>0$ | $\ell>0$ | $\ell<0$ | $\ell<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ldots$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = \ldots$ | $\ell\times\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Donnons quelques exemples de formes indéterminées pour la somme et le produit :

**Exercice 6**

Calculer les limites suivantes.

1) a. $\lim\limits_{x\to-\infty} (7x^3-9x^2+2)$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x<0}} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+7x+1)$

2) a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(2-x)$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} (x-3)\left(2-\dfrac{1}{x}\right)$ c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-e^x)(2+e^x)$

3) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de : $f(x) = e^x + e^{-x}$, puis de $g(x) = x(1+e^{-x})$.

**_Exercice 7_**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

*a*) Expliquer pourquoi on est ici en présence d'une forme indéterminée pour la limite de $f$ en $+\infty$.

*b*) Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

*__Remarque__* : lorsqu'on est en présence d'une *FI*, on ne peut pas conclure directement. Pour lever l'indétermination, on utilisera les transformations d'écriture vues au chapitre sur les suites (en particulier, la technique de factorisation, puis de simplification, ces deux étapes lèvent souvent l'indétermination !).

## B Quotient de deux fonctions : règles admises

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$ | $\ell'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$ | $\ell > 0$ ou $+\infty$ | $\ell < 0$ ou $-\infty$ | $\ell > 0$ ou $+\infty$ | $\ell < 0$ ou $-\infty$ | 0 |
| et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$ | 0 en restant positif | 0 en restant positif | 0 en restant négatif | 0 en restant négatif | 0 |
| alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |

Donnons quelques exemples de formes indéterminées pour le quotient :

**_Exercice 8_**

$f$ est définie sur $]2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-2}$

*a*) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
*b*) Déterminer la limite de $f$ en 2. Interpréter graphiquement ce résultat.
*c)* Déterminer la limite de $f$ en 4.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

**_Exercice 9_**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{6x^2+3x-5}{2x^2+7}$.

Démontrer que la droite d'équation : $y = 3$ est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$ et également en $-\infty$.

## B – Composition et limites

Une composée de deux fonctions est un enchaînement de ces deux fonctions l'une après l'autre.

Par exemple, soit la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

L'expression *f(x)* s'obtient en appliquant à $x$ la fonction $u$ définie sur ℝ par : $u(x) = x^2 + 1$ suivie de la fonction racine carrée notée $v$ définie par $v(X) = \sqrt{X}$ .

*Schéma :*

On a donc : $f(x) = v(u(x))$, on dit que $f$ est la composée de $u$ suivie de $v$.

***Théorème* (limite de composée de fonctions)**

**Soit $f$ et $g$ des fonctions que l'on peut faire s'enchaîner.**
**$a$, $b$ et $c$ désignent soit des nombres réels, soit +∞, soit -∞.**

**Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ **et si** $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$**, alors** $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ldots$.

Ce théorème assez intuitif est admis, une preuve rigoureuse sera donnée l'année prochaine.

**Exercice 11**

Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+e^x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} e^{\frac{2x}{x-3}}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ .

✂------------------------------------------------------------------------------------

Prouvons maintenant grâce au théorème de composition des limites que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

**Exercice 12**

1) $f$ est définie sur ℝ par : $f(x) = e^{2x+1}$.
Déterminer la limite de $f$ en +∞ et la limite de $f$ en -∞.

2) $h$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Déterminer la limite de $h$ en : +∞ ; -∞ ; 0 (on distinguera les limites à gauche et à droite en 0).

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+4}{2x+1}}$ .

## C – Théorèmes de comparaison et limites

***Théorème de comparaison***

Soit $f$ et $g$ deux fonctions.

Si pour $x$ suffisamment grand, $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors ...............................

Si pour $x$ suffisamment grand, $f(x) \leq g(x)$, et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors ...............................

***Illustration*** :

***Remarque*** : ce théorème s'étend sans problème lorsque $x$ tend vers $-\infty$ en changeant le premier point de la condition en : pour $x$ suffisamment petit, ou encore même lorsque $x$ tend vers un réel $a$.

***Exemple*** : 1) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ où $f(x) = x^2 + \cos(x)$.
2) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} (5x - 3\sin(x))$ 3) $\lim_{x \to +\infty} (e^x(3 + 2\sin(x)))$

***Question*** : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, peut-on en déduire que $f$ est croissante à partir d'un certain stade ?

✂-----------------------------------------------------------------------------

Un calcul de limite ne permet JAMAIS de prévoir le sens de variation d'une fonction !

***Théorème des gendarmes***

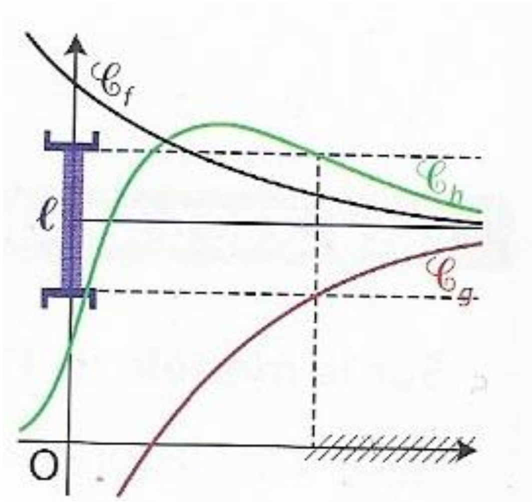
Soit $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme : $]a\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ b]$. ($a$ et $b$ désignent des réels, ou bien $+\infty$ pour $b$, et $-\infty$ pour $a$), et enfin, soit **$\ell$ un <u>réel</u>**.

Si pour $x$ suffisamment grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$
Alors, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \cdots$

De même, on a l'énoncé analogue suivant :

Si pour $x$ suffisamment petit, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \ell$
Alors, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \cdots$

***Illustration*** :




***Remarque*** : Retenez que pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut que 3 conditions soient remplies :

- Avoir l'encadrement $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de $+\infty$.
- Que les fonctions $g$ et $h$ admettent des limites **finies** en $+\infty$.
- Que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$

Mêmes conditions au voisinage de $-\infty$ et en un point.

***Exercice* 13**

*1)* $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \geq 1$ : $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$

Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes, et interpréter graphiquement les résultats obtenus :

*a*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ; *b*) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ où $g(x) = (e^{-x}\cos(x)+2)$

✂-----------------------------------------------------------------------------------

## *D- Croissances comparées et nouvelles limites*

A l'aide d'étude de fonctions, démontrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

**1.** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

**a)** Étudier les variations de $f$.

**b)** En déduire que pour tout réel $x$, $e^x \geqslant x + 1$.

*c)* En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ (nouvelle justification).

♥♥♥ ***Propriété de croissances comparées***♥♥♥ **(BAC !!)**

1) ♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots\ldots$ ♥♥♥

2) ♥♥♥ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \ldots\ldots$ ♥♥♥

***Preuve du 1) :***

**2.** $g$ est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}x^2$.

**a)** Déterminer la fonction dérivée de $g$. Déduire de la question **1.** que $g$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**b)** En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Preuve du 2) : On se ramène au cas 1) :

✂-------------------------------------------------------------------------------------

***Propriété (croissance comparées)***

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \ldots.$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = \ldots\ldots$

***Remarque*** : ces deux résultats contiennent ceux de la propriété précédente ($n = 1$ dans cette dernière !).

Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{100}} = \ldots\ldots$

***Exercice 14***

1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$

2*a*) $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x^4$ .Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

2*b*) Déterminer la limite de la fonction $k$ en $+\infty$ où $k(x)=x+2 - e^x$ .

3) $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 2x + 3$.

*a*) Vérifier que pour $x > 0$, $g(x) = x^2(\dfrac{e^x}{x^2} - 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2})$ . En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.

*b*) Déterminer la limite de $g$ en $-\infty$.

## *Exercices de synthèse de type bac*

### *Exercice I*

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2e^x+1}{e^x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

**1.** Calculer la limite de $f$ en 0.

**2. a.** Montrer que pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2+e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

**b.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

**3.** Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes.
En donner une équation.

**4. a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$.

**b.** En déduire le sens de variation de $f$.

5) Etudier la position relative de $C_f$ et de son asymptote en $+\infty$.

6) Donner le portrait-robot de $C_f$.

✂-------------------------------------------------------------------------------

### *Exercice II*

La taille d'une population de rongeurs exprimée en centaines d'individus, est modélisée par la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t}+2}$, où $t$ représente le temps écoulé depuis l'année 2015, exprimé en années.

**1. a.** Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

**b.** Montrer que : $f(t)=3-\dfrac{6}{e^{0,5t}+2}$.

**c.** En déduire la limite de $f$ quand $t$ tend vers $+\infty$.

**2. a.** Montrer que pour tout réel $t$ de $[0\,;+\infty[$,

$$f'(t)=\frac{3e^{0,5t}}{\left(e^{0,5t}+2\right)^2}.$$

**b.** Établir le tableau de variation de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

**3.** Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction rongeur retourne l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 rongeurs.

```
from math import*
def rongeur():
    t=0
    p=1
    while ........:
        t=t+1
        p=3*exp(0.5*t)/(exp(0.5*t)+2)
    return(........)
```

***Exercice III***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{ax+b}$, où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.

Les points $B(100\ ;\ 100)$ et $C\left(50\ ;\ \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ appartiennent à la courbe de $f$.

1. Expliquer pourquoi le couple $(a\ ;\ b)$ est solution du système $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -0{,}5 \end{cases}$.
2. Résoudre le système et en déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) = xe^{0{,}01x-1}$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout réel $x$, on a :
$$f(x) = \frac{100}{e} \times 0{,}01xe^{0{,}01x}.$$
5. En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.
6. Dresser le tableau de variation de $f$.

Interpréter graphiquement le résultat de la question 5).