« L'essence des mathématiques c'est la liberté. » Georg Cantor

Chapitre IV **Probabilités : épreuves indépendantes et loi binomiale**

I-Rappels de première

A-Variables aléatoires et espérance

Variable aléatoire discrète

Définir une **variable aléatoire discrète** X pour une expérience aléatoire d'univers Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

La **loi de probabilité de** X associe à chaque valeur prise par X une probabilité :

Valeur prise x_i	x_1	...	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

L'espérance mathématique* (*on dit simplement espérance*)** d'une variable aléatoire X correspond à ***la valeur moyenne prise par X si on répète l'expérience aléatoire associée à X un grand nombre de fois. On note $E(X)$ l'espérance de X.

Avec la loi de probabilité donnée par le tableau précédent, on a :

♥♥♥ $E(X)$ = ………………………………………………………. = ♥♥♥

Dans le cas d'un jeu d'argent, l'espérance correspond au …………………………………………………….

…………………………………………………

Un ***jeu*** est qualifié d'***équitable*** si l'espérance de la variable aléatoire égale au gain du joueur est ……………..

Exercice 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée ci-contre.

a. Déterminer la valeur de p.

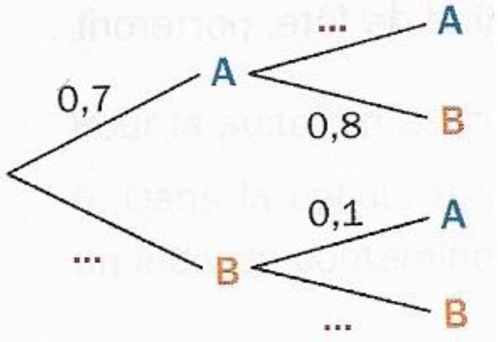
b. Calculer la probabilité des évènements $\{X \leq 2\}$, $\{X \geq 3\}$ et $\{2 \leq X \leq 4\}$.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	p	$3p$

c. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 2

a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous, qui représente une expérience aléatoire.



b. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'évènement A se réalise.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer E(X) et interpréter cette dernière.

✂---

B – Propriétés usuelles en probabilités

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre ….. et ……..

Lorsque chaque issue d'une expérience aléatoire a même chance de réalisation, on parle de situation ………………………

Dans ce cas, si A désigne un événement de l'univers des possibles Ω, on a :

$p(A)$ = ……….. ……………………………………….……..

Pour tout événement A, $\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A, et on a : $p(\bar{A})$ = …………………

Pour tout événement A et B d'un même univers Ω, $p(A \cup B)$ = ……………………

Dans le cas où ***A*** **et** ***B*** **sont** ***incompatibles*****, c'est-à-dire lorsque** $A \cap B$ = … on a : $p(A \cup B)$ = ……

💣 En général, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ 💣 .

Exemple : On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit A l'événement : obtenir un résultat pair, et B l'événement : obtenir un nombre premier.
Déterminer A, B, $A \cap B$ puis la probabilité de chacun de ces événements.

A-t-on : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$?

C – Probabilités conditionnelles

1) Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, et A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B, sachant que A est réalisé, est notée $p_A(B)$, avec, par définition :

♥♥♥ $p_A(B) =$ …………………… = …………………………..♥♥♥

Cette relation des probabilités conditionnelles, donne un moyen de calculer la probabilité de l'intersection de deux événements :

Si $p(A) \neq 0$, on a : $p(A \cap B) =$ …………………...

Remarque : Dans les exercices, on détecte la présence de probabilités conditionnelles grâce aux termes suivants : ***sachant que, parmi, si*** ……ou tout simplement quand l'énoncé donne une information de conditionnement : par exemple : "…on choisit une personne malade. Quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ? …" Ici la personne choisie l'est ***parmi*** les personnes malades !

Exemple

Dans une population donnée, 65 % des personnes possèdent un téléphone portable de marque *PHONEI* et 32 % des personnes possèdent un ordinateur de marque *PROMAC*.

De plus, 13 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre au hasard une personne de cette population.

On considère les évènements :

T : *" la personne rencontrée possède un téléphone portable PHONEI "*

O : *" la personne rencontrée possède un ordinateur PROMAC "*

0) Traduire en termes de probabilités les données chiffrées de l'énoncé.

a) Déterminer la probabilité de rencontrer une personne qui a un ordinateur *PROMAC* sachant que cette dernière possède un téléphone portable *PHONEI*.

b) Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable *PHONEI* sachant qu'elle a un ordinateur *PROMAC.*

✂---

2) Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple précédent, et modélisons l'expérience aléatoire par un arbre de probabilités, encore appelé arbre pondéré :

Remarques fondamentales concernant les arbres pondérés (à deux niveaux) :

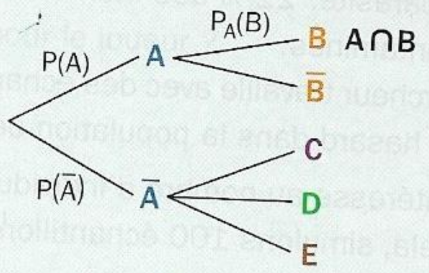
- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est appelée la racine de l'arbre.
- Les branches (= segments) partant de la racine sont appelées branches primaires de l'arbre.

- Ces dernières mènent à des nœuds où est écrit un événement avec une lettre majuscule.

- Les branches partant de nœuds sont appelées branches secondaires.

- ***Sur chaque branche secondaire, figurent des probabilités CONDITIONNELLES***.

- On peut représenter une **succession d'épreuves quelconques** par un **arbre pondéré**.
- Dans l'arbre ci-contre, le **chemin A suivi de B** représente l'intersection des évènements A et B. Cette intersection est notée **A ∩ B**.
- Les probabilités portées sur les branches du second niveau sont des **probabilités conditionnelles**.



3) Indépendance

Définition : Deux événements A et B d'un même univers Ω sont dits ***indépendants*** pour la probabilité p, lorsque la réalisation (ou non réalisation) de A n'influence pas la réalisation (ou non réalisation) de B.

Nous allons "mathématiser" cette définition :

Dire que A et B sont des événements indépendants signifie que :
♥♥♥♥..♥♥♥♥

Propriété

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants équivaut à dire que :

La propriété fait donc le lien entre événements indépendants et probabilités conditionnelles.

Preuve :

Attention : indépendants et incompatibles, ce n'est pas du tout la même chose !

Exercice 3

A et B sont deux évènements qui vérifient :
$P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.

a. Calculer les valeurs de $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

b. Calculer $P(A \cup B)$.

c. A et B sont-ils indépendants ?

✂---

4) Formule des probabilités totales

Définition : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille d'événements ***non impossibles*** et ***deux à deux incompatibles*** d'un même univers Ω.

Lorsque ***la réunion de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est égale à Ω***, on dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***forment une partition de l'univers Ω.***

Illustration :

*Propriété (appelé **formule des probabilités totales**)*

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B de Ω, on a :

$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots\ldots\ldots\ldots + p(A_n \cap B)$.

Remarque : Cela n'est que la traduction mathématique du dernier point concernant les arbres !

Dans les exercices, cette dernière sera le plus fréquemment utilisée avec $n = 2$ ou $n = 3$:

Si A et $\bar{A}$ sont des événements de probabilité non nulle, ils forment une partition de Ω, et donc, pour tout événement B, on a :

$p(B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

C'est essentiellement sous cette forme que nous utiliserons la formule des probabilités totales.

Remarques clé concernant les arbres de probabilité :

- Loi des nœuds : la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours …………………………..

- La probabilité associée à un chemin est égale au …………….. des probabilités figurant sur les branches de ce chemin.

  Par exemple, $p(A \cap B)$ = ……………………. ; $p(A \cap B \cap C)$ = …………………….

- Enfin, la probabilité d'un événement est égale à …………………. des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement : c'est la formule des probabilités totales !

Exercice 4

Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes.

De plus, parmi les garçons, 76 % sont externes. On choisit au hasard un élève du lycée.

On note : F l'événement : " l'élève choisi est une fille".

E : "l'élève choisi est externe"

a) Traduire ces données à l'aide de probabilités.

b) Faire un arbre de probabilités.

c) Calculer la probabilité d'avoir choisi une fille qui est externe.

d) Calculer la probabilité d'interroger un élève externe.

e) Calculer la probabilité d'interroger une fille sachant qu'on a interrogé un élève non externe.

✂---

Exercice 5 *(issu de bac)*

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

II- Succession d'épreuves indépendantes

Définition

Lors d'une succession d'épreuves aléatoires, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend d'aucune des issues des épreuves précédentes, on dira qu'on a à faire à des épreuves indépendantes.

Exemple 1 : on considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à six faces puis une pièce de monnaie non truquée. Le lancer du dé n'influe pas sur le lancer de la pièce : ces deux épreuves sont ***indépendantes***.

L'univers de la $1^{\text{ère}}$ épreuve :

……………………………………………………………………………………………

L'univers de la seconde :

………………………………………………………………………………………………

L'univers de cette expérience aléatoire :

…………………………………………………………………………….

……

……

………………………….

Remarque : On peut représenter la situation par un arbre pondéré.
Chacune des issues associées à cette expérience aléatoire a pour probabilité de réalisation :

Définition - vocabulaire

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le ***produit cartésien*** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ (lire A croix B), constitué des couples $(x\,;y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.

On note cela formellement : $A \times B = \{(x\,;y),\ x \in \text{A},\ y \in \text{B}\}$.

Si $A = B$, on notera : $A \times A = A^2$. Par exemple : $\mathbb{R}^2 =$

………………………………………………………………………………………………

On définit également sans problèmes le produit cartésien de plus de deux ensembles.
Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots\ldots, \Omega_n$, l'univers Ω des possibles de cette succession de n épreuves indépendantes est le produit cartésien suivant : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots\ldots \times \Omega_n$.

Les issues de Ω sont les n-uplets $(x_1\,;x_2\,;\ldots\ldots;x_n)$ où pour tout entier i compris entre 1 et n, $x_i \in \Omega_i$.

Propriété (admise)

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité de réalisation d'une issue (x_1 ; x_2 ; …..; x_n) est égale AU…………………….des probabilités de réalisation de ses composantes x_1, x_2,…….,x_n.

Autrement dit pour l'arbre : la probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.

Exemple 2

Une entreprise de transport possède trois camions. Une étude sur une période donnée de l'état de fonctionnement des camions a montré que, un jour donné, la probabilité qu'un camion soit en panne est égale à 0,05. On admet que la panne d'un camion est indépendante des pannes survenues antérieurement et de celles des autres camions.

a) Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en état de fonctionnement.

b) Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en panne.

c) Les événements :" tous les camions fonctionnent" et "tous les camions sont en panne" sont-ils contraires l'un de l'autre ?

✂---

***Exercice 6* (*important*)**

Une urne contient 3 boules vertes et 7 boules noires.

On tire au hasard, successivement avec remise, trois boules de l'urne (l'une après l'autre).

On note naturellement : V_i l'événement " extraire une boule verte de l'urne au $i^{ème}$ tirage " et N_i l'événement "extraire une boule noire de l'urne au $i^{ème}$ tirage ".

a) Faire un arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

b) Déterminer la probabilité d'extraire :

i) Deux boules noires lors des deux premiers tirages puis une boule verte au dernier tirage.

ii) Trois boules de même couleur.

♥ *On retiendra que lors de **tirages avec remise**, on a une **succession d'épreuves aléatoires indépendantes** !* ♥

III- Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition

Une ***expérience aléatoire*** qui ***a deux issues possibles*** (une est appelée succès, l'autre est appelée échec) est appelée une ***épreuve de Bernoulli***.
En général, l'issue correspondante au succès est notée S, et l'issue correspondante à l'échec est donc $\bar{S}$(événement contraire de S), parfois notée *E*.

Le ***paramètre p d'une épreuve de Bernoulli*** n'est autre que ***la probabilité de l'issue succès***.
$p = p(S)$. On a nécessairement : $0 < p < 1$ (en particulier, p ne peut pas être égale à 0 ou 1 !).

Arbre associé à une épreuve de *Bernoulli* :

Les épreuves de Bernoulli sont parmi les expériences aléatoires les plus couramment rencontrées :

Exemples

i) Dans un jeu de 32 cartes comportant 4 as on pioche au hasard une carte.
Il y a 32 issues possibles, donc cette expérience aléatoire n'est pas une épreuve de *Bernoulli*.

Cependant, en prenant comme succès l'événement S : *"Piocher un as"*, cette expérience aléatoire constitue une épreuve de *Bernoulli* de paramètre $p = \ldots\ldots$
L'échec est ici : ………………………………………………………..

ii) Un internaute regarde une vidéo, et peut lui attribuer un pouce vert 👍, un pouce rouge 👎 ou ne rien faire.

L'expérience consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert, un pouce rouge, ou ne fait rien n'est pas une épreuve de *Bernoulli* car………………………………………………………………………
Par-contre, l'expérience aléatoire consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert ou non est une épreuve de *Bernoulli* (par exemple le succès est ici attribuer un pouce vert).
On ne dispose de pas assez de données pour déterminer son paramètre.

Loi de Bernoulli

Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès, et la valeur 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de X, c'est-à-dire le ***tableau à deux lignes*** donnant en première ligne les valeurs prises par X, et en seconde ligne les probabilités associées à ces valeurs, est appelée loi de *Bernoulli* de paramètre p.
On a donc :

$X=x_i$		
$p(X=x_i)$		

Calculer l'espérance de X.

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On pioche au hasard une boule de l'urne. On appelle succès le fait de piocher une boule noire.

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon.

Donner le nom de X, préciser son paramètre.

Définition (***schéma de Bernoulli***)

Soient ***n un entier naturel non nul***, et p un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

L'expérience aléatoire qui consiste à ***répéter n fois***, ***une même épreuve de Bernoulli*** de paramètre p, ***de façon indépendante***, est appelée un ***schéma de Bernoulli de paramètres n et p.***

Une issue de cette expérience aléatoire est une liste de n lettres prises parmi S et $\overline{S}$, du type $(S, \overline{S}, \overline{S}, \ldots, S)$.
L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{S, \overline{S}\}^n$

Exemples

Lancer 10 fois d'affilée une même pièce de monnaie non truquée, et à chaque lancer, est appel succès le fait d'obtenir pile.
On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres : ………………………………………………………………..

Un joueur de basket réalise trois lancers de façon indépendante.
A chaque lancer, la probabilité qu'il marque un panier est égale à 0,85.

Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres.

Faire un arbre de probabilité associé à cette situation.

Remarque : sur un arbre de probabilité, on détecte très facilement si la situation étudiée s'apparente ou pas à un schéma de *Bernoulli* : ………………………………………………………………………………….

IV-Lois binomiales

Définition

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

On considère un schéma de *Bernoulli* de paramètres n et p.

Soit ***X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces n-épreuves.***

La loi de probabilité de cette variable aléatoire X est appelé la ***loi binomiale de paramètres n et p***, notée $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ (n'a rien à voir avec une certaine banque...).

On dit aussi que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on notera :
X est parfois aussi appelée ***la loi du nombre de succès***.

Exemple : On lance 10 fois d'affilée une même pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où l'on obtient pile.

La variable aléatoire prend pour valeurs tous les nombres entiers compris entre ….. et …..

X suit donc la loi …………………………………………………….

Voici quelques questions bien légitimes que tout un chacun se pose naturellement :

- Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 piles lors des 10 lancers ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir moins de piles que de faces ?

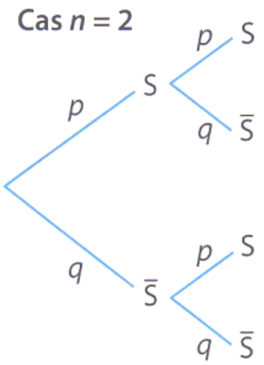
Un peu de théorie va nous permettre de répondre à ces questions.

A-Coefficients binomiaux

Définition : soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, et k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

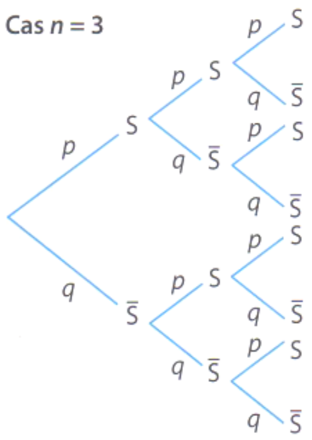
On appelle ***coefficient binomial***, ou ***combinaison de k parmi n***, ***le nombre de chemins conduisant à k succès lors de n répétitions d'une même épreuve de Bernoulli*** sur l'arbre représentant l'expérience.
Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit " k parmi n ".

Exemple : Grâce aux arbres suivants associés à des schémas de Bernoulli de paramètres 2 et p (respectivement 3 et p), déterminer chacun des coefficients binomiaux suivants :



$\binom{2}{0} =$; $\binom{2}{1} =$; $\binom{2}{2} =$

Cas $n = 3$



$\binom{3}{0} =$; $\binom{3}{1} =$; $\binom{3}{2} =$; $\binom{3}{3} =$

Propriété **: *premières propriétés sur les coefficients binomiaux***

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

$\binom{n}{0} =$

$\binom{n}{n} =$

$\binom{n}{1} =$

$\binom{n}{n-k} =$

Remarque : au chapitre " ***combinatoire et dénombrement*** " on verra une expression permettant de calculer les coefficients binomiaux rigoureusement.

Sinon, en attendant, momentanément, avec la CALCULATRICE :

- Coefficients binomiaux :

TI : math puis PRB puis Combinaison // Casio : Optn choix PROB puis nCr

Numworks : calculs, touche valise, probabilité, dénombrement, et choisir $\binom{n}{k}$ en faisant entrée

Exemple : $\binom{10}{4} =$...

$\binom{12}{5} =$

Propriété phare

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

1) Les valeurs prises par X sont :

2) ♥♥♥♥Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k)$ = ...♥♥♥♥

3) L'espérance de X est ♥♥♥♥E(X) = ... ♥♥♥♥

Idée de justification pour le point 2) :

__Exemple__

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On pioche au hasard, successivement et avec remise, une boule de l'urne, trois fois d'affilée.

Pour chaque tirage, on appelle succès le fait de piocher une boule noire.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues lors de ces trois tirages.

a) Nommer la loi de probabilité associée à X en précisant ses paramètres.
b) Donner la loi de probabilité de X.

✂---

__Exercice 7__

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

1) Exprimer plus simplement :

a) $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)$
b) $p(X\leq 10)+p(X=11)$
c) $p(X\leq 13)-p(X\leq 7)$
d) $p(X\geq 5)-p(X\geq 11)$

2) Ecrire à l'aide de X chacun des événements suivants :
a) obtenir au moins 3 succès
b) obtenir plus de 15 succès
c) obtenir moins de 21 succès
d) obtenir au plus de 5 succès.

✂---

__Remarques importantes__ :

L'expression de $P(X=k)$, lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ se calcule facilement à l'aide de la calculatrice grâce à la séquence suivante :

♥♥♥♥♥ ***P(X=k)*** =

__TI__ : $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{\text{var}}$ puis ***binomFdp*** (et ensuite dans l'ordre : n, p, k).
__Casio__ : OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis Bpd
__Numworks__ : menu calcul, puis valise, puis probabilités, puis choisir Binomiale, et enfin binompdf(m,n,p) : m = nombre de succès voulus, joue le rôle de k ici.

De même, une autre fonction de cumul est implantée sur la calculatrice, qui sait également facilement calculer $\boldsymbol{P(X\leq k)}$ en tapant :

♥♥♥♥♥ $\boldsymbol{P(X\leq k)}$ =

TI : $\boxed{2^{\text{nde}}}$ $\boxed{\text{var}}$ puis binomFRép(et ensuite dans l'ordre : n, p, k.
Casio : OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis BCD.
__Numworks__ : menu calcul, puis valise, puis probabilités, puis lois de probabilités, puis choisir Binomiale, et enfin binomcdf(m,n,p) : m = nombre de succès voulus, joue le rôle de k ici.

💣 Dans les autres cas de figure, il faudra *"ruser"* pour obtenir $p(X>k)$ ou $p(X<k)$ ou encore $p(X\geq k)$, qui ne se calculent pas directement à l'aide de la machine ! 💣
Ceux qui ont une numworks peuvent par contre directement faire le calcul en allant au menu probabilités.

Exemple : soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres : $n = 50$ et $p = 0{,}23$.
Calculer, en arrondissant à 10^{-4} près :
$p\,(X = 10)$; $p(X\leq 12)$; $p(X\geq 5)$; $p(4\leq X\leq 9)$

✂--

Exercice 8

Reprenons l'exemple qui suit la définition d'une loi binomiale :

On lance 10 fois d'affilée une même pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où l'on obtient pile.

a) Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 piles lors des 10 lancers ? Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième près.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces ? Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4} près.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile lors de ces 10 lancers ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir moins de piles que de faces ? Arrondir à 10^{-3} près.

e) Déterminer la valeur de : $p(1<X\leq 3)$ arrondie au centième près.

f) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile et au moins un face au cours des 10 lancers ?

***Remarque* : bien retenir la procédure pour le cas récurrent dans les exercices du calcul de $p(X\geq 1)$.**

✂--

Exercice 9

Un *QCM* est composé de 20 questions avec une seule réponse correcte parmi les quatre proposées à chaque question.

Matt adopte comme stratégie de répondre au hasard à chacune des 20 questions.

On note X la variable aléatoire égale à la note obtenue par *Matt* à ce *QCM*.

0) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X.
Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis au millième près :

a) Déterminer la probabilité que *Matt* ait exactement 3 bonnes réponses.
b) Déterminer la probabilité que *Matt* ait au moins une bonne réponse.
c) Déterminer la probabilité que *Matt* ait moins de 7 bonnes réponses.
d) Déterminer la probabilité de l'événement K suivant : "*Matt* a plus de réponses fausses que de bonnes réponses".

2) Déterminer le nombre moyen de bonnes réponses obtenu par *Matt* à ce *QCM*.

Exercice 10 déterminer le plus petit entier k tel que $p(Y \leq k) \geq a$, à l'aide de la calculatrice.

Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}63$.
Déterminer le plus petit entier k tel que $p(Y \leq k) \geq 0{,}95$.

On "tabule" la fonction $k \longmapsto p(Y \leq k)$:

Pour la TI : dans $f(x)$, binomFRép(50, 0.63, X). Pour la Casio : 7 : Table…Y1 = BinomialCD(x,50,0.63)
Pour Numworks : regarder sur internet, je n'ai pas réussi à trouver !
✂---

Exercices de synthèse issus de textes de baccalauréat

Exercice I

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

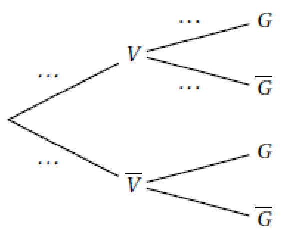
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

c. Calculer l'espérance mathématique de X et interprétez le résultat obtenu.

✂---

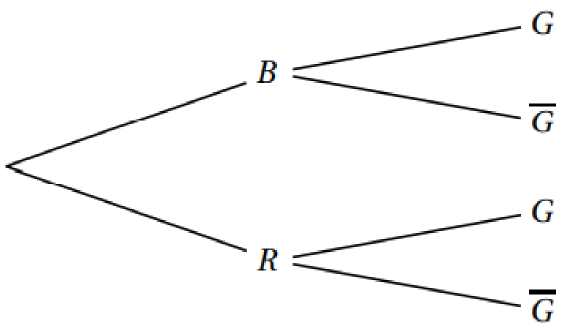
Exercice II

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. a. Montrer que $P(G) = 0,4$.
   b. Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue?
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

c. Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.

A ce stade de l'année, on s'aidera de l'algorithme suivant que l'on complétera :

```
def seuil():
    n=...
    while ......................:
        n=.....
    return (...)
```

✂---

Exercice III

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
On note :

- V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'évènement « Paul rate son train ».

a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\dfrac{7}{150}$.

c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.
On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice IV

Un joueur a une addiction à un jeu vidéo…On suppose que :

- S'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à $\frac{1}{4}$.
- S'il perd une partie, la probabilité de perdre la suivante est égale à $\frac{1}{2}$.
- La probabilité de gagner la première partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement : *" le joueur gagne la $n^{ième}$ partie"*.

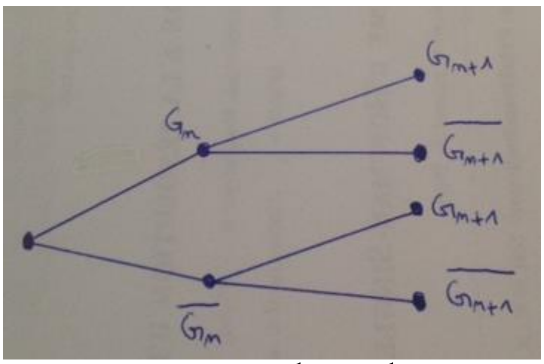
Enfin, on note u_n la probabilité de l'événement G_n.

0) Déterminer la valeur de u_1.

1a) En détaillant votre démarche, démontrer que $u_2 = \frac{7}{16}$.

1b) Un joueur a perdu la seconde partie. Déterminer la probabilité qu'il ait gagné la première partie.

2a) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}$.

3) On définit, pour tout entier $n \geq 1$ la suite (V_n) par : $V_n = u_n - \dfrac{2}{5}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, et déterminer la valeur de son premier terme.

b) Exprimer alors, pour tout entier $n \geq 1$, V_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$.

d) Déterminer la limite de (u_n). Interprétez concrètement ce résultat dans la cadre de la situation étudiée ici.

✂--

Exercice V

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

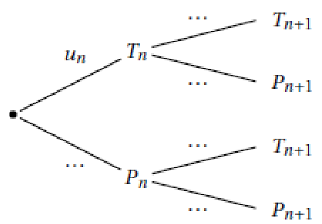
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. **a.** Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

   b. Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

   c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



   d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.

   e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

   b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1. e.**?

Exercice VI

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé.
Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification.

Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est $0,6$.

- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés.

Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.
Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n° 1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80 % des cas.

Condition n° 2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.
Le jeu peut-il être retenu ?

Exercice VII

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

Exercice VIII

Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

— L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,6 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,3.

— Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à 0,3 ;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,2.

— Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;

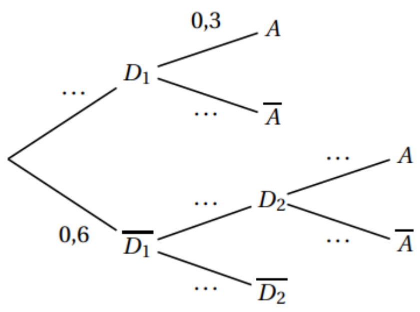
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » ;

A : « la personne achète le produit ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = 0,204$.
3. On sait que la personne a acheté le produit.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à 0,204.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
   a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.
   c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
   Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère désormais un échantillon de n personnes.
   Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice IX

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{3}{25}$ **c.** $\frac{7}{25}$ **d.** $\frac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives.
On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise.
On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\frac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à :

a. $0,859$ **b.** 0,671 **c.** 0,188 **d.** 0,187

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de $0,207$. Alors :

a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

---

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1 - \left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$