# *Chapitre IV* *Fonctions trigonométriques*

## *I – Cercle trigonométrique et radian*

### *A-Cercle trigonométrique*

Soit *(O ; I ; J)* un repère orthonormé du plan.

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$, de rayon 1, orienté avec la convention suivante :

Pour tout point M appartenant à $\mathcal{C}$, si ***pour aller du point I au point M, par le plus court chemin***, **en se déplaçant sur le cercle,** ***on tourne dans le sens trigonométrique (ou encore sens direct)*** **c'est-à-dire dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, on comptera** ***positivement*** **la mesure de l'angle formée par les vecteurs** $\overrightarrow{OI}$ ***et*** $\overrightarrow{OM}$, que l'on note $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$, sinon, on comptera négativement cette mesure.

L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ est appelé un angle orienté, le terme orienté signifiant qu'on tient compte du sens dans lequel on tourne pour rabattre $\overrightarrow{OI}$ sur $\overrightarrow{OM}$ par le plus court chemin !

***Illustrations*** **:**

.

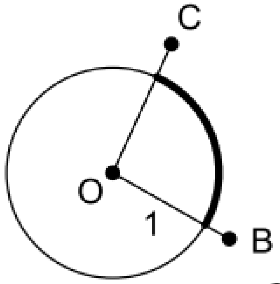
Enfin la notation $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ sera à présent souvent utilisée pour désigner la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, en tenant compte de l'orientation. Il est donc plus précis de parler de mesure d'angle orienté que de mesure d'angle géométrique.

### *B-Mesure d'angle exprimée en radian*

#### *Définition*

*Le radian est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle de rayon 1 centré en le sommet de cet angle.*

*Illustration* :




**Ici, la mesure en radian de l'angle $\widehat{BOC}$ n'est autre que la longueur de l'arc de cercle gras du cercle de centre $O$ et de rayon 1.**

1 radian est donc la mesure d'un angle interceptant, sur un cercle trigonométrique, un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon de ce cercle.

***Illustration*** :

***Exemples***

*Rappel : le périmètre d'un cercle de rayon R est égal à ……*

*Puisque la longueur d'un demi-cercle trigonométrique est égale à ……., on peut donc dire que :*

- Si $\widehat{IOM}$ =180°, alors $\widehat{IOM}$ = ………
- Si $\widehat{IOM}$ = 90°, alors $\widehat{IOM}$ = ………

**Propriété**

La mesure en degré et la mesure en radian d'un angle sont proportionnelles.

En particulier, **180° = …. rad**.

En utilisant la proportionnalité de la mesure en degré d'un angle et de celle en radian de cet angle on a le tableau suivant :

On retiendra :

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

| Mesure en degré | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 180 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mesure en radian | | | | | | $\pi$ |

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

***Exemples***

*a*) Convertir en radians : 1) 120° ; 2) 18° ; 3) 51° ; 4) 1°

*b*) Convertir en degré : $\frac{2\pi}{15}$ rad ; $\frac{\pi}{9}$ rad.

***Exercice 1***

Déterminer une relation donnant la longueur d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre $\alpha$ radians.

✂-----------------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 2***

Construire un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), puis construire rigoureusement les points *A, B, C* et *D* du cercle trigonométrique définis par :

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{3}$ rad ; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = \dfrac{-\pi}{2}$ rad ; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}) = \dfrac{2\pi}{3}$ rad ; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}) = \dfrac{-3\pi}{4}$ rad.

✂-----------------------------------------------------------------------------------------------

## *C-Enroulement d'une droite autour d'un cercle trigonométrique et conséquences*

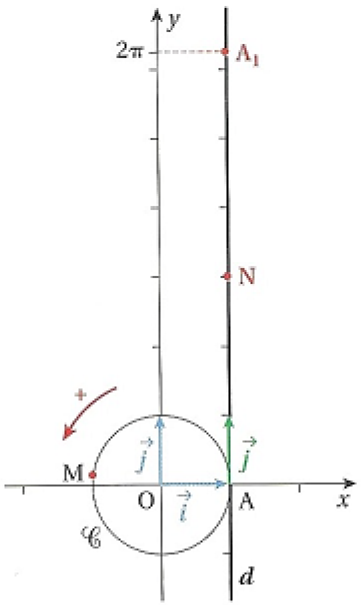
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $d$ la droite orientée, perpendiculaire à l'axe des abscisses, qui passe par A, **munie du repère $(A ; \vec{j})$.**
En « enroulant » cette droite $d$ autour du cercle $\mathscr{C}$, on obtient une correspondance entre un point N de la droite $d$ et un unique point M du cercle $\mathscr{C}$.

REMARQUE

Le point $A_1$ de $d$ d'abscisse $2\pi$ dans le repère $(A ; \vec{j})$ se retrouve ainsi en A. Cela correspond à un tour complet.

EXEMPLE

Sur le schéma ci-contre, le point N d'abscisse 3 sur la droite orientée $d$, se retrouve, après « enroulement » de $d$ sur $\mathscr{C}$, en M tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est égale à la longueur AN.




***Remarque*** *:* si un point d'abscisse $x$ de la droite $d$ se retrouve en $M$ après enroulement sur le cercle trigonométrique, alors, il en est de même pour les points de $d$ d'abscisses respectives ……………………………………………………………………………………

***Propriété***

**Un angle orienté a une infinité de mesures.**
**Si $x$ désigne l'une d'entre elles, les autres sont de la forme : $x + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.**

***En d'autres termes, deux mesures d'un même angle orienté diffèrent d'un multiple de 2π radians.***

$k$ représente le nombre de tours faits pour passer de $x$ à $x + k \times 2\pi$, en tenant compte du sens dans lequel on tourne : (le signe de $k$ l'indique).

*Définition*

*Parmi toutes les mesures d'un angle orienté donné, **celle comprise entre -π radian exclu et π radian inclus** est appelée la mesure principale de l'angle.*

On donnera systématiquement cette dernière dans les exercices.

***Exercice 3***

Donner la mesure principale de chacun des angles suivants :

$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = \dfrac{4\pi}{3}$ ; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = \dfrac{-7\pi}{6}$ ; $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC})$ $\dfrac{-3\pi}{2}$

✂------------------------------------------------------------------------------

## ***II - Trigonométrie***

### ***A-Définition du cosinus et du sinus***

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).
Soit $M$ un point appartenant à $\mathcal{C}$, et $x$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ : $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}) = x$ *rad.*

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

- ***L'abscisse du point M*** dans le repère ($O$ ; $I$ ; $J$) est appelée ***le cosinus du réel x***, on notera ***cos(x).***
- ***L'ordonnée du point M*** dans le repère ($O$ ; $I$ ; $J$) est appelée ***le sinus du réel x***, on notera ***sin(x).***

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

*Illustration :*

Ainsi, dans le repère ($O$ ; I ; J), $M$(……….. ; …………).

*Remarque*

Lorsque cela ne prête pas à confusion, on notera $\cos x$ aussi au lieu de $\cos(x)$, et $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$.

**Propriété (conséquences de la définition)**

***1) Pour tout réel x, …. ≤ cos(x) ≤ ….. et pour tout réel x, ….. ≤ sin(x) ≤ …..***

***2) Pour tout réel x, $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$. (Relation de Pythagore trigonométrique).***

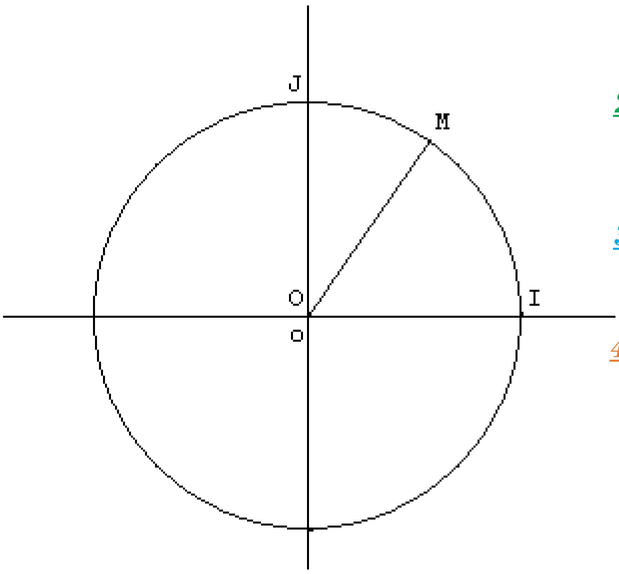
***3) Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.***

*Preuve :*

✂--------------------------------------------------------------------------------

## B- Signe du cosinus et du sinus

Signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ :




***1° quadrant*** : ***Si x*** $\in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, alors $\begin{cases}\cos(x) \geq 0\\ \sin(x) \geq 0\end{cases}$

***2° quadrant*** : ***Si x*** $\in [\frac{-\pi}{2}\,;0]$, alors $\begin{cases}\cos(x) \geq 0\\ \sin(x) \leq 0\end{cases}$

***3° quadrant*** : ***Si x*** $\in [-\pi\,;\frac{-\pi}{2}]$, alors $\begin{cases}\cos(x) \leq 0\\ \sin(x) \leq 0\end{cases}$

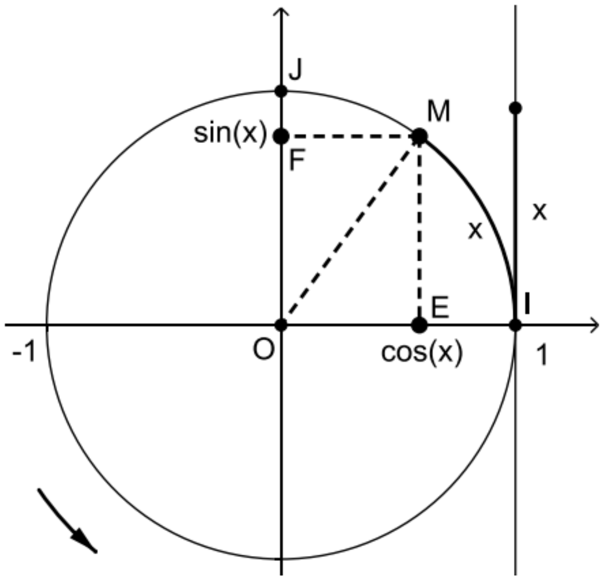
***4° quadrant*** : ***Si x*** $\in [\frac{\pi}{2}\,;\pi]$, alors $\begin{cases}\cos(x) \leq 0\\ \sin(x) \geq 0\end{cases}$

***Exercice 4***

1) Placer le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}) = x$, sachant que $x$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et que $\cos(x) = \frac{-3}{5}$.

2) Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$.

***Remarque importante :***




**Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle**

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$, donc $OE = \cos x$ et $OF = \sin x$ (avec les notations de la figure précédente).
Or dans le triangle rectangle $OEM$, on a

$$\cos \widehat{EOM} = \frac{OE}{OM} = \frac{OE}{1} = OE = \cos x$$

et

$$\sin \widehat{EOM} = \frac{EM}{OM} = \frac{OF}{OM} = \frac{OF}{1} = OF = \sin x.$$

Donc $\cos \widehat{IOM} = \cos x$ et $\sin \widehat{IOM} = \sin x$.

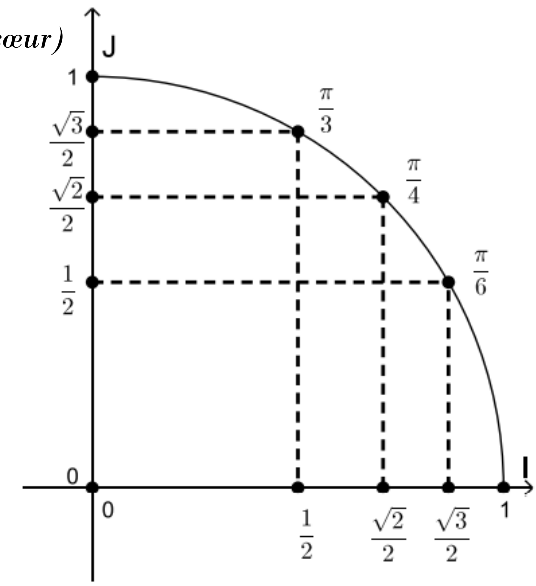
Les définitions du cosinus et du sinus d'un réel quelconque données dans ce chapitre sont cohérentes avec les définitions vues au collège du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

## C- Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

***Propriété*** : *Tableau des valeurs remarquables (à connaître par cœur)*

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

| $x$ (radians) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *cos(x)* | | | | | | |
| *sin(x)* | | | | | | |




♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

***Preuve :***

Pour $x = 0$ :

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ :

Pour $x = \pi$ :

Effectuons la démonstration pour $\frac{\pi}{4}$. Dans le triangle rectangle $OEM$, on a $\widehat{EOM} = 45°$, donc, en se rappelant que la somme des angles d'un triangle fait 180°, on en déduit

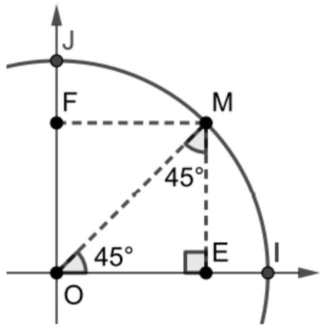
$$\widehat{EMO} = 180° - \widehat{MEO} - \widehat{EOM} = 45°$$

ce qui démontre que le triangle $EOM$ est un triangle isocèle en $E$, d'où $OE = EM$. En appelant $x$ cette longueur, le théorème de Pythagore donne $OE^2 + EM^2 = OM^2$, d'où l'équation sur $x$, puisque $OM = 1$ :

$$x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}.$$

Vu que $x > 0$, il vient $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi $\cos\frac{\pi}{4} = OE = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = EM = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.




Pour $x = \frac{\pi}{3}$ :

Pour $x = \frac{\pi}{6}$ :

## D– Cosinus et sinus d'angles associés

Expliquons d'abord que dans un repère orthonormé (O ; I ; J) :

***Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, alors………………***

***…………………………………………………………………………………………………………………***

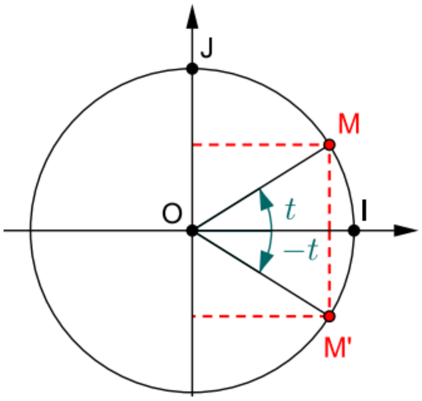
***Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, alors………………***

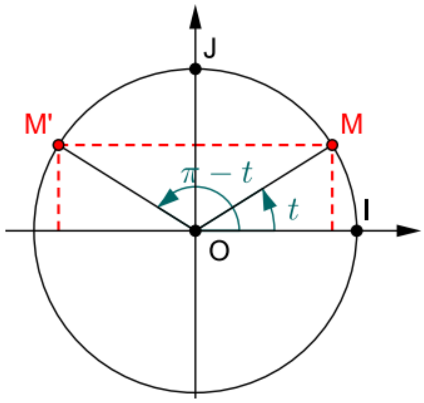
***…………………………………………………………………………………………………………………***

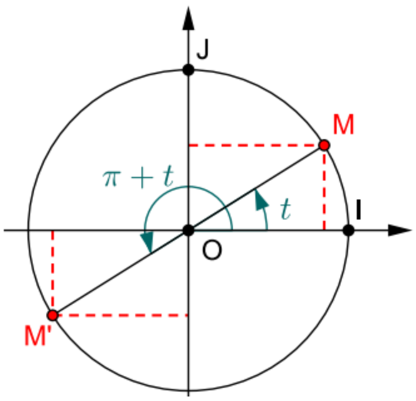
***Si deux points M et M' sont symétriques par rapport à l'origine O, alors…………………………***

***…………………………………………………………………………………………………………………***

Pour tout réel $t$, on a les égalités suivantes.



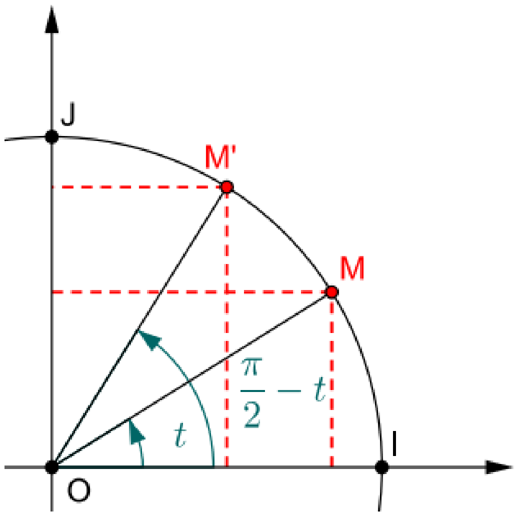



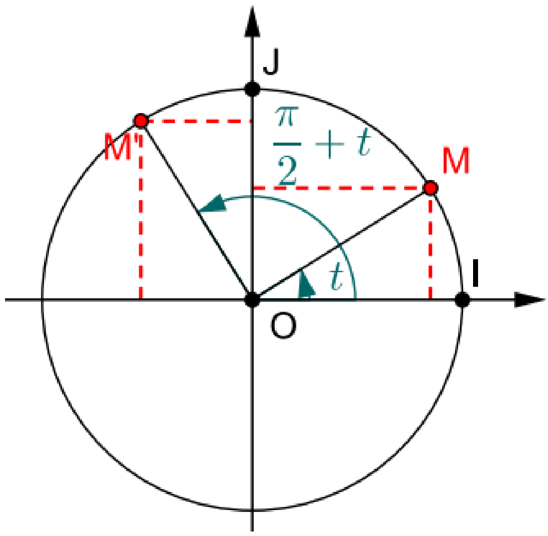




$\begin{cases} \cos(-t) = \\ \sin(-t) = \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(-t) = \\ \sin(-t) = \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(-t) = \\ \sin(-t) = \end{cases}$




$\begin{cases} \cos(-t) = \\ \sin(-t) = \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(-t) = \\ \sin(-t) = \end{cases}$

***Récapitulatif :***

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥


**1) Pour tout réel $x$, $\cos(-x) =$ ....... et $\sin(-x) =$ ..........**

**2) Pour tout réel $x$, et tout entier relatif $k$, $\cos(x + k\times 2\pi) =$ ........ et $\sin(x + k\times 2\pi) =$ ..........**

**3) Pour tout réel $x$, $\cos(x + \pi) =$ ...... et $\sin(x + \pi) =$ .......**

**4) Pour tout réel $x$, $\cos(\pi - x) =$ ....... et $\sin(\pi - x) =$ ........**

**5) Pour tout réel $x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$ ........ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) =$ ..........**

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

***Exercice 5***

Déterminer, en détaillant le raisonnement, les valeurs exactes des nombres suivants :

*a)* $\cos(\frac{-\pi}{3})$ ; *b)* $\sin(\frac{-\pi}{4})$ ; *c)* $\cos(\frac{5\pi}{4})$ ; *d)* $\sin(\frac{-5\pi}{6})$.

*Remarque :* Déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Est-il vrai que pour tout réel $x$, $\sin(2x) = 2\sin(x)$ ?

✂-----------------------------------------------------------------------------

***Exercice 6***

1) Exprimer, en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$, chacune des expressions suivantes :

$A = \cos(-x) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x)$ ; $B = \sin(5\pi + x) + \cos(x - 3\pi)$ ; $C = \cos^2(x) + \cos^2(\frac{\pi}{2} - x)$

2) Simplifier, en détaillant les étapes, la somme $S = \sin(\frac{\pi}{8}) - \sin(\frac{3\pi}{8}) + \sin(\frac{5\pi}{8}) - \sin(\frac{7\pi}{8})$.

*3a)* Déterminer, en justifiant, la valeur exacte de $\cos(\frac{7\pi}{6})$.

*3b)* Déterminer, suivant les valeurs de l'entier $n$, la valeur de $\cos(n\pi)$.

***Exercice 7***

Soit $x$ un réel tel que $\sin x = 0{,}6$ avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Calculer $\cos x$, $\sin(-x)$, $\cos(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

✂---------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 8***

Donner une expression simplifiée des fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(5\pi + x) + \sin(5\pi - x) - \cos(7\pi - x)\ ;$$

$$g(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

## *E– Equations trigonométriques*

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

***Propriété*** **: Soit $a$ un réel donné.**

**1) L'équation $cos(x) = cos(a)$, où $x$ est l'inconnue, équivaut à : ..................................................**

**2) L'équation $sin(x) = sin(a)$, où $x$ est l'inconnue, équivaut à : ..................................................**

♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥♥

*Preuve :*

***Exercice 9***

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi;\pi]$, les équations suivantes :

a) $cos(x) = 0{,}5$ b) $sin(x) = -1$ c) $cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sin(2022x) = 2022$ e) $2(cos(x))^2 - 3cos(x) + 1 = 0$ f) $cos(2x) = sin(3x)$.

✂-----------------------------------------------------------------------------

## Équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Lorsque $x$ varie de $0$ à $\pi$, cosinus prend une et une seule fois toutes les valeurs entre $1$ et $-1$. Autrement dit si $a \in [-1; 1]$, l'équation $\cos x = a$ admet une unique solution sur $[0; \pi]$.

***La fonction arccosinus notée $cos^{-1}$ sur la calculatrice renvoie cette valeur.***

Exemple : à l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée au millième près des solutions de l'équation : $cos(x) = 0{,}4$ sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$,

Lorsque $x$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, sinus prend une et une seule fois toutes les valeurs entre $1$ et $-1$. Autrement dit si $a \in [-1; 1]$, l'équation $\sin x = a$ admet une unique solution sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

***La fonction arcsinus notée $sin^{-1}$ sur la calculatrice renvoie cette valeur.***

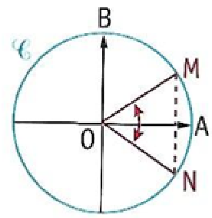
Exemple : à l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée à 0,01 degré près de la solution de l'équation : $sin(x) = 0{,}7$ sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$,

## F–Fonctions cosinus et fonction sinus

***Ce paragraphe sera enrichi après avoir traité les applications sur la dérivation.***

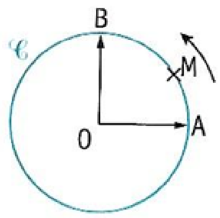
***<u>Définition</u> : La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe son cosinus comme définie au paragraphe II, alinéa A.***

### Parité : $\cos(-x) = \cos x$




En effet, le point M, associé au réel $x$ et le point N, associé au réel $-x$, sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. M et N ont donc la même abscisse : $\cos(-x) = \cos x$.
On dit que **la fonction cosinus est paire.**

### Périodicité : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$




En effet, si M est associé au réel $x$, M est aussi associé à $x + 2\pi$.
Ajouter $2\pi$ au chemin revient à faire un tour de plus sur le cercle.
On dit que **la fonction cosinus est périodique, de période $2\pi$.**

### Réduction de l'intervalle d'étude

- D'après la périodicité de la fonction cosinus, il suffit d'étudier la fonction sur n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$ puis de reproduire la courbe correspondante par des translations de vecteurs parallèles à l'axe des abscisses, de norme $2\pi$. Choisissons comme intervalle d'étude $]-\pi ; \pi]$.
- D'après la parité de la fonction cosinus, il suffit d'étudier la fonction sur $[0 ; \pi]$ puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

### Des valeurs remarquables

- **Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ :**

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

• **Sur** $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ : on peut remarquer que les points du cercle trigonométrique associés à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à la droite (OB).

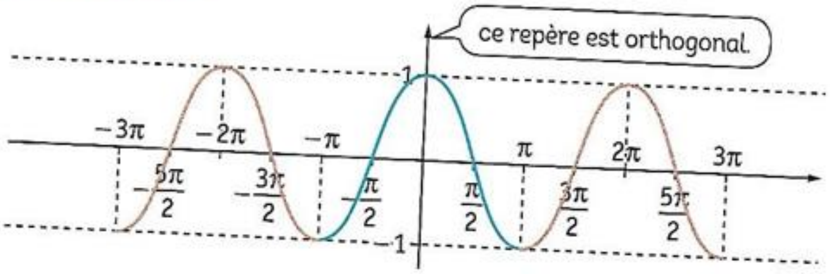
Donc $\cos\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{5\pi}{6}$,

de même $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$ et $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$.

D'où le tableau suivant :

| $x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

## Courbe représentative

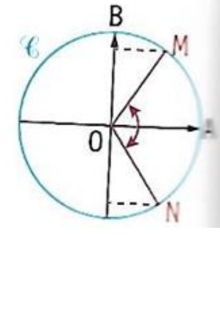



Traçons la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-3\pi ; 3\pi]$.
On commence par la tracer sur $[0 ; \pi]$, puis on la complète par symétrie par rapport à la droite des ordonnées et on obtient la courbe en bleu.
Sur $[\pi ; 3\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur $\vec{u}$, parallèle à la droite des abscisses et de norme $2\pi$, et sur $[-3\pi ; -\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur $-\vec{u}$.

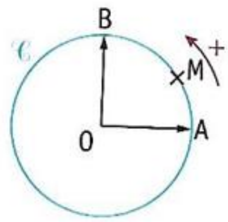
*<u>Définition</u> : La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x associe son sinus comme définie au paragraphe II, alinéa A.*

## Parité : $\sin(-x) = -\sin x$

En effet, le point M, associé au réel $x$ et le point N, associé au réel $-x$, sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. M et N ont donc des ordonnées opposées : $\sin(-x) = -\sin x$.
On dit que la **fonction sinus est impaire.**



## Périodicité : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$




En effet, si M est associé au réel $x$, M est aussi associé à $x + 2\pi$.
Ajouter $2\pi$ au chemin revient à faire un tour de plus sur le cercle.
On dit que **la fonction sinus est périodique, de période $2\pi$.**

## Réduction de l'intervalle d'étude

• D'après la périodicité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur n'importe quel intervalle de longueur $2\pi$ puis de reproduire la courbe correspondante par des translations de vecteurs parallèles à l'axe des abscisses, de longueur $2\pi$. Choisissons comme intervalle d'étude $]-\pi ; \pi]$.
• D'après la parité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur $[0 ; \pi]$ puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

### Des valeurs remarquables

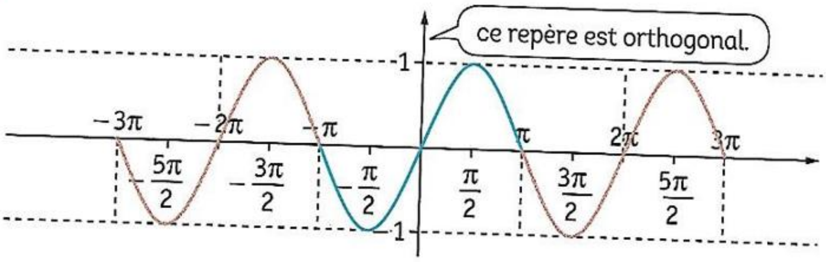
• **Sur** $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ **:**

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

• **Sur** $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ : on peut remarquer que les points du cercle trigonométrique associés à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont symétriques par rapport à la droite (OB).
Donc $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$,
de même $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$.
D'où le tableau suivant :

| $x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

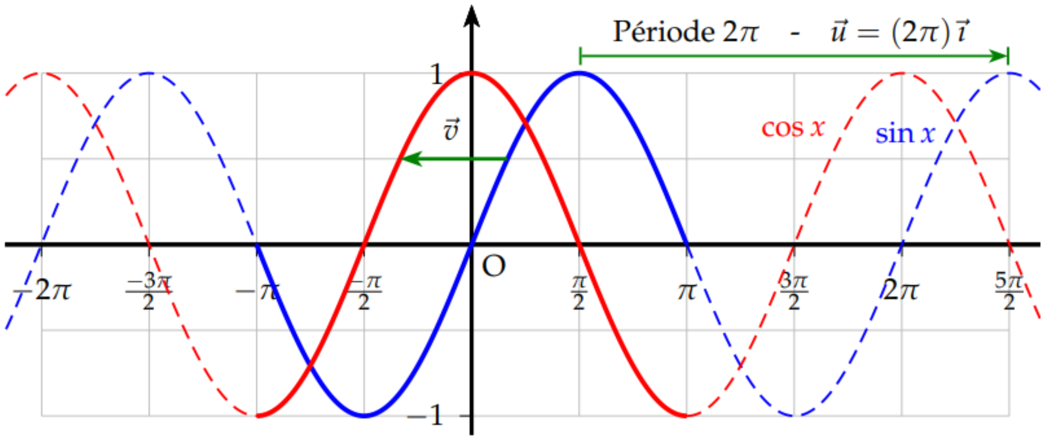
## Courbe représentative




Traçons la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-3\pi ; 3\pi]$.
On commence par la tracer sur $[0 ; \pi]$, puis on la complète par symétrie par rapport à l'origine du repère et on obtient la courbe en bleu.
Sur $[\pi ; 3\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur $\vec{u}$, parallèle à la droite des abscisses et de norme $2\pi$, et sur $[-3\pi ; -\pi]$, la courbe s'obtient par translation de vecteur $-\vec{u}$.

*Récapitulatif des courbes :*

- Pour tracer les courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $[-\pi\ ;\ \pi]$, on utilise les propriétés de symétrie des fonctions sin et cos dues à leur parité.
- On déduit $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $\vec{u} = (2k\pi)\vec{\imath}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Les courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sont des sinusoïdes.




**Remarque** : De $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on déduit la sinusoïde de cos par une translation de vecteur $\vec{v} = -\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sin.