Chapitre 1 — Applications de la dérivation

A– Lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée

Exemple et conjecture : Prenons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$, voici le graphe :

Que peut-on dire du signe du coefficient directeur de chacune des tangentes à la parabole en un point d'abscisse située dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$? Ils sont visiblement tous négatifs, ou nul.

Même question mais pour l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Ils sont visiblement tous positifs ou nul.

Constat :

Sur cet exemple, il semblerait que lorsque le coefficient directeur de la tangente en chacun des points d'un intervalle I est ………positif………., la fonction soit croissante sur I………, et que lorsque le coeff. directeur de la tangente en chacun des points d'un intervalle I est négatif, la fonction soit décroissante sur I………………
…………………………………………………………………………………………

Traçons à l'aide de Geogebra ou de la calculatrice d'autres courbes. Le précédent constat semble-t-il toujours être vérifié ? oui

Théorème fondamental, dû au mathématicien Joseph Lagrange

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) ***Si pour tout réel*** $x \in I$, on a : $f'(x) \geq 0$, ***alors*** f ***est croissante sur l'intervalle I.***

2) ***Si pour tout réel*** $x \in I$, on a : $f'(x) \leq 0$, ***alors*** f ***est décroissante sur I.***

3) ***Si pour tout réel*** $x \in I$ ***on a*** $f'(x) = 0$, ***alors*** f ***est constante sur I.***

Remarque : Ce théorème sera d'un usage quotidien pour la suite, alors mémorisez-le ! C'est le théorème d'analyse le plus important de l'année en première !!s

!! *Lorsqu'une fonction est dérivable sur un intervalle I, étudier son sens de variation sur I revient donc à* ETUDIER le SIGNE de sa DERIVÉE................................ !!
Ne perdez jamais cela de vue, c'est crucial.

Application 1 : *Etude du sens de variation d'une fonction*

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variation de f, et faire le tableau de variation de f où figurera conjointement le signe de $f'(x)$ ainsi que le sens de variation de f.

b) Combien de tangentes horizontales la courbe représentative de f admet-elle sur $\mathbb{R}$? Justifier.

a) $f'(x) = 2x + 1$

Pour étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ il est nécessaire d'étudier au préalable le signe de la dérivée f':

Etude du signe de $f'(x)$:

Résolvons par exemple l'inéqua° : $f'(x) \geq 0$:

$f'(x) \geq 0 \iff 2x + 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{-1}{2}$.

Par suite (p^{e} de Lagrange), la fonction f est croissante sur $\left[\frac{-1}{2} ; +\infty\right[$.

Par suite : $f'(x) \leq 0 \iff x \leq \frac{-1}{2}$, donc f décroit sur $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$.

D'où :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variaᵒ de f		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

Enfin : $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$.

b) $f'(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = \frac{-1}{2}$.

$$S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

a) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, et construire sommairement l'allure de son graphe où figureront le tracé des éventuelles tangentes horizontales.

b) Donner l'équation réduite de la tangente à C_g au point A d'abscisse 1 de C_g.

---

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

Etude du signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

Par exemple résolvons l'inéquation :

$g'(x) \geqslant 0$ càd : $3x^2 + 6x - 9 \geqslant 0$

$g'(x) \geqslant 0 \iff 3(x^2 + 2x - 3) \geqslant 0$

$g'(x) \geqslant 0 \iff x^2 + 2x - 3 \geqslant \frac{0}{3}$

$g'(x) \geqslant 0 \iff \underbrace{x^2 + 2x - 3 \geqslant 0.}$

inéquation du second degré

de la forme : $ax^2 + bx + c \geqslant 0$

avec $a = 1$; $b = 2$ et $c = -3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2.$

Par suite le trinôme $x^2 + 2x - 3$ a deux racines (annulaᵒ) :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \\ \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \end{cases}$$

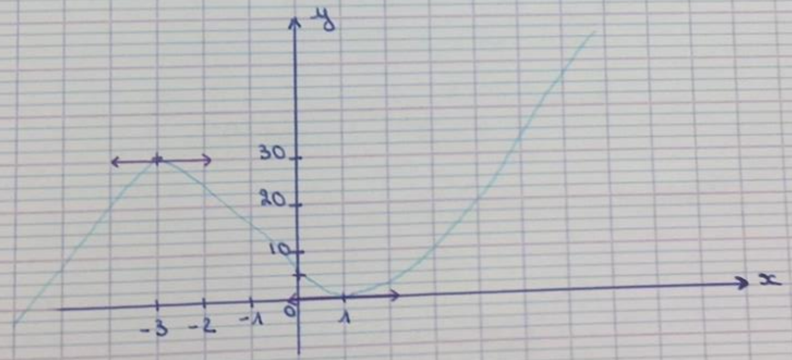
Donc :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variaᵒ de g		$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + 5 = -27 + 27 + 27 + 5 = 32$

$g(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 + 5 = 1 + 3 - 9 + 5 = 0$

<u>Allure de $\mathcal{C}_g$:</u>



b) Soit T_A la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $A(1;0)$:

T_A a pour équation : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$y = 0\,(x-1) + 0$

$y = 0$: T_A est donc l'axe des abscisses !

Exercice 3

Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$

a) Déterminer son ensemble de définition. On le notera D_h.

b) Etudier le sens de variation de h sur D_h, et dresser son tableau de variations.

a) L'ensemble de définition de h est formé par toutes les valeurs de x pour lesquelles on peut calculer l'expression $\dfrac{3x+1}{x-1}$.

Ici : x est la valeur interdite lorsque $x-1=0$ càd lorsque $x=1$.

Donc $D_h =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

b) $h(x) = \dfrac{3x+1}{x-1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+1 \\ u'(x) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x-1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc $h'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$h'(x) = \dfrac{3(x-1) - (3x+1) \times 1}{(x-1)^2}$

$h'(x) = \dfrac{3x-3-3x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Etude du signe de $h'(x)$ sur D_h :

$-4 < 0$

Pr tt réel $x \in D_h$, $(x-1)^2 > 0$

Donc d'après la règle des signes d'un quotient :

$\dfrac{-4}{(x-1)^2} < 0$, donc $h'(x) < 0$ sur D_h.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	||	$-$	
Sens de variaᵒ de h		$\searrow$	||	$\searrow$	

Remarque cruciale : La phrase la fonction h décroît sur $\mathbb{R} - \{1\}$ a-t-elle un sens ? Pourquoi ? Non

Cette remarque illustre le fait que lorsqu'on applique le théorème fondamental de Lagrange, il est nécessaire de se placer sur un intervalle !!

Rq : " h décroit sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ "

" h décroit sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ " est une aberration !!!

car : Si h était décroissante sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

alors on aurait : $-2 < 2$ donc $h(-2) > h(2)$.

Or $h(-2) = \frac{3\times(-2)+1}{-2-1} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$.

Et $h(2) = \frac{3\times 2+1}{2-1} = 7$.

Bref on aurait : $\frac{5}{3} > 7$: absurde !!

Donc h n'est pas décroissante sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

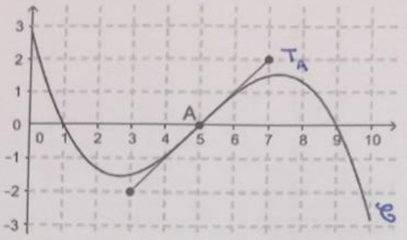
♥♥♥♥♥♥♥ ***Propriété* (réciproque du théorème de Lagrange)** ♥♥♥♥♥♥♥

***a)* Si *f* est croissante sur un intervalle I, et si *f* est dérivable sur I, alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.**

***b)* Si *f* est décroissante sur un intervalle I, et si *f* est dérivable sur I, alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.**

Exemple

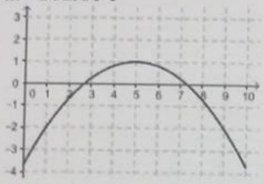
12 On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $[0; 10]$.



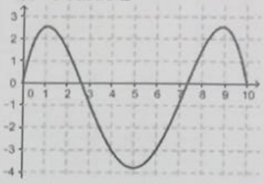
(*)

La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée. Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f'.

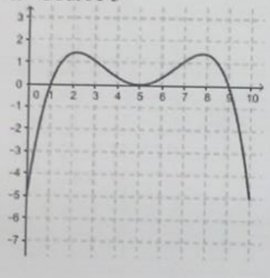
a. Courbe 1



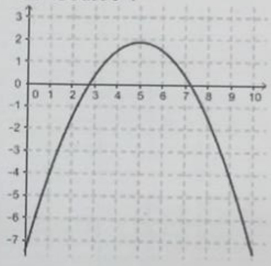
b. Courbe 2



c. Courbe 3



d. Courbe 4



Méthode 1 : T_A a pour coefficient directeur $m = 1$ (lu graphiqt)

Donc $f'(5) = 1$.

Cela permet de dire que la courbe représentative de f' est la courbe 1.

courbe 2 → $f'(5) = 4$
courbe 3 → $f'(5) = 0$
courbe 4 → $f'(5) \simeq 2$

Méthode 2 : avec la réciproque du $p^{té}$ de Lagrange.

Grâce à (*) :

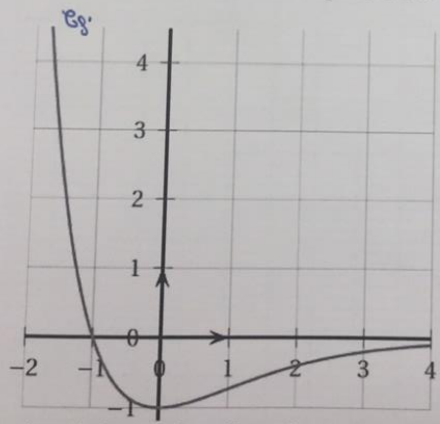
x	0		2,5		7,5		10
Varia° de f		↘		↗		↘	
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	

Par suite : Sur $[0 ; 2,5]$, $C_{g'}$ est située au-dessous de l'axe des abscisses, sur $[2,5 ; 7,5]$, $C_{g'}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses, enfin sur $[7,5 ; 10]$, $C_{g'}$ est sous l'axe des abscisses ; seule C_1 convient.

Exercice 4

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que $f(-1) = 4$ et que la courbe de f passe par le point A$(0 ; 1)$

Ci-dessous, est tracée la Courbe représentant la **dérivée f'** de la fonction f.



Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant :

Affirmation 1 : " f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$. "

Affirmation 2 : " Pour tout réel x, $f(x) \leqslant 5$. "

Affirmation 3 : " La tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 passe par le point $B(2022 ; -2021)$. "

$f(-1) = 4$
$\mathcal{C}_f$ passe par $A(0;1)$.

- Aff. 1 : " f est croissante sur $[0;2]$.

Par lecture graphique de $\mathcal{C}_{f'}$:
$f'(x) \leq 0$ sur $[0;2]$ car $\mathcal{C}_{f'}$ est située au-dessous de l'axe des x sur $[0;2]$.
Donc (p^té de Lagrange) f est décroissante sur $[0;2]$.
L'affirmation 1 est fausse.

- Aff. 2 : " Pour tout réel x, $f(x) \leq 5$".

Par lecture graphique, donnons le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variaᵒ de f	↗		4	↘	

Grâce au tableau : f croît sur $]-\infty;-1]$ et décroît sur $[-1;+\infty[$.
Donc f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, atteint lorsque $x = -1$.
De plus, $f(-1) = 4$ et $4 \leq 5$, donc pour tout réel x, $f(x) \leq 4 \leq 5$.
Donc l'affirmation 2 est vraie.

- Aff. 3 : " La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0 passe par le point $B(2022;-2021)$".

Cherchons l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0 ($\rightarrow$ le point A car $A(0;1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(0) = 1$).
Nommons T_A cette tangente :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = 0$.

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = f'(0)x + 1$ avec $f'(0) = -1$ (lu graphiqt grâce à Cf !)

T_A a pour équa° réduite : $y = -x + 1$.

$B(2022; -2021)$ et $-x_B + 1 = -2022 + 1 = -2021 = y_B$.

Donc $B(2022; -2021) \in T_A$

L'affirma° 3 est vraie.

II – D'autres applications du théorème de Lagrange

A – Comparaison de fonctions, établir des inégalités

Exercice 5

Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Méthode :

On définit une fonction f sur $[0; +\infty[$ égale à la différence entre le nb de gauche et celui de droite :

Ici, pour $x \geqslant 0$, posons $f(x) = \sqrt{x} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Ensuite, étudions le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$ dans le but de faire son tableau de variation.

Ici, montrons que $f(x) \leqslant 0$ sur $[0; +\infty[$.

Ici, $x \geqslant 0$ et $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Pour $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Étude du signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$:

$x \geq 0$, $2 > 0$, donc $2\sqrt{x} \geq 0$.

① $\dfrac{a(x)}{\text{"positive"}}$ a le m̂ signe que $a(x)$.

Donc $f'(x)$ a le m̂ signe que $1-\sqrt{x}$.

Par suite, $f'(x) \geq 0 \iff 1-\sqrt{x} \geq 0 \iff 1 \geq \sqrt{x} \overset{x\geq 0}{\iff} 1^2 \geq (\sqrt{x})^2$ car la fonc° ca croît sur [

$f'(x) \geq 0 \iff 1 \geq x$.

De cette étude de signe on a :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Varia° de f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

avec $f(0) = \sqrt{0} - \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$f(1) = \sqrt{1} - \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Grâce au tableau : f admet pour maximum 0 sur $[0;+\infty[$.
Donc pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \leq 0$

$\sqrt{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq 0$

Donc $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Exercice 6

Etablir que pour tout réel $x \in [0\ ;\ 3]$, $x^3 - x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Posons pour $x \in [0;3]$, $f(x) = x^3 - x + \dfrac{1}{2}$.

But : Montrer que pour tout $x \in [0;3]$, $f(x) \geqslant 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 1$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $[0;3]$: $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geqslant 1$

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$|x| = x$ car $x \geqslant 0$

car $\sqrt{\ }$ croît sur $[0;+\infty[$

Bref : $\underbrace{f'(x) \geqslant 0}_{f'(x) \text{ est positif}} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ *

équivaut à dire que $x \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ *

Par suite on a :

x	0		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$ *	
Varia° de f	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}$	↗	$\frac{49}{2}$

$f(0) = 0^3 - 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$f\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) = \left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2 - \sqrt{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{\dfrac{1}{3}} - \sqrt{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}} + \dfrac{1}{2}$

$f\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) \approx 0{,}11 > 0.$

Enfin : $f(3) = 3^3 - 3 + \frac{1}{2} = 24,5 = \frac{49}{2}$.

Grâce au tableau de variation de f sur $[0;3]$ on a :
f décroit sur $\left[0; \sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ et f croit sur $\left[\sqrt{\frac{1}{3}}; 1\right]$.

Donc f admet un minimum sur $[0;3]$ atteint lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$
Ce minimum est égal à $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \approx 0,11$ donc ce minimum est positif.

Par suite : $\forall x \in [0;3]$, $f(x) \geqslant -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \geqslant 0$.

Donc : pr tt $x \in [0;3]$, $x^3 - x + \frac{1}{2} \geqslant 0$

$\forall x \in [0;3]$, $x^3 - x \geqslant -\frac{1}{2}$.

Remarque importante

A-t-on le droit de dériver des inégalités ? C'est-à-dire que si pour tout réel x appartenant à un intervalle I, on a : $\underbrace{f(x) < g(x)}_{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur } I}$ *par exemple, a-t-on le droit de dire que pour tout réel x appartenant à I,* $\underbrace{f'(x) < g'(x)}$ *?*

Le c. d. de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse x est inférieur au c. d. à $\mathcal{C}_g$ en son point d'abscisse x.

Contre-exemple : $f(x) = -x^2$
$g(x) = 0$ $\Big)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ car : $-x^2 \leqslant 0$.

et $f'(x) = -2x$
$g'(x) = 0$

A-t-on, pour tt réel x : $f'(x) \leqslant g'(x)$ càd : $-2x \leqslant 0$ pr tt réel x ?

FAUX ! $-2x \leqslant 0 \iff x \geqslant 0$

Donc on ne peut pas dériver des inégalités !!!

B- Etablir qu'une fonction admet un extremum sur un intervalle

Un extremum est un mot latin qui désigne en mathématique un maximum ou un minimum.

Exercice 7

Démontrer que la fonction f définie sur [-10 ; 10] par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$: admet un maximum et un minimum sur [-10 ; 10]. Préciser la valeur de ces derniers, et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.

$-10 \leqslant x \leqslant 10$

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

On commence par étudier le sens de variation de f sur $[-10; 10]$.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x^2+1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

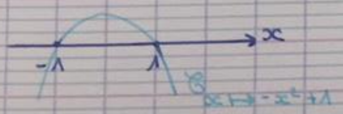
$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Etudions le signe de $f'(x)$ sur $[-10; 10]$:

Pour tt réel $x \in [-10; 10]$, $(x^2+1)^2 > 0$.

Donc : $f'(x)$ a le m̂ signe que $-x^2+1$

De sorte que : $f'(x) \geqslant 0 \iff \underbrace{-x^2+1}_{\text{trinôme ayant pr racines : } -1 \text{ et } 1} \geqslant 0$



$-x^2+1 \geqslant 0 \iff \mathcal{C}_{x \mapsto -x^2+1}$ est situé au dessus de l'axe des x.

$-x^2+1 \geqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1$: $f'(x) \geqslant 0 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1$.

Par suite :

x	-10		-1		1		10
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variaᵒ de f	$\frac{-10}{101}$ ↘		$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{10}{101}$

$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$

$f(10) = \frac{10}{10^2+1} = \frac{10}{101}$

$f(-10) = \frac{-10}{(-10)^2+1} = -\frac{10}{101}$

Grâce à ce tableau, on peut dire que : f admet pour minimum $-\frac{1}{2}$ sur $[-10;10]$, ce minimum est atteint lorsque $x=-1$.

f admet un maximum $\frac{1}{2}$ sur $[-10;10]$, ce maximum est atteint lorsque $x=1$.

Question

Est-il vrai que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et s'il existe un réel a en lequel $f'(a) = 0$, alors la fonction f admet un extremum en a ?

Dit autrement : La présence d'une tangente horizontale à la courbe d'une fonction implique-t-elle l'existence d'un extremum en ce point ?

FAUX !!! Ctex : $f(x) = x^3$ avec $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \quad (\geq 0)$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Sens de variaᵒ de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

f croît sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0, bien que $f'(0) = 0$!!!

Contrairement à ce qui est mentionné dans certains livres de sciences expérimentales, ce n'est pas parce que la dérivée s'annule en point qu'il y a un EXTREMUM pr cette fonction *!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!*

C- Etudier la position relative de deux courbes

Remarque et rappel : *Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.*

- C_f est AU-DESSUS de C_g sur I si et seulement si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) \geq g(x)$.
- C_f est EN-DESSOUS de C_g sur I si et seulement si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 8

Etude de la position relative d'une courbe par rapport à une de ses tangentes.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

a) Donner l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A d'abscisse $a = 1$.

b) Etudier la position relative de C_f et T_A sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

a) T_A est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point A d'abscisse $a = 1$.

T_A a pour équa° réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Or, $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, donc $f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$.

Donc $f'(x) = 3x^2 - 2x$, donc $f'(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 3 - 2 = 1$.

Donc T_A a pour équation réduite : $y = 1(x-1)+1$

$y = x$.

b) Ici, posons $g(x) = x$.

Etudier la posi° relative de $\mathcal{C}_f$ et $T_A = \mathcal{C}_g$ revient donc à résoudre l'équation : $f(x) > g(x)$:

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 1 > x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

On étudie le sens de varia° de h sur $\mathbb{R}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pr tt réel x :

$h'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

On observe que $x_1 = 1$ est une racine évidente de $h'(x) = 0$.

Donc l'autre racine, x_2, vérifie : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$.

$a > 0$

Ici $x \in [0 ; +\infty[$ donc :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 1 = 0$

Grâce à cette étude : h décroit sur $[0 ; 1]$ et h croît sur $[1 ; +\infty[$.
Donc h admet un minimum sur $[0 ; +\infty[$.
Ce minimum vaut 0.
Donc pour tout réel $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$

$f(x) - g(x) \geq 0$

$f(x) \geq g(x)$

$\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de $T_A = \mathscr{C}_g$ sur $[0 ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$, et $\mathscr{C}_f$ et T_A ont le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée en commun.

III – Problèmes d'optimisation : une finalité de la dérivation

L'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, permet entre autres, de déterminer d'éventuels extrema de cette fonction sur cet intervalle, et donc de répondre à des problèmes concrets d'optimisation. Optimiser vient du latin optimus, qui signifie rendre le meilleur possible.

Exercice 9

On veut construire une cuve métallique à partir d'une plaque carrée de 3 m de côté.
A chaque coin de cette plaque, on découpe un carré de côté x mètres. En pliant et en soudant, on obtient une cuve de volume $f(x)$ en m^3.

0) Faire un dessin de la situation étudiée.
a) Dans quel intervalle I, x est-il situé ?

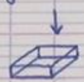
b) Démontrer que $f(x) = x(3 - 2x)^2$

c) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

d) Décrire la cuve qui aura le volume maximal, en précisant la valeur de ce dernier.

0)

Par pliage / soudure, on obtient un pavé droit.



a) $0 \leq x$ car x est une longueur.

et $x + x \leq 3$

$2x \leq 3$

$x \leq \frac{3}{2}$

Donc $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$: $x \in I$, où $I = \left[0 ; \frac{3}{2}\right]$.

b) $f(x) = V_{\text{pavé droit}} = L \times l \times h$ avec ici $\begin{cases} L = l = 3-2x \\ h = x \end{cases}$ (pavé droit à base carrée)

Donc $f(x) = x\,(3-2x)(3-2x)$

$f(x) = x\,(3-2x)^2$ (cm^3)

c) $f(x) = x(3-2x)^2$ avec $0 \leq x \leq 1{,}5$.

$f(x) = x(9 - 12x + 4x^2)$

$f(x) = 9x - 12x^2 + 4x^3$

$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

f est dérivable sur $[0 ; 1{,}5]$ et :

$f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$ (= trinôme)

Etude du signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 1{,}5]$.

$a = 12$; $b = -24$; $c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4 \times 12 \times 9 = 576 - 432 = 144 = 12^2$

$\Delta > 0$, donc ce trinôme a 2 racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{24-12}{24} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5. \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{24+12}{24} = \dfrac{36}{24} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \end{cases}$$

$a > 0$, donc :

x	0		0,5		1,5
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$f(0) = 0$

$f(1{,}5) = 1{,}5$

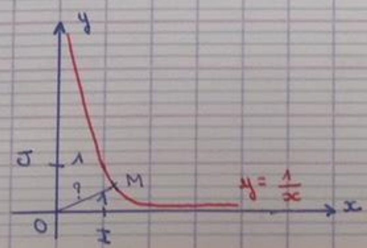
$f(0{,}5) = 0{,}5\,(3 \times 2 \times 0{,}5)^2 = 0{,}5\,(3-1)^2 = 0{,}5 \times 2^2 = 0{,}5 \times 4 = 2$

c) f croît sur $[0 ; 0{,}5]$ et décroît sur $[0{,}5 ; 2]$, donc f admet un maximum sur $[0 ; 1{,}5]$ atteint lorsque $x = 0{,}5$.
Or $f(x)$ est le volume de notre cuve, donc ce dernier est maximal lorsque $x = 0{,}5$ m. Ce volume maximal est égal à $2\ m^3$.
$1\ m^3 = 1000$ litres donc la cuve aura pour volume maximal 2000 litres
Dimensions de la cuve (en m) : $2m \times 2m \times 0{,}5m$.

Exercice 10

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J) du plan et on considère l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.
avec $x > 0$.

Déterminer le point de l'hyperbole le plus proche de l'origine du repère.



Soit M un point quelconque d'abscisse $x > 0$ situé sur l'hyperbole d'équa° : $y = \frac{1}{x}$.

Donc : $M\left(x ; \frac{1}{x}\right)$
$O(0 ; 0)$

Ici, $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}$

$OM = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{1}{x} - 0\right)^2}$

$OM = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$

Enfin, OM est minimale revient à dire que OM^2 est minimale (car une distance est positive).
Ici, posons $h(x) = (g(x))^2 = \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)^2 = OM^2$

$$h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Etudions le sens de varia° de h sur $]0 ; +\infty[$:

$h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ avec $x > 0$:

$h(x) = u(x) + \frac{1}{u(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

Donc : (dérivée d'une somme)

$h'(x) = u'(x) + \left(\frac{1}{u}\right)'(x)$

$h'(x) = u'(x) - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$

$h'(x) = 2x - \dfrac{2x}{(x^2)^2}$

$h'(x) = 2x - \dfrac{2x}{x^4} = 2x - \dfrac{2}{x^3}$

$h'(x) = \dfrac{2x}{1} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x \times x^3}{x^3} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2x^4 - 2}{x^3}$

Etudions le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$:

$h'(x) = \dfrac{2x^4 - 2}{x^3} = \dfrac{2(x^4 - 1)}{x^3}$

Enfin, $x^4 - 1 = (x^2) - 1^2 = (x^2+1)(x^2-1)$

Donc : $h'(x) = \dfrac{2(x^2+1)(x^2-1)}{x^3} = \dfrac{2(x^2+1)(x^2-1)}{x^3}$

Or $2 > 0$ et $x > 0$, donc $x^3 > 0$, $x^2 + 1 > 1 > 0$.

Donc $x + 1 > 1 > 0$.

Donc $h'(x)$ a le m̂ signe que $x - 1$.
Par suite, $h'(x) \geqslant 0$ équivaut à dire que $x - 1 \geqslant 0$
càd $x \geqslant 1$.

Par suite :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖		0		
Variaᵒ de h	‖	↘	2	↗	

$h(1) = 1^2 + \dfrac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$

h décroit sur $]0;1]$ et h croit sur $[1;+\infty[$.
Donc h admet un maximum sur $]0;+\infty[$ atteint lorsque $x = 1$.

Or ici, $R(x) = OM^2$, donc OM^2 est minimale lorsque $x = 1$,
donc lorsque $M\left(1; \frac{1}{1}\right)$ à savoir $M(1;1)$.
$M(1;1)$ est le point de l'hyperbole d'équa° $y = \frac{1}{x}$ le + proche de $O(0;0)$.
Cette distance minimale

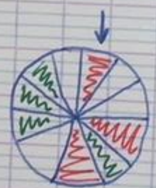
$$OM_{min} = \sqrt{1^2 + \frac{1}{1^2}} = \sqrt{2} \text{ u.l.}$$

Exercice 11

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.
Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.
Si le secteur repéré est blanc, il perd 12 €.
Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
– si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 €.
– s'il est blanc, il gagne 2 €.
– s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.
La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (où $n \geqslant 1$).
Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

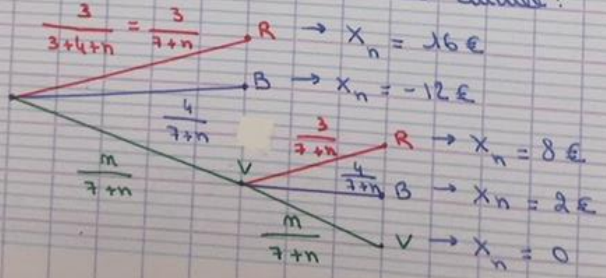
1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$.
4. En déduire pour quelle valeur de l'entier n l'espérance mathématique de X_n est maximale.
Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

Ici $n = 4$



X_n : gain algébrique du joueur

1. Faisons un arbre de la situa° étudiée :



D'où la loi de X_n :

$X_n(\Omega) = \{-12 ; 0 ; 2 ; 8 ; 16\}$

Grâce à l'arbre :

$p(X_n = 16) = \dfrac{3}{n+7}$

$p(X_n = -12) = \dfrac{4}{n+7}$

$p(X_n = 8) = \dfrac{n}{n+7} \times \dfrac{3}{n+7} = \dfrac{3n}{(n+7)^2}$

$p(X_n = 2) = \dfrac{n}{n+7} \times \dfrac{4}{n+7} = \dfrac{4n}{(n+7)^2}$

$p(X_n = 0) = \dfrac{n}{n+7} \times \dfrac{n}{n+7} = \dfrac{n^2}{(n+7)^2}$

D'où la loi de probabilités de X_n :

$(X_n = x_i)$	-12	0	2	8	16
$p(X_n = x_i)$	$\dfrac{4}{n+7}$	$\dfrac{n^2}{(n+7)^2}$	$\dfrac{4n}{(n+7)^2}$	$\dfrac{3n}{(n+7)^2}$	$\dfrac{3}{n+7}$

2. $E(X_n) = -12 \times \dfrac{4}{n+7} + 0 \times \dfrac{n^2}{(n+7)^2} + 2 \times \dfrac{4n}{(n+7)^2} + 8 \times \dfrac{3n}{(n+7)^2} + 16 \times \dfrac{3}{n+7}$

$E(X_n) = \dfrac{-48}{n+7} + \dfrac{8n}{(n+7)^2} + \dfrac{24n}{(n+7)^2} + \dfrac{48}{n+7}$

$E(X_n) = \dfrac{32n}{(n+7)^2}$

3. $x \in [0 ; +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} v(x) = (x+7)^2 = x^2 + 14x + 49 \\ v'(x) = 2x + 14 = 2(x+7) \end{cases}$

Donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{(x+7)^2 - x \times 2 \times (x+7)}{((x+7)^2)^2} = \frac{(x+7)(x+7-2x)}{(x+7)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+7)(-x+7)}{(x+7)^4} = \frac{-x+7}{(x+7)^3}$$

Etude du signe de la dérivée sur $[0; +\infty[$:

$x \geq 0$ donc $x+7 > 0$ donc $(x+7)^3 > 0$.

Par suite, $f'(x)$ a le m̂ signe que $-x+7$:

Donc $f'(x) \geq 0 \iff -x+7 \geq 0 \iff 7 \geq x \iff x \leq 7$.

Donc :

x	0		7		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{28}$	$\searrow$	

$f(0) = 0$ et $f(7) = \dfrac{7}{(7+7)^2} = \dfrac{7}{14^2} = \dfrac{7}{196} = \dfrac{1}{28}$

4. Observons que : $E(X_n) = 32 \times f(n)$ où f est la fonction de q.3.
Or $32 > 0$, donc $E(X_n)$ a le m̂ sens de varia° que f sur $[0; +\infty[$
Grâce à q.3, $E(X_n)$ est maximale lorsque $n = 7$.
Pour $n = 7$, $E(X_7) = 32 \times f(7) = 32 \times \dfrac{1}{28} = \dfrac{8}{7}$ €

Pour 7 secteurs verts sur la roue, l'espérance est maximale et vaut $\dfrac{8}{7}$ €.

I-

23 Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

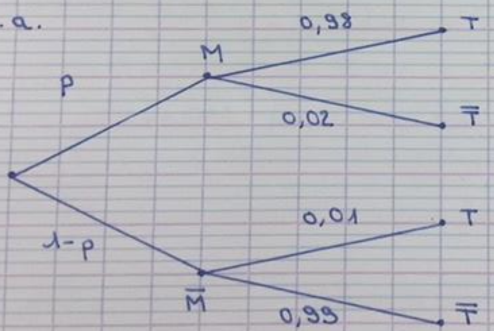
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On définit les événements :

- M : « l'individu choisi est atteint du chikungunya » ;
- T : « le test de l'individu choisi est positif ».

On note p $(0 \leq p \leq 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a.** Illustrer la situation par un arbre pondéré.
   b. Exprimer $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de p.
2. **a.** Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :
   $$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$
   b. Étudier les variations de la fonction f.
3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
   À partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

1. a.



1. b. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = p \times 0{,}98 = 0{,}98p$.

$p(\bar{M}\cap T) = p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T) = (1-p)\times 0{,}01 = 0{,}01(1-p)$

D'après la formule des probabilités totales :

$p(T) = p(M\cap T) + p(\bar{M}\cap T) = 0{,}98p + 0{,}01(1-p)$

$p(T) = 0{,}98p + 0{,}01 - 0{,}01p$

$p(T) = 0{,}97p + 0{,}01$

2.a. $\underbrace{p_T(M)}_{\text{notée } f(p)} = \dfrac{p(M\cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}98p}{0{,}97p+0{,}01}$

Donc $f(p) = \dfrac{0{,}98p}{0{,}97p+0{,}01} = \dfrac{0{,}98p\times 100}{(0{,}97p+0{,}01)\times 100} = \dfrac{98p}{97p+1}$ avec $0 \leq p \leq 1$

b. $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1} = \dfrac{u(p)}{v(p)}$ avec $\begin{cases} u(p) = 98p \\ u'(p) = 98 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(p) = 97p+1 \\ v'(p) = 97 \end{cases}$

$f'(p) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{98(97p+1) - 98p\times 97}{(97p+1)^2}$

$f'(p) = \dfrac{98\times 97p + 98 - 98p\times 97}{(97p+1)^2} = \dfrac{98}{(97p+1)^2}$

Étude du signe de la sur $[0 ; 1]$:

$98 > 0$ et pr tt réel $p \in [0;1]$, $(97p+1)^2 > 0$.

Donc $f'(p) > 0$ sur $[0;1]$.

Donc f croît sur $[0;1]$.

p	0		1
$f(p)$	0	↗	1

$f(0) = 0$

$f(1) = \dfrac{98\times 1}{97\times 1+1} = \dfrac{98}{98} = 1$

3. Test est fiable ssi $p_T(M) \geqslant 0{,}95$

$$f(p) \geqslant 0{,}95$$

Donc résolvons : $\dfrac{98p}{97p+1} \geqslant 0{,}95.$

Or $97p+1 > 0$, donc : $\dfrac{98p}{97p+1} \times (97p+1) \geqslant 0{,}95 \times (97p+1)$

$$98p \geqslant 0{,}95 \times 97p + 0{,}95.$$

$$98p - 0{,}95 \times 97p \geqslant 0{,}95.$$

$$98p - 92{,}15p \geqslant 0{,}95.$$

$$5{,}98p \geqslant 0{,}95$$

$$p \geqslant \frac{0{,}95}{5{,}98} \quad \text{car } 5{,}85 > 0$$

$$p \geqslant \frac{95}{585}$$

$$p \geqslant \frac{19}{117} \qquad \frac{19}{117} \approx 0{,}16$$

Le test est donc qualifié de fiable à partir d'une proportion de personnes malades égale à $\frac{19}{117}$ de la popula°.

II- **20** Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.

Partie A – Lecture graphique

Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique ci-dessous.

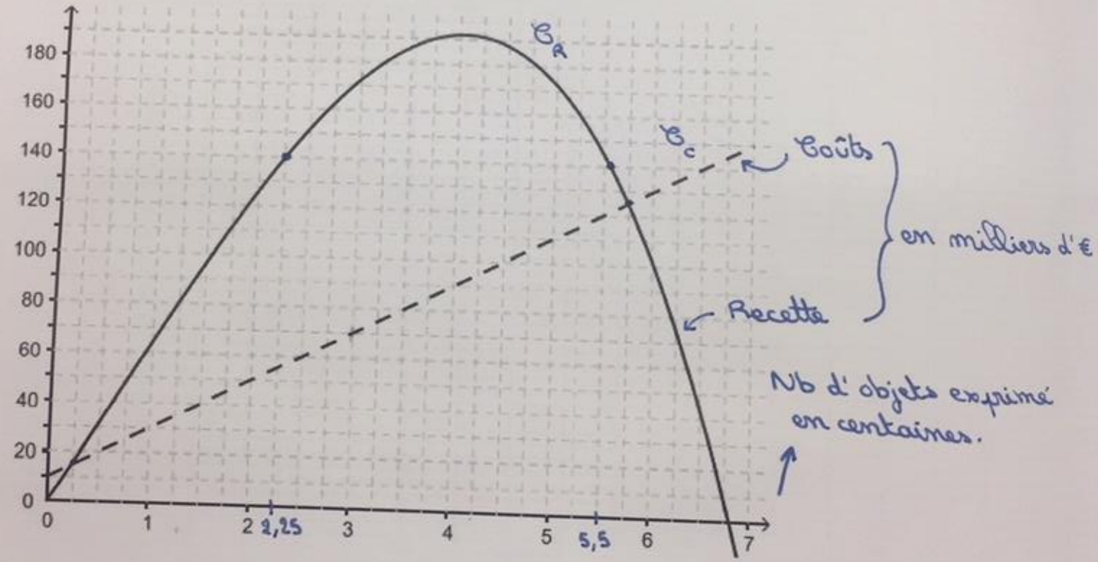
1. Combien faut-il fabriquer de produits pour avoir une recette égale à 140 000 euros ?
2. Combien de produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ou nul ?

Partie B – Étude du bénéfice

On modélise :

- les recettes par la fonction R définie sur $[0;7]$ par $R(x) = -2x^3 + 4{,}5x^2 + 62x$;
- les coûts par la fonction C définie sur $[0;7]$ par $C(x) = 20x + 10$.

1. Calculer la recette et le coût pour 300 produits fabriqués. En déduire le bénéfice correspondant.
2. On note B la fonction bénéfice.
   Donner l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$.
3. Vérifier que $B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$. Donner le tableau de variations de B.
5. En déduire la valeur du bénéfice maximal ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.



Partie A

1. $140\,000$ € = 140 milliers d'€

On doit résoudre graphiquement :

$R(x) = 140$, qui a pour solutions :

$x = 2{,}25$ et $x = 5{,}5$.

Pour avoir une recette de 140 milliers d'€, on doit fabriquer 2,25 centaines = 225 coques ou 550 coques.

2. Rappel : Soit $B(x)$ le bénéfice réalisé par la vente de x centaines de coques :

$B(x) = R(x) - C(x)$

Ici, $B(x) \geqslant 0$ équivaut à : $R(x) - C(x) \geqslant 0$

donc à : $R(x) \geqslant C(x)$

$B(x) \geqslant 0$ revient graphiqᵗ à chercher les abscisses x telles que $\mathscr{C}_R$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_C$.

Par lecture graphique, $B(x) \geqslant 0$ lorsque : $0{,}25 \leqslant x \leqslant 5{,}75$.

Lorsqu'on fabrique entre 25 et 575 coques, le bénéfice sera positif ou nul.

Partie B

1. 300 coques = 3 centaines de coques

On fait $x = 3$ dans $R(x)$ et $C(x)$:

$R(3) = -2 \times 3^3 + 4{,}5 \times 3^2 + 62 \times 3$

$R(3) = 172{,}5$ K€

$C(3) = 20 \times 3 + 10 = 70$ K€

Donc : $B(3) = R(3) - C(3) = 172,5 - 70 = 102,5$ K€

Donc pour 300 coques fabriquées, le bénéfice est de 102,5 K€ = 102[illegible]

2. $B(x) = R(x) - C(x)$

$B(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x - (20x + 10)$

$B(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 62x - 20x - 10$

$B(x) = -2x^3 + 4,5x^2 + 42x - 10$

3. $B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$

4. $0 \leq x \leq 7$

$B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$.

de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -6$; $b = 9$ et $c = 42$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times (-6) \times 42 = 81 + 24 \times 42 = 1089 = 33^2$.

$\Delta > 0$ donc ce trinôme a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 - 33}{-12} = \dfrac{-42}{-12} = \dfrac{7}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 + 33}{12} = \dfrac{24}{-12} = -2 \end{cases}$$

Ici $a < 0$ donc :

x	0		$\frac{7}{2}$		7
Signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-10	$\nearrow$	$106,375$	$\searrow$	$-181,5$

$B(0) = -10$

$B(7) = -2 \times 7^3 + 4,5 \times 7^2 + 42 \times 7 - 10 = -181,5$

$B(3,5) = -2 \times 3,5^3 + 4,5 \times 3,5^2 + 42 \times 3,5 = 106,375$

5. Grâce au tableau de varia° de la fonc° B :
B croît sur $\left[0 ; \frac{7}{2}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{7}{2} ; 7\right]$.

Donc B admet un maximum sur $[0 ; 7]$ atteint lorsque
$x = \frac{7}{2} = 3,5$ et ce max est égal à : 106,375.

Le bénéfice maximal est donc de 106,375 K€ càd 106375€ et il est obtenu pour 3,5 centaines = 350 coques fabriquées.