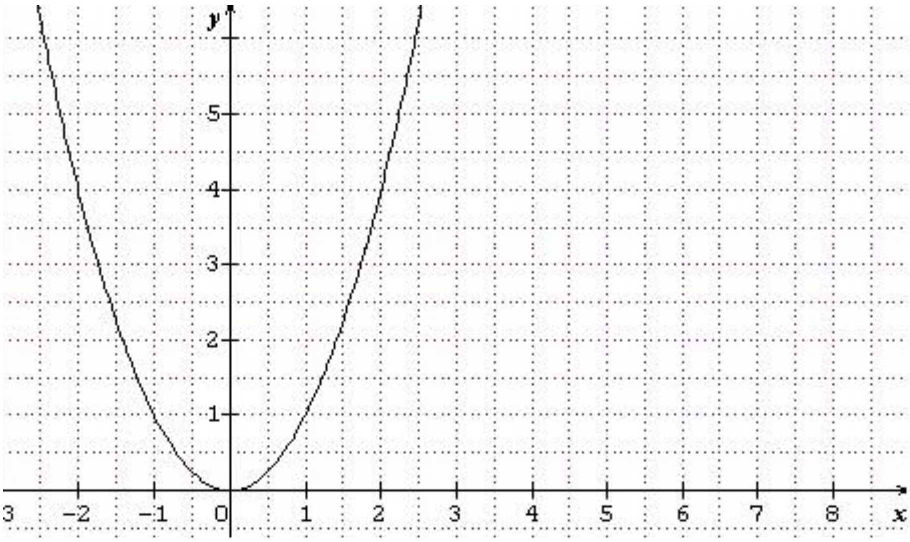
Chapitre 4 Applications de la dérivation

A– Lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée

Exemple et conjecture : Prenons la fonction carrée définie sur ℝ par : $f(x) = x^2$, voici le graphe :



Que peut-on dire du signe du coefficient directeur de chacune des tangentes à la parabole en un point d'abscisse située dans l'intervalle $]-\infty ; 0]$?

Même question mais pour l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Constat :

Sur cet exemple, il semblerait que lorsque le coefficient directeur de la tangente en chacun des points d'un intervalle I est …………………………., la fonction………………………………………., et que……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………….

Traçons à l'aide de Geogebra ou de la calculatrice d'autres courbes. Le précédent constat semble-t-il toujours être vérifié ?

♥♥

Théorème fondamental, dû au mathématicien Joseph Lagrange

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) ***Si pour tout réel*** $x \in I$, on a : $f'(x)$ ***, alors f est croissante sur l'intervalle I.***

2) ***Si pour tout réel*** $x \in I$, on a : $f'(x)$ ***, alors f est décroissante sur I.***

3) ***Si pour tout réel*** $x \in I$ ***on a*** $f'(x) = 0$, ***alors f est*** ***sur I.***

♥♥

Remarque : Ce théorème sera d'un usage quotidien pour la suite, alors mémorisez-le ! C'est le théorème d'analyse le plus important de l'année en première !!s

Lorsqu'une fonction est dérivable sur un intervalle I, étudier son sens de variation sur I revient donc à ……………………………………………………………………………………..
Ne perdez jamais cela de vue, c'est crucial.

Application 1 : Etude du sens de variation d'une fonction

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 1$.

Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variation de f, et faire le tableau de variation de f où figurera conjointement le signe de $f'(x)$ ainsi que le sens de variation de f.

Combien de tangentes horizontales la courbe représentative de f admet-elle sur $\mathbb{R}$? Justifier.

✂---

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, et construire sommairement l'allure de son graphe où figureront le tracé des éventuelles tangentes horizontales.
Donner l'équation réduite de la tangente à C_g au point A d'abscisse 1 de C_g.

✂---

Exercice 3

Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$

a) Déterminer son ensemble de définition. On le notera D_h.
b) Etudier le sens de variation de h sur D_h, et dresser son tableau de variations.

✂---

__Remarque cruciale__ : La phrase la fonction h décroît sur $\mathbb{R} - \{1\}$ a-t-elle un sens ? Pourquoi ?

Cette remarque illustre le fait que lorsqu'on applique le théorème fondamental de Lagrange, il est nécessaire de se placer……………………..!!

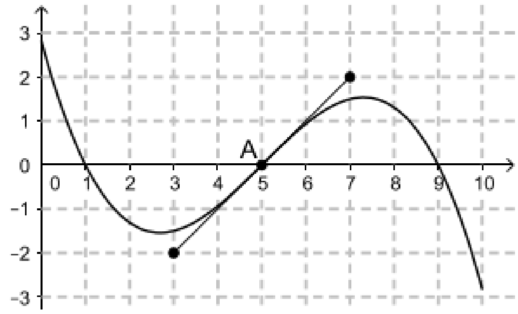
♥♥♥♥♥♥♥ ***__Propriété__ (réciproque du théorème de Lagrange)*** ♥♥♥♥♥♥♥

a) Si f est croissante sur un intervalle I, et si f est dérivable sur I, alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x)$……..

b) Si f est décroissante sur un intervalle I, et si f est dérivable sur I, alors, pour tout réel $x \in I$, $f'(x)$………

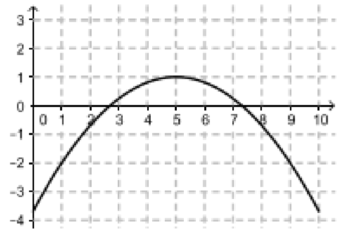
__Exemple__

12 On donne ci-dessous la représentation graphique C d'une fonction f définie sur $[0; 10]$.

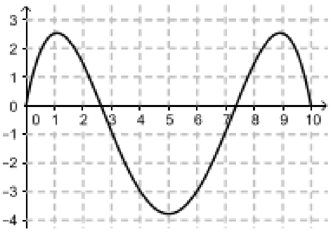


La tangente à la courbe C au point A d'abscisse 5 est tracée. Parmi les quatre courbes ci-dessous, déterminer laquelle représente graphiquement la fonction dérivée f'.

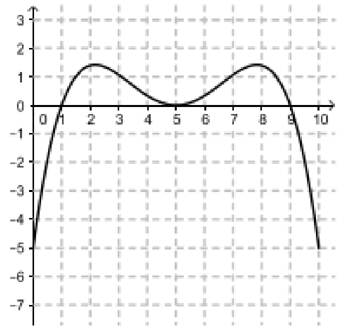
a. Courbe 1



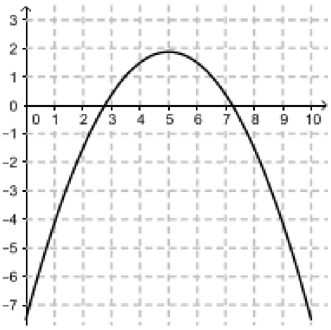
b. Courbe 2



c. Courbe 3



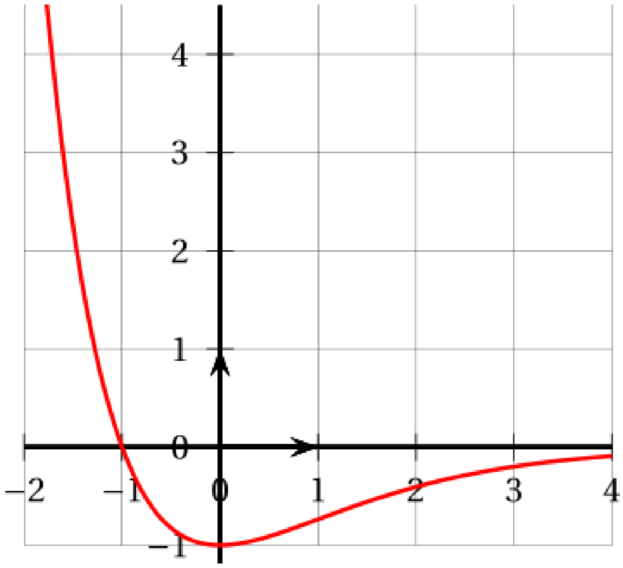
d. Courbe 4



Exercice 4

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que $f(-1) = 4$ et que la courbe de f passe par le point A$(0\ ;\ 1)$

Ci-dessous, est tracée la Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.



Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant :

Affirmation 1 : *" f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$."*

Affirmation 2 : *" Pour tout réel x, $f(x) \leqslant 5$. "*

Affirmation 3 : *" La tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 passe par le point $B(2022\ ;\ -2021)$."*

✂---

II – D'autres applications du théorème de Lagrange

A – Comparaison de fonctions, établir des inégalités

Exercice 5

Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

Méthode :

Exercice 6

Etablir que pour tout réel $x \in [0\ ;\ 3]$, $x^3 - x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

✂---

Remarque importante

A-t-on le droit de dériver des inégalités ? C'est-à-dire que si pour tout réel x appartenant à un intervalle I, on a : f(x) < g(x) par exemple, a-t-on le droit de dire que pour tout réel x appartenant à I, f '(x)< g'(x) ?

B- Etablir qu'une fonction admet un extremum sur un intervalle

Un extremum est un mot latin qui désigne en mathématique un maximum ou un minimum.

Exercice 7

Démontrer que la fonction *f* définie sur [-10 ; 10] par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$: admet un maximum et un minimum sur [-10 ; 10]. Préciser la valeur de ces derniers, et pour quelles valeurs de *x* ils sont atteints.

✂---

Question

Est-il vrai que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et s'il existe un réel a en lequel f '(a) = 0, alors la fonction f admet un extremum en a ?

Dit autrement : ***La présence d'une tangente horizontale à la courbe d'une fonction implique-t-elle l'existence d'un extremum en ce point ?***

Contrairement à ce qui est mentionné dans certains livres de sciences expérimentales, ce n'est pas parce que la dérivée s'annule en point qu'il y a…………………………………………………… !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

C- Etudier la position relative de deux courbes

Remarque et rappel : Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

- C_f est AU-DESSUS de C_g sur I si et seulement si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) \geqslant g(x)$.
- C_f est EN-DESSOUS de C_g sur I si et seulement si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 8

Etude de la position relative d'une courbe par rapport à une de ses tangentes.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

a) Donner l'équation réduite de la tangente T_A à C_f au point A d'abscisse $a = 1$.

b) Etudier la position relative de C_f et T_A sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

✂--

III – Problèmes d'optimisation : une finalité de la dérivation

L'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, permet entre autres, de déterminer d'éventuels extrema de cette fonction sur cet intervalle, et donc de répondre à des problèmes concrets d'optimisation. Optimiser vient du latin optimus, qui signifie rendre le meilleur possible.

Exercice 9

On veut construire une cuve métallique à partir d'une plaque carrée de 3 *m* de côté.
A chaque coin de cette plaque, on découpe un carré de côté x mètres. En pliant et en soudant, on obtient une cuve de volume $f(x)$ en m³.

0) Faire un dessin de la situation étudiée.
a) Dans quel intervalle I, x est-il situé ?

b) Démontrer que $f(x) = x(3 - 2x)^2$

c) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

d) Décrire la cuve qui aura le volume maximal, en précisant la valeur de ce dernier.

Exercice 10

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J) du plan et on considère l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.

Déterminer le point de l'hyperbole le plus proche de l'origine du repère.

✂---

Exercice 11

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.
Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.
Si le secteur repéré est blanc, il perd 12 €.
Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
– si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 €.
– s'il est blanc, il gagne 2 €.
– s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.
La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (où $n \geqslant 1$).
Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_n.
2. Calculer l'espérance mathématique de X_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la fonction numérique f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$.
4. En déduire pour quelle valeur de l'entier n l'espérance mathématique de X_n est maximale.
Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

✂---

Exercice 12

Parmi tous les cônes de génératrice mesurant 30 *cm*, déterminer le rayon et la hauteur du cône ayant un volume maximal.

Exercices supplémentaires au chapitre

I-

23 Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On définit les événements :

- M : « l'individu choisi est atteint du chikungunya » ;
- T : « le test de l'individu choisi est positif ».

On note p $(0 \leq p \leq 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b. Exprimer $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

b. Étudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.

À partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

II- **20** Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentant les recettes (en trait plein) et les coûts (en pointillés), en fonction du nombre de produits fabriqués exprimé en centaines d'unités.

On admet que la fabrication est comprise entre 0 et 700 unités.

Les recettes et les coûts sont exprimés en milliers d'euros.

Partie A – Lecture graphique

Répondre aux questions suivantes en vous aidant du graphique ci-dessous.

1. Combien faut-il fabriquer de produits pour avoir une recette égale à 140 000 euros ?

2. Combien de produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice positif ou nul ?

Partie B – Étude du bénéfice

On modélise :

- les recettes par la fonction R définie sur $[0;7]$ par $R(x) = -2x^3 + 4{,}5x^2 + 62x$;
- les coûts par la fonction C définie sur $[0;7]$ par $C(x) = 20x + 10$.

1. Calculer la recette et le coût pour 300 produits fabriqués. En déduire le bénéfice correspondant.

2. On note B la fonction bénéfice.
Donner l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$.

3. Vérifier que $B'(x) = -6x^2 + 9x + 42$.

4. Étudier le signe de $B'(x)$. Donner le tableau de variations de B.

5. En déduire la valeur du bénéfice maximal ainsi que le nombre de produits à fabriquer pour l'obtenir.