« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » Blaise Pascal

Chapitre III — Limites de suites

I - La notion de limite

A- Limite infinie de suite

Définition

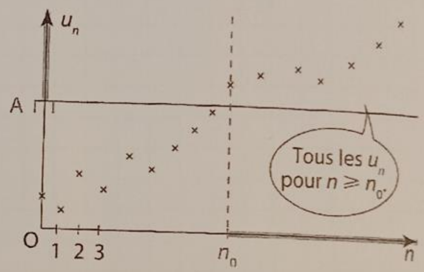
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, cela signifie que les valeurs prises par cette suite ***finissent par dépasser, à partir d'un certain rang, n'importe quel nombre arbitrairement fixé, aussi grand soit-il.***

On notera : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et on dira que la suite (u_n) "tend vers $+\infty$" ou diverge vers $+\infty$.

En d'autre termes, tout intervalle ouvert de la forme : $]A\ ;+\infty[$, où A est un réel quelconque contient tous les termes de la suite *à partir d'un certain rang.*

Illustration :

Aussi grand que soit le nombre réel A, on peut trouver un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
En termes imagés « aussi haute que l'on place la barrière horizontale A, les termes u_n parviennent à passer définitivement au-dessus ».



Propriété *(limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)*

Les suites définies sur ℕ par : $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$ et $z_n = \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$

On a donc : ♥♥♥♥ $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ ♥♥♥♥

Ces résultats, ***d'usage quotidien*** tout au long de l'année, sont à connaître impérativement et sans hésitation…

Prouvons par exemple que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$: Soit A un réel positif arbitrairement fixé (aussi grand soit-il).

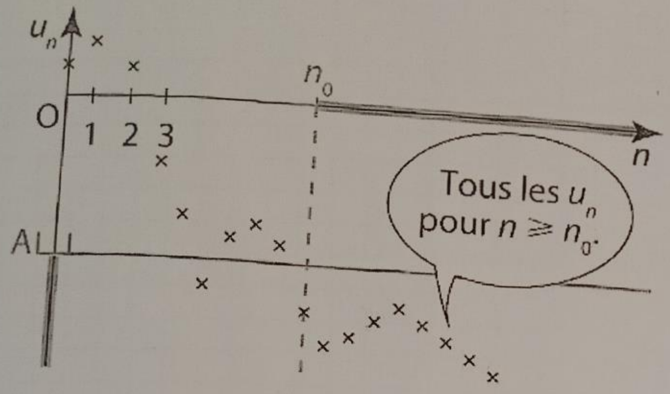
$\sqrt{n} > A$ équivaut à $(\sqrt{n})^2 > A^2$ car $x \mapsto x^2$ croît sur $[0;+\infty[$.

donc $n > A^2$: Dès que $n \geq n_0$ avec $n_0 = \text{Ent}(A^2)+1$ où $\text{Ent}(A^2)$ est la partie entière de A^2.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

De la même manière, l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme : $]-\infty\ ;A[$, où A est un réel quelconque, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Illustration :



Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : $u_n = -n^2$.
Cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

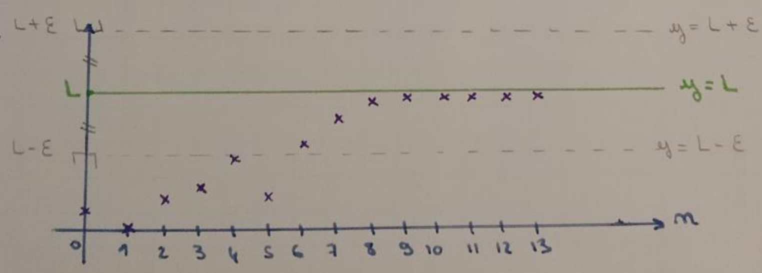
B – Limite finie de suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) admet pour limite un nombre réel L signifie que tout intervalle ouvert centré en la valeur L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On notera $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$, et on dira que la suite (u_n) converge vers L, ou encore, par abus de langage, que u_n tend vers L lorsque n tend vers $+\infty$.

Illustration :



x : points associés à (u_n) qui converge vers L.

Sur ce dessin, à partir du rang $n_0 = 6$, on a : $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ fixé.

A partir d'un certain rang, les termes de la suite *s'accumulent* autour de L.

Remarque : il y a unicité de la limite sous réserve d'existence.

Propriété *(limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)*

♥♥ **Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et ont pour limite** 0.

On a donc : ♥♥♥♥ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ ♥♥♥♥ avec $k \geq 1$.

C – Suites n'admettant pas de limite

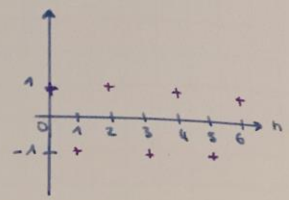
Il existe des suites n'admettant pas de limite (*ni finie, ni infinie*).

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (-1)^n$.

Les valeurs prises par cette suite, sont alternativement -1 et 1.

$\begin{cases} u_n = -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ u_n = 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Illustration :



Définition

Une suite qui *n'est pas convergente* est dite *divergente.*

Soit (u_n) une suite divergente :
On a donc plusieurs alternatives possibles : soit u_n tend vers $+\infty$, soit u_n tend vers $-\infty$, soit u_n ne se rapproche d'aucun nombre fixe.

Exemples de suites divergentes

1) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

2) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = -n$ diverge vers $-\infty$.

3) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n$ diverge (elle prend alternativement les valeurs 1 et -1).
↳ n'admet pas de limite (ni finie, ni infinie)

II – Opérations sur les limites (💣 *ce paragraphe est le plus important du chapitre.*)

A- Limite d'une somme

Soit (u_n) et (v_n) deux suites **admettant une limite (finie ou infinie)**. Soit L et L' deux réels.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si $\lim_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Exemples

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n} + n^2$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$u_n = \frac{1}{n} + n^2$

Par limites de références :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + n^2\right) = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^3 + n^2 + 3$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Par limites de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 = 3$.

Donc par limite de récurrence : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^3 + n^2 + 3) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) :

*) $u_n = n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$v_n = -n + 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = n + (-n + 1) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 1$.

**) $u_n = n + \sqrt{n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$v_n = -n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = n + \sqrt{n} - n = \sqrt{n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

***) $u_n = n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$v_n = -n + \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

et $u_n + v_n = n - n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = 0$.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Soit L et L' deux réels.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Exemples

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})(-n+4)$ *b)* $v_n = \frac{4}{n}$ *c)* $w_n = n^2 - 2023n$ *d)* $z_n = \sqrt{n} - 2n$

a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+4)$

Par limite de référence :

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$

$\lim\limits_{n + \infty} -n = -\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 = 4$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n+4) = -\infty$

Donc par limite de produit, on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+4) = -\infty$.

Donc (u_n) diverge vers $-\infty$.

b) $v_n = \frac{4}{n} = 4 \times \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 4 = 4$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Donc par limite de produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

c) $v_n = n^2 - 2023n = n^2 + (-2023n)$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $-2023 < 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2023n) = -\infty$.

On est donc apriori en présence d'une forme indéterminée (pr la somme).

Or : $w_n = n^2 - 2023n = n(n-2023)$

et : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-2023) = +\infty$

Donc par limite de produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} n(n-2023) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

On retiendra donc que lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée, tenter une factorisation permet fréquemment de lever l'indétermination.

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) : *

C – Limite d'un quotient

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	0	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	forme indéterminée	F.I.

**

d) $Z_n = \sqrt{n} - 2n$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n) = -\infty$

Donc on a une forme indéterminée pr la somme.

Or : $Z_n = \sqrt{n} - 2n = \sqrt{n}(1 - 2\sqrt{n})$

Par limite de référence :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; et par somme et produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 2\sqrt{n}) = -\infty$

Donc par limite de produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}(1-2\sqrt{n}) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} Z_n = -\infty$.

* $u_n = \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$v_n = 2n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

et $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times 2n = 2$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = 2$

$w_n = n^2$: $\lim\limits_{n \to +\infty} w = +\infty$

et $u_n \times w_n = \frac{1}{n} \times n^2 = n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times w_n) = +\infty$.

** $u_n = \frac{1}{n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$v_n = \frac{2}{n}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$.

$w_n = \frac{1}{n^2}$

$\frac{u_n}{w_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \times n^2 = n$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{w_n} = +\infty$.

__Exemples__

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2}{n^2+n-1}$; *b)* $v_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{2+\dfrac{3}{n}}$; *c)* $w_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$ *d)* $z_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+n+4}$

---

a) $u_n = \frac{2}{n^2+n-1}$

Par limites de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2+n-1) = +\infty$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$. Donc par limite de quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) $v_n = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{n}}$

Par limites de réf. du cours :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$.

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$.

Par limite de quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$

c) $w_n = \frac{n+5}{n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+5) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+1) = +\infty$

On a une F.I. par le quotient.

$$w_n = \frac{n+5}{n^2+1} = \frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{5}{n}}{n+\frac{1}{n}}.$$

Par limites de réf : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{5}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

M_2 $w_n = \frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

$$w_n = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \times \frac{\overbrace{1+\frac{5}{n}}^{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}}{\underbrace{1+\frac{1}{n^2}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}$$

d) $z_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+n+4}$ F.I.

Pour $n \neq 0$:

$$z_n = \frac{n^2\left(-2+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{n}{n^2}+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

Par limites de réf :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 = -2$.

Donc par limite de somme et produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 3.$

Par limite de quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} Z_n = \frac{-2}{3}.$

Remarque : On retiendra donc qu'il existe, en terminale, **4 *types de formes indéterminées***, que l'on note ***abusivement*** :

$$\text{“}\infty - \infty\text{”} ; \text{“}0 \times \infty\text{”} ; \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} ; \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

On s'interdira d'utiliser ces abus dans la rédaction, cela doit rester mental !

Contrairement à une idée faussement répandue, "$\frac{\infty}{0}$" n'est pas une forme indéterminée !

III– Limites obtenues par comparaison ou encadrement

Théorème de comparaison pour les limites infinies

Soit (u_n) et (v_n) deux suites :

1) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

En des termes imagés, ce théorème dit :

Preuve :

① Soit A un réel arbitrairement fixé :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, donc à partir d'un certain rang, notons le p :

$v_n \geq A$ (si $n \geq p$)

et à partir d'un certain rang q : $u_n \geq v_n$ (si $n \geq q$).

Par suite, si $n \geq \max(p ; q)$:

$u_n \geq v_n$ et $v_n \geq A$

Donc : $u_n \geq A$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 2n + (-1)^n$ *b)* $v_n = cos(n) - n$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1 ; 1\}$, donc : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Donc : $2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$

Donc en perte d'info : $2n - 1 \leq 2n + (-1)^n$ ⚠ $(-1)^n$ n'a pas de limite !

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n-1) = +\infty$ et $u_n \geq 2n - 1$

Donc par th. de comparaison :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) $v_n = \cos(n) - n$

⚠ cos et sin n'ont pas de limite en $+\infty$!

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Donc $-1 - n \leq \underbrace{\cos(n) - n}_{v_n} \leq 1 - n$

En perte d'info : $v_n \leq 1 - n$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - n) = -\infty$

Donc par th. de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 4$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Ecrire l'expression de u_n à l'aide du symbole $\sum$.

b) Justifiez que pour tout entier k, si $1 \leq k \leq n$, alors on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, puis en déduire que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $u_n \geq \sqrt{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

✂ --

$n \geq 4$ et $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

b) Si $1 \leq k \leq n$, alors : $\sqrt{1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ car la f° $\sqrt{\ }$ croît sur $[0;+\infty[$.

$1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$

Donc $\frac{1}{1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ car la f° inverse décroît sur $]0;+\infty[$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Avec $k = 1$: $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Avec $k = 2$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Avec $k = 3$: $\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Avec $k = 4$: $\frac{1}{\sqrt{4}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\vdots$

Avec $k = n$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

On somme membre à membre ces n inégalités de m̂ sens :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \times n$$

Or $\frac{1}{\sqrt{n}} \times n = \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Donc $u_n \geq \sqrt{n}$.

c) Par limite de réf : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Et $u_n \geq n$, donc par th. de comparaison.

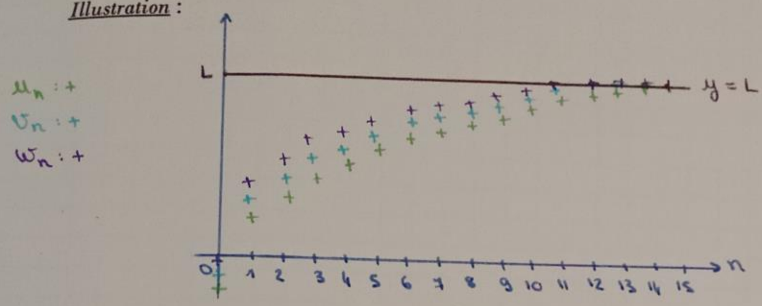
On a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

♥♥♥♥ ***Théorème d'encadrement (communément appelé théorème des gendarmes)*** ♥♥♥♥

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et *si* les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la *MEME* limite L, avec L réel, alors, (v_n) converge vers L, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.

Illustration :



On retiendra bien qu'il faut que 3 conditions soient vérifiées pour pouvoir appliquer ce théorème :

1. Double encadrement : $u_n \leq v_n \leq w_n$ (à partir d'un certain rang)
2. (u_n) et (w_n) sont convergentes.
3. (u_n) et (w_n) ont la m̃ limite (finie).

Preuve du théorème sous forme d'exercice corrigé :

Soit (u_n), (v_n) *et* (w_n) trois suites de réels définies sur ℕ.

On suppose qu'il existe un entier p tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, on ait : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

On suppose de plus que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel L.

Alors, la suite (w_n) converge également vers L.

Soit ε un réel strictement positif fixé.

- ✓ Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, que l'on nommera q, on a : pour tout entier naturel $n \geq q$, $L-\varepsilon \leq u_n \leq L+\varepsilon$.
- ✓ Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, que l'on nommera r, on a : pour tout entier naturel $n \geq r$, $L-\varepsilon \leq w_n \leq L+\varepsilon$.
- ✓ En déduire qu'il existe un entier naturel nommé s, que l'on exprimera en fonction de p, q et r, tel que pour tout entier naturel $n \geq s$, on ait : $L-\varepsilon \leq v_n \leq L+\varepsilon$.
- ✓ Conclure alors quant à la démonstration du théorème des gendarmes.

B – Preuve du théorème des gendarmes.

i) Vu que la suite (u_n) converge vers L on a :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang, nommé q tel que : pour tout $n \geq q$: $-\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon$ c'est-à-dire : $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$

Ceci n'est autre que la définition rigoureuse de suite qui converge vers L !!

ii) Exactement pareil vu que par donnée, (w_n) converge aussi vers le même réel L.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang nommé r tel que, pour tout entier $n \geq r$, on ait $L - \varepsilon \leq w_n \leq L + \varepsilon$

iii) D'après la 1ère condition de l'énoncé on a aussi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Soit s le plus grand des trois entiers p, q et r. ($s = \text{Max}(p\,;q\,;r)$).

Pour tout entier $n \geq s$ on a donc les 3 choses suivantes qui sont vraies

$$\begin{cases} (1) & L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon \\ (2) & L - \varepsilon \leq w_n \leq L + \varepsilon \\ (3) & u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$$

Donc en perte d'information on a aussi :
$$\begin{cases} v_n \overset{(3)}{\leq} w_n \overset{(2)}{\leq} L + \varepsilon & (*) \\ \text{et} & \\ L - \varepsilon \overset{(1)}{\leq} u_n \overset{(3)}{\leq} v_n & (**) \end{cases}$$

De sorte qu'on a : $L - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq L + \varepsilon$ et donc dès que $n \geq s$, on a bien : $L - \varepsilon \leq v_n \leq L + \varepsilon$

Ce qui signifie très exactement que la suite (v_n) converge vers le réel L, et achève ainsi la démonstration du théorème des gendarmes !

Exemples fondamentaux

Déterminer les limites des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}^*$:

a) $v_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$; *b)* $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$; *c)* $w_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{2n}$

a) $v_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ ⚠ $\sin(n)$ n'a pas de limite en $+\infty$!!

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

Donc $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ car $\sqrt{n} > 0$.

*) Or par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

Donc d'après le th. des gendarmes : (v_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

b) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$ ⚠ $(-1)^n$ diverge grossièrement.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

Donc $n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1$

Donc $\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$ car $n>0$.

$\frac{n}{n} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n} + \frac{1}{n}$

Bref : $1-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{n}$

Or par limite de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.

Donc d'après le th. des gendarmes : (u_n) converge vers 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

c) $w_n = \frac{n^2+\cos(n)}{2n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$

Donc : $n^2-1 \leqslant n^2+\cos(n) \leqslant n^2+1$

Donc $\frac{n^2-1}{2n} \leqslant \frac{n^2+\cos(n)}{2n} \leqslant \frac{n^2+1}{2n}$ car $2n>0$.

$\frac{n^2}{2n} - \frac{1}{2n} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2}{2n} + \frac{1}{2n}$

$\frac{n}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant w_n \leqslant \frac{n}{2} + \frac{1}{2n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2n}\right) = +\infty$.

Or, $\frac{n}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant w_n$ donc d'après ⚠ le th. d'encadrement on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

IV- Comportement à l'infini

Propriété

Soit q un réel, et considérons la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$!
- Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite finie.

Mnémo : ♥♥ ***une suite géométrique de raison q converge si et seulement si*** $-1 < q \leqslant 1$ ♥♥

Preuve dans le cas où $q > 1$:

$q > 1$ donc $q = 1 + x$ avec $x > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n = (1+x)^n$

D'après l'inégalité de Bernoulli (exo8 chap 2) ĉ $x > 0$, on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Donc $q^n \geqslant 1 + nx$

Or $x > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + nx) = +\infty$.

Donc par th. d'encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Exemples

1) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n}$

2) Soit $v_n = (-\frac{1}{2})^n$. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

1) $e^n = q^n$ avec ici $q = e$.

Or $e \simeq 2,718$ donc $e > 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

$e^{-2n} = (e^{-2})^n = q^n$ avec $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \simeq 0,135$

Donc $0 < q < 1$, et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n} = 0$.

2) $v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n = q^n$ avec $q = \frac{-1}{2}$.

Or $-1 < \frac{-1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exercice 2

Déterminer : *a)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1+2^n}{e^n}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,75^n - 4 \times 0,3^n$; *c)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n+3^n}{5^n+6^n}$

a) Soit $u_n = \dfrac{1+2^n}{e^n}$ où $n \in \mathbb{N}$

F. I. de type "infini sur infini".

$u_n = \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{2^n}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n + \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$

$q = \dfrac{1}{e}$: $q \simeq 0,37$ donc $0 < \dfrac{1}{e} < 1$

$q' = \dfrac{2}{e}$: $q \simeq 0,74$ et $0 < \dfrac{2}{e} < 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{e}\right)^n = 0$.

Donc par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) $v_n = 1,75^n - 4 \times 0,3^n$

$1,75 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,75^n = +\infty$ et $0 < 0,3 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0$.

Donc par limites de produit et somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

c) $w_n = \dfrac{2^n+3^n}{5^n+6^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n+3^n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (5^n+6^n) = +\infty$

Donc F. I. pour le quotient.

$w_n = \dfrac{2^n+3^n}{5^n+6^n} = \dfrac{3^n \times \left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)}{6^n\left(\frac{5^n}{6^n}+1\right)} = \dfrac{3^n \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{6^n \times \left(\left(\frac{5}{6}\right)^n+1\right)}$

$w_n = \dfrac{3^n}{6^n} \times \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n+1}$

Or $0 < \dfrac{1}{2} < 1$

$0 < \dfrac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

$0 < \dfrac{5}{6} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Donc par limite de sommes, quotient et produit :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Exercice 4

(u_n) est définie sur ℕ par : $u_n = \sqrt{e^{2n}+n+1}$ .En utilisant un théorème de comparaison, déterminer la limite de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{2n} + n + 1 > n$ car $e^{2n} > 0$.

Donc $\sqrt{e^{2n}+n+1} > \sqrt{n}$ car la f° est str croissante sur $[0;+\infty[$

$$u_n > \sqrt{n}$$

Or par limite de référence : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc par th. d'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 0,\underbrace{444...4}_{n \text{ fois}}$

Etudier la limite de la suite (u_n).

$u_1 = 0,4 = \frac{4}{10}$

$u_2 = 0,44 = \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$

$u_3 = 0,444 = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$

$u_4 = 0,4444 = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10\,000}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \dots + \frac{4}{10^n}$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{10^k} = 4 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}$$

$$u_n = 4 \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k}_{\text{somme des termes d'une suite géo de raison } q = \frac{1}{10} = 0,1.}$$

Rappel

Si $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$1^{er} \text{ terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nb termes}}}{1-\text{raison}}$$

$$u_n = 4 \times \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$u_n = 4 \times \frac{1}{10} \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}$$

$$u_n = \frac{4}{10} \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}$$

$$u_n = \frac{4}{10} \times \frac{10}{9} \times (1-0,1^n)$$

$$u_n = \frac{4}{9}(1-0,1^n)$$

Or : $0 < 0,1 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0$.

Donc par somme et produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{9}$.

M_2

$x = 0,444\ldots$
$10x = 4,44\ldots$
$10x - x = 4$
$9x = 4$
$x = \frac{4}{9}$.

V- Algorithme sur les suites (boucle While)

Algorithme de détermination d'une valeur seuil

On considère une population de bactéries dont la population augmente de 40 % toutes les heures. On note u_n le nombre de milliers de bactéries après n heures, et on donne $u_0 = 1$ (quantité initiale de bactéries).

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Déterminer le sens de variation de cette suite.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) En déduire qu'il existe un rang, noté n_0, à partir duquel $u_n \geq 10$.

e) On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel :

VARIABLES :	A, n nombres, A de type réel, n de type entier.
ENTREE :	*Demander la valeur de A.*
INITIALISATION :	Affecter à n la valeur 0. (On notera : $n \leftarrow 0$).
TRAITEMENT :	*Tant que* $1{,}4^n < A$ *Remplacer n* par $n+1$. (On notera : $n \leftarrow n+1$). *Fin du Tant que*
SORTIE :	*Afficher n.*

Que fait concrètement cet algorithme ?

f) Voici un script Python correspondant à cet algorithme de seuil :

```
def seuil(A):
    n=0
    while 1.4**n < A :
        n=n+1
    return n
```

Le coder, puis déterminer la valeur du plus petit entier n_0 à partir duquel $u_n \geq 10$. Même question avec $u_n \geq 100$. Et si l'on tapait : seuil(0), qu'aurait-on comme affichage en sortie ?

✂ -

a) $u_{n+1} = 1{,}4 u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est une suite géo de raison $q = 1{,}4$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n = 1{,}4^n \times 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1{,}4^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1{,}4^{n+1}}{1{,}4^n} = 1{,}4$.

Or $1{,}4 > 1$, donc (u_n) est croissante.

c) $u_n = 1,4^n$

Or $1,4 > 1$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,4^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Cela signifie que pr tt réel A arbitrairement fixé, il existe un rang n_0 à partir duquel : $u_n \geq 10$.

Pour $A = 10$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Leftrightarrow u_n \geq 10)$.

e) Il détermine le + petit entier n à partir duquel : $1,4^n \geq A$, càd le premier entier naturel à partir duquel il y a au - A (milliers) de bactéries.

g) Si $A = 10$: sortie $n = 7$

Si $A = 100$: sortie $n = 14$

À partir du rang $n_0 = 14$, on a $u_n \geq 14$.

Si $A = 0$, on obtient en sortie $n = 0$.

VI-Convergence des suites monotones

Rappel-Définitions

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***majorée***, s'il existe un réel M, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite (u_n).♥♥
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***minorée***, s'il existe un réel m, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite (u_n).♥♥
- Une suite est dite ***bornée*** si elle est à la fois ***minorée et majorée.***♥♥

Remarque fondamentale

- Toute suite à valeurs positives..est..minorée..par 0......
- Toute suite à valeurs négatives..est..majorée..par 0...

Voici un *théorème fondamental* qui *tombe systématiquement au baccalauréat* :

♥♥♥♥ *Théorème de convergence des suites monotones* ♥♥♥♥

1) Si une suite est croissante... ET ...majorée..., alors elle ......converge .

2) Si une suite est décroissante....ET ....minorée.., alors elle...converge....

On admet ce théorème de la *convergence monotone*, conformément au programme.

Remarque : Ce théorème est un théorème *existentiel* : il permet de démontrer la convergence d'une telle suite, mais ne précise en aucun cas la valeur de la limite de cette suite.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur N par : $u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$

a) Etablir que cette suite est minorée par 0, et qu'elle est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) converge. Déterminer la limite de cette suite.

---

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, donc $n+1 \geq 0$; $2 > 0$

donc $\frac{2}{n+1} > 0$

donc $3 + \frac{2}{n+1} > 3 > 0$

$u_n > 0$

Donc (u_n) est minorée par 0.

Sens de varia° : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{2}{n+1} - \left(3 + \frac{2}{n+1}\right)$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1) - 2(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)}$

$-2 < 0$; $n+2 > 0$; $n+1 > 0$ car $n \geq 0$.

Donc : $\frac{-2}{(n+1)(n+2)} < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Donc (u_n) décroît.

b) (u_n) décroît et (u_n) est minorée par 0.

Donc d'après le th. de convergence des suites monotomes : (u_n) converge.

$u_n = 3 + \frac{2}{n+1}$

Par limite de référence : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc par produit et somme :
(u_n) converge vers 3.

$\lim_{n \to +\infty} 3 = 3$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Attention **à la grosse erreur**, souvent commise par les élèves au bac :

« La suite (u_n) est décroissante, et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0. »

Si vous ne voyez pas l'erreur dans ce raisonnement, relisez (une ou plusieurs fois) l'exemple précédent !!

Remarque naïve : si une suite (u_n) converge vers L, alors on a : $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$. Que vaut $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$? $= L$

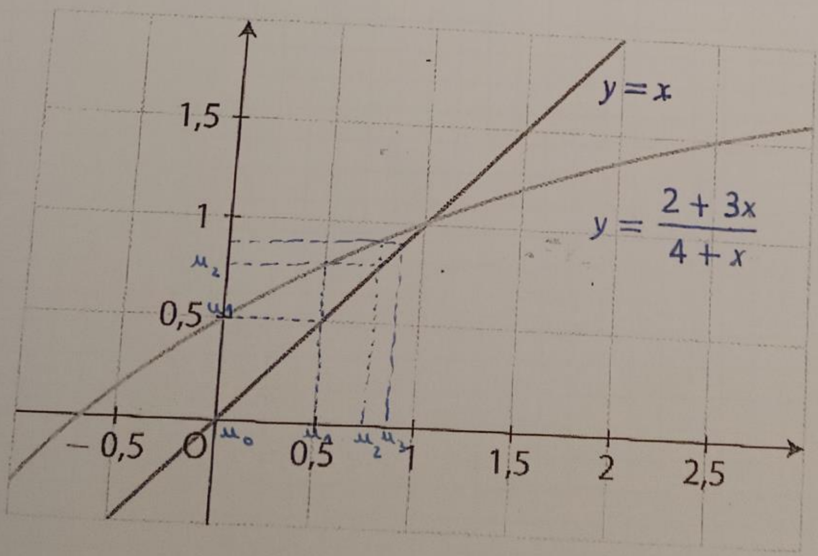
Exercice 5 *(fondamental, le classique de bac)*

f est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 3] par : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

1) Montrer que f est croissante sur l'intervalle [0 ; 3].

2) Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) On donne dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f sur [0 ; 3], ainsi que la droite d'équation : $y = x$.



Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en s'aidant de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$, construire géométriquement sur l'axe des abscisses u_1, u_2 et u_3.

b) Quelles conjectures faites-vous concernant : le sens de variation de (u_n) ? La convergence de (u_n) ?

$f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$ avec $0 \leq x \leq 3$.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+2 \\ u'(x) = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} v(x) = x+4 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$f'(x) = \dfrac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2}$

Or $10 > 0$ et $(x+4)^2 > 0$

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0;3]$.

Donc f croît sur $[0;3]$.

2) $u_1 = f(u_0)$

$u_2 = f(u_1)$

$u_3 = f(u_2)$

b) Conjecture : $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

Il semblerait que (u_n) soit croissante.

Et que (u_n) converge vers 1.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d) En déduire que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite L.

c) Raisonnons par récurrence : Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2}$.

Or $0 \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ est vraie, donc on a : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel arbitrairement fixé.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, à savoir que :

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

Or par h.r : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

Donc : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$ car f croit sur $[0;3]$ don sur $[0;1]$.

Donc : $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

or $0 \leq 0,5$, donc : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) croit.

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$, donc (u_n) est majorée par 1.

Donc d'après le th. de convergence des suites monotones, (u_n) converge.

Soit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

Or (u_n) converge donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$.

Par limite de somme et produit et quotient :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4} = \dfrac{3L + 2}{L + 4}$.

Donc par unité de la limite : $L = \dfrac{3L + 2}{L + 4}$

$L(L+4) = 3L + 2$

$L^2 + 4L - 3L - 2 = 0$

$L^2 + L - 2 = 0$.

1 et -2 sont les racines évidentes de cette équa° : Donc $L = 1$ ou $L = -2$.

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 0$

Donc $L \geq 0$. Donc $L = 1$

Exercice 6 *(issu de baccalauréat, Métropole 2023, sujet 2)*

5 points

EXERCICE 2

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

Partie A

u_n = nb (de millions) d'insectes au bout de n mois.

$u_0 = 0,1$ million

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,6 u_n$ car augmenter de 60 % le nb u_n revient à le multiplier par le c.d $CM = 1 + \frac{60}{100} = 1,6$.

Donc la suite (u_n) est géo de raison $q = 1,6$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_n = 0,1 \times 1,6^n$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0,1 \times 1,6^n$

$1,6 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,6^n = +\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1 = 0,1$, donc par limite de produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. À ce stade de l'année : $u_n > 0,4$ est résolue à l'aide d'une calculette.

$u_n = 0,1 \times 1,6^n$

u_n	0,1	0,16	0,256	0,4096
n	0	1	2	3

À partir du rang 3, $u_n > 0,4$: le + petit entier n tel que $u_n > 0,4$ est 3

4. Il n'est pas préservé car $u_n > 0,4$, si $n \geqslant 3$! 0,4 millions = 400 000.

Partie B

1. $v_1 = 1,6 v_0 - 1,6 v_0^2$
$v_1 = 1,6 \times 0,1 - 1,6 \times 0,1^2$
$v_1 = 0,16 - 0,016$
$v_1 = 0,144$ millions

Au bout d'un mois, $0,144 \times 10^6 = 144\,000$ insectes.

2. a. $f(x) = x$

$1,6x - 1,6x^2 = x$
$-1,6x^2 - 0,6x = 0$

$x(-1,6x+0,6)=0$ ce qui équivaut à : $x=0$ ou $-1,6x+0,6=0$

$x=0$ ou $-1,6x=-0,6$

$x=\frac{0,6}{1,6}$

b. $f(x)=1,6x-1,6x^2$ et $0\leq x\leq \frac{1}{2}$.

$f'(x)=1,6-3,2x$

$f'(x)\geq 0 \iff 1,6-3,2x\geq 0 \iff 1,6\geq 3,2x \iff \frac{1,6}{3,2}\geq x \iff x\leq 0,5$.

Donc f croît sur $[0;0,5]$:

x	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$0,4$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1,6\times 0,5-1,6\times 0,5^2$
$=0,4$

3.a. $n\in\mathbb{N}$ et $P(n)$ la propriété : $0\leq v_{n+1}\leq \frac{1}{2}$.

→ Initialisa° : Pour $n=0$: $v_0=0,1$ et $v_1=1,6v_0-1,6v_0^2=1,6\times 0,1-1,6\times 0,1^2$

$v_1=0,144$.

Or $0\leq 0,1\leq 0,144\leq\frac{1}{2}$ est vraie, donc $P(0)$ est vraie.

→ Etape d'hérédité : Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ soit vraie :

$0\leq v_n\leq v_{n+1}\leq \frac{1}{2}$.

Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie, càd que : $0\leq v_{n+1}\leq v_{n+2}\leq\frac{1}{2}$.

Or par HR : $0\leq v_n\leq v_{n+1}\leq\frac{1}{2}$

Donc c̄ f croît sur $[0;\frac{1}{2}]$, on a :

$f(0)\leq f(v_n)\leq f(v_{n+1})\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

$0\leq v_{n+1}\leq v_{n+2}\leq 0,4$

Or $0,4\leq\frac{1}{2}$ donc : $0\leq v_{n+1}\leq v_{n+2}\leq\frac{1}{2}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ vraie, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq v_n\leq v_{n+1}\leq\frac{1}{2}$.

3b. $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n\leq v_{n+1}$, donc (v_n) croît.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n\leq\frac{1}{2}$, donc (v_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 7 (Issu de baccalauréat, métropole 2022)

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde au cahier des charges sité précédemment :

```
def protocole():
    u=2
    n=0
    while u < 5.5 :
        u= 0.7u + 1.8
        n= n+1
    return n
```

1. $u_1 = u_0\left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1,8$

$u_1 = 2 \times 0,7 + 1,8$

$u_1 = 3,2$

2. $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1,8$

$u_{n+1} = 0,7\,u_n + 1,8$

Donc d'après le th. de convergence des suites monotones, (v_n) converge.

3.c. Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$: ℓ est solution de $f(x) = x$.

D'après q. 2a. $f(x) = x \iff x = 0$ ou $x = 0{,}375$.

Or (v_n) croît et $v_0 = 0{,}1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0{,}1$.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \geqslant 0{,}1$

$\ell \geqslant 0{,}1$.

Donc $\ell = 0{,}375$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0{,}375$

L'équilibre est préservé ssi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \dfrac{400\,000}{1\,000\,000}$: $v_n \leqslant 0{,}4$.

Or $0{,}375 < 0{,}4$, donc à long terme l'équilibre est préservé.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   c. Déterminer la valeur de ℓ.
   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

   a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4)?

   b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

4.a. Ce pgm renvoie en sortie l'année à partir de laquelle le nb d'insectes admet au moins 0,4 millions d'individu.

Or d'après q. 3c. (v_n) croît et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0{,}375$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$v_n \leqslant 0{,}375$: ce pgm ne renvoie rien en sortie : il tourne en boucle infinie.

4.b. seuil (0,35).

On cherche le + petit entier n tel que : $v_n \geqslant 0{,}35$.

n	0	1	2	3	4	5	6
v_n	0,1	0,144	0,1972	0,2533	0,3026	0,3377	0,3578

$v_0 = 0{,}1$

$v_{n+1} = 1{,}6 v_n - 1{,}6 v_n^2$

En sortie, le pgm retourne 6. Au bout de 6 mois le nb d'insectes est sup. ou égal à 0,35 millions càd 350 000.

3.a. $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

→ Initialisation : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$, or $2 \leq 3,2 < 6$: vrai.

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

→ Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

Mq : $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$.

Or par h.r. : $u_n \leq u_{n+1} < 6$

$0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 0,7 \times 6$

$0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8$

$u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

→ Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

3.b. D'après 3.a : (u_n) croît et elle est majorée par 6.

Donc (u_n) converge.

3.c. $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} (0,7u_n + 1,8)$, par unicité de la limite.

$$l = 0,7l + 1,8$$
$$l - 0,7l = 1,8$$
$$0,3l = 1,8$$
$$l = \frac{1,8}{0,3}$$
$$l = 6$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

4.a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 6 - u_n$

$v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,7u_n$

Or, $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0,7u_n + 1,8)$

$v_{n+1} = 6 - 0,7u_n - 1,8$

$v_{n+1} = 4,2 - 0,7 u_n$

$v_{n+1} = 0,7(6 - u_n) = 0,7 v_n$

Donc (v_n) est géo de raison $q = 0,7$.

4.b. On sait que (v_n) est géo donc :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = 4 \times 0,7^n$

Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 6 - u_n$

Donc $u_n = 6 - v_n$

$u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$

4.c. → voir pgm

Exercice 9

Trouver la bonne réponse à chaque question de ce QCM.

1.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = e^{2n+1}.$$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2;

b. géométrique de raison e;

c. géométrique de raison e^2;

d. convergente vers e.

$u_{n+1} = e^{2(n+1)+1} = e^{2n+3}$

$u_{n+1} = e^{2+2n+1} = e^2 \times e^{2n+1}$

$= e^2 \times u_n$

↳ raison

2.

La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \dfrac{1}{n} w_n$.

a. La suite (w_n) est géométrique

b. La suite (w_n) n'admet pas de limite

c. $w_5 = \dfrac{1}{15}$

d. La suite (w_n) converge vers 0.

Réc évidente :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n > 0$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n} \leq 1$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

Donc $(w_n) \searrow$.

(w_n) minorée par 0.

Donc (w_n) converge.

3. (La suite ci-après sert aux questions 3,4 et 5).

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1.$$

La valeur de u_2 est égale à :

a. $\dfrac{11}{4}$

b. $\dfrac{13}{2}$

c. 3,5

b. 2,7

$V_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n + 1 - n - 1$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} n$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} (u_n - n)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

4.

La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c. constante.

d. ni arithmétique, ni géométrique.

5.

On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

```
1  def terme (n)
2      U=3
3      for i in range(n) :
4      ......................
5      return U
```

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne 4 par :

a. U = U/2 + (i+1)/2+1

b. U = U/2 + n/2 + 1

c. U = U/2 + (i−1)/2+1

d. U = U/2 + i/2 + 1

Exercice 10

*Marie Sklodowska-Curie (*1867 – 1934*) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,995$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\,(0,995^n + 1)$.

c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4.

On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1  def noyaux (n) :
2      V =6*10**21
3      L=[V]
4      for k in range (n) :
5          V= 0,995V + 1,5*10**19
              3*10**21*(0,995**k+1)
6          L.append(V)
7      return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude?

✂--

1.a. $1g \rightarrow 3 \times 10^{21}$ noyaux
$2g \rightarrow 2 \times 3 \times 10^{21}$ noyaux

$v_0 = 6 \times 10^{21}$ noyaux

b. $v_{n+1} = v_n \left(1 - \frac{0,05}{100}\right) + 0,005 \times 3 \times 10^{21}$

$v_{n+1} = 0,995\, v_n + 5 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{21}$

$v_{n+1} = 0,995\, v_n + 15 \times 10^{18}$

$v_{n+1} = 0,995\, v_n + 1,5 \times 10^{19}$

2.a. $n \in \mathbb{N}$, $P(n) : 0 \leq v_{n+1} \leq v_n$

Pour $n=0$: $v_0 = 6 \times 10^{21}$

par 1.b : $v_1 = 0,995 \times 6 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19}$
$v_1 = 5,985 \times 10^{21}$

Or $0 \leq 5,985 \times 10^{21} \leq 6 \times 10^{21}$

Donc $0 \leq v_n \leq v_0$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité : $n \in \mathbb{N}$ est ici fixé et on suppose que :

$0 \leq v_{n+1} \leq v_n$

Mq $P(n+1)$ est vraie, càd que : $0 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$

Or par H.R. : $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$

Donc : $0 \times 0,995 \leq 0,995 v_{n+1} \leq 0,995 v_n$ car $0,995 > 0$.

Donc : $1,5 \times 10^{19} \leq 0,995 v_{n+1} + 1,5 \times 10^{19} \leq 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}$

$0 \leq 1,5 \times 10^{19} \leq v_{n+2} \leq v_{n+1}$: $P(n+1)$ vraie.

Conclusion : $P(0)$ vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.

2.b. D'après 2.a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$ donc (v_n) décroit
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$, donc (v_n) est minorée par 0.

D'après le th. de comparaison des suites monotones :
(v_n) converge.

3.a. But : Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,995 u_n$

Exprimons donc u_{n+1} en f° de u_n :

Or $u_{n+1} = v_{n+1} - 3 \times 10^{21}$

$u_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}$

Enfin : $v_n = u_n + 3 \times 10^{21}$

Donc $u_{n+1} = 0,995 (u_n + 3 \times 10^{21}) + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}$

$u_{n+1} = 0,995 u_n + 0,995 \times 3 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21}$

$u_{n+1} = 0,995 u_n$

Donc (u_n) est géo de raison $q = 0,995$.

3.b. D'après q. 3.a, (u_n) est géo.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ avec $q = 0{,}995$

$u_0 = v_0 - 3 \times 10^{21}$

$u_0 = 6 \times 10^{21} - 3 \times 10^{21}$

$u_0 = 3 \times 10^{21}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 10^{21} \times 0{,}995^n$

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$

Donc : $v_n = u_n + 3 \times 10^{21}$

$v_n = 3 \times 10^{21} \times 0{,}995^n + 3 \times 10^{21}$

$v_n = 3 \times 10^{21} (0{,}995^n + 1)$

3.c. $v_n = 3 \times 10^{21} (0{,}995^n + 1)$

$0 < 0{,}995 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}995^n = 0$

Donc par somme et produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3 \times 10^{21}$

Interprétation

v_n = nb de noyaux de polonium n jours après le début de l'e

À très long terme, le nb de noyaux tend à se stabiliser à 3×10^{21}.

4.a. → voir pgm

4.b. 52 semaines = $52 \times 7 = 364$ jours

noyau (364)