« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » Blaise Pascal

Chapitre III — Limites de suites

I - La notion de limite

A- Limite infinie de suite

Définition

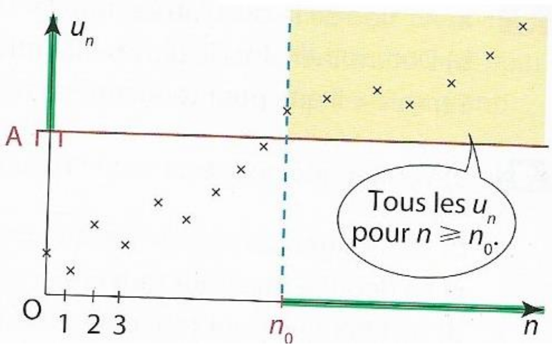
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, cela signifie que les valeurs prises par cette suite ***finissent par dépasser, à partir d'un certain rang, n'importe quel nombre arbitrairement fixé, aussi grand soit-il.***

On notera : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, et on dira que la suite (u_n) …………..………………

En d'autre termes, tout intervalle ouvert de la forme : $]A\ ;+\infty[$, où A est un réel quelconque contient tous les termes de la suite *à partir d'un certain rang.*

Illustration :

Aussi grand que soit le nombre réel A, on peut trouver un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
En termes imagés « aussi haute que l'on place la barrière horizontale A, les termes u_n parviennent à passer définitivement au-dessus ».



Propriété **(limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)**

Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$ et $z_n = \sqrt{n}$ ont pour limite …..

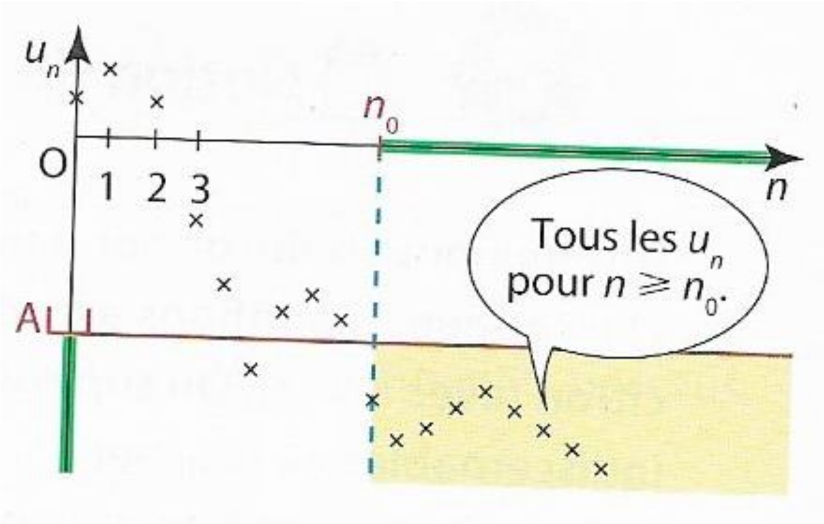
On a donc : ♥♥♥♥ ♥♥♥♥

Ces résultats, ***d'usage quotidien*** tout au long de l'année, sont à connaître impérativement et sans hésitation…

Prouvons par exemple que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$:

De la même manière, l'écriture $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme : $]-\infty\ ;\ A[$, où A est un réel quelconque, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

__Illustration__ :



__Exemple__

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : $u_n = -n^2$.
Cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

__B – Limite finie de suite__

__Définition__

Dire qu'une suite (u_n) admet pour limite un nombre réel L signifie que tout intervalle ouvert centré en la valeur L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On notera $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, et on dira que la suite (u_n) ………………………, ou encore, par abus de langage, que u_n tend vers L lorsque n tend vers $+\infty$.

__Illustration__ :

A partir d'un certain rang, les termes de la suite *s'accumulent* autour de L.

__Remarque__ : il y a **unicité** de la limite sous réserve d'existence.

<u>Idée de la démonstration</u> :

Propriété ***(limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)***

♥♥ **Les suites de terme général** $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ **sont convergentes et ont pour limite ....**

On a donc : ♥♥♥♥ ♥♥♥♥

C – Suites n'admettant pas de limite

Il existe des suites n'admettant pas de limite (*ni finie, ni infinie*).

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : $u_n = (-1)^n$. *Illustration :*

Les valeurs prises par cette suite, sont alternativement .... et .....

Définition

Une suite qui ***n'est pas convergente*** est dite ***divergente.***

Soit (u_n) une suite divergente :
On a donc plusieurs alternatives possibles : soit u_n tend vers $+\infty$, soit u_n tend vers $-\infty$, soit u_n ne se rapproche d'aucun nombre fixe.

Exemples de suites divergentes

1) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

2) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = -n$ diverge vers $-\infty$.

3) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n$ diverge (elle prend alternativement les valeurs 1 et -1).

II – Opérations sur les limites (***ce paragraphe est le plus important du chapitre.***)

A- Limite d'une somme

Soit (u_n) et (v_n) deux suites **admettant une limite (finie ou infinie).** Soit L et L' deux réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$						

Exemples

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n} + n^2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Soit (v_n) la suite définie sur ℕ par : $v_n = n^3 + n^2 + 3$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) :

B – Limite d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites **admettant une limite (finie ou infinie).** Soit L et L' deux réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$									

Exemples

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = (1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})(-n+4)$ *b)* $v_n = \dfrac{4}{n}$ *c)* $w_n = n^2 - 2023n$ *d)* $z_n = \sqrt{n} - 2n$

✂---

☝ *On retiendra donc que lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée, tenter une ……………… permet fréquemment de lever l'indétermination.*

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) :

C – Limite d'un quotient

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	0	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{u_n}{v_n}) =$									

Exemples

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2}{n^2+n-1}$; *b)* $v_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{2+\dfrac{3}{n}}$; *c)* $w_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$ *d)* $z_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+n+4}$

✂--

Remarque : On retiendra donc qu'il existe, en terminale, **4** ***types de formes indéterminées***, que l'on note ***abusivement*** :

$$\text{“}\infty-\infty\text{”} ; \text{“}0\times\infty\text{”} ; \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} ; \text{“}\frac{0}{0}\text{”}.$$

On s'interdira d'utiliser ces abus dans la rédaction, cela doit rester mental !

Contrairement à une idée faussement répandue, " $\dfrac{\infty}{0}$ " n'est pas une forme indéterminée !

III– Limites obtenues par comparaison ou encadrement

♥♥ ***Théorème de comparaison pour les limites infinies*** ♥♥

Soit (u_n) et (v_n) deux suites :

1) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors....................

2) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors ....

En des termes imagés, ce théorème dit :

Preuve :

Exemple

Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 2n + (-1)^n$ *b)* $v_n = \cos(n) - n$

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 4$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ...+ \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Ecrire l'expression de u_n à l'aide du symbole $\sum$.

b) Justifiez que pour tout entier k, si $1 \leq k \leq n$, alors on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, puis en déduire que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $u_n \geq \sqrt{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

✂--

♥♥♥♥ ***Théorème d'encadrement (communément appelé théorème des gendarmes)*** ♥♥♥♥

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et *si* les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la *MEME* limite L, avec L réel, alors, ...

Illustration :

On retiendra bien qu'il faut que 3 conditions soient vérifiées pour pouvoir appliquer ce théorème :

Preuve du théorème sous forme d'exercice corrigé :

Soit (u_n), (v_n) *et* (w_n) trois suites de réels définies sur $\mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe un entier p tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, on ait : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

On suppose de plus que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel L.

Alors, la suite (w_n) converge également vers L.

Soit ε un réel strictement positif fixé.

- ✓ **Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, que l'on nommera q, on a :**
  pour tout entier naturel $n \geq q$, $L-\varepsilon \leq u_n \leq L+\varepsilon$.
- ✓ **Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, que l'on nommera r, on a :**
  pour tout entier naturel $n \geq r$, $L-\varepsilon \leq w_n \leq L+\varepsilon$.
- ✓ **En déduire qu'il existe un entier naturel nommé s, que l'on exprimera en fonction de p, q et r, tel que pour tout entier naturel $n \geq s$, on ait : $L-\varepsilon \leq v_n \leq L+\varepsilon$.**
- ✓ **Conclure alors quant à la démonstration du théorème des gendarmes.**

B – Preuve du théorème des gendarmes.

✓ Vu que la suite (u_n) converge vers L on a :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang, nommé q tel que : pour tout $n \geq q$: $-\varepsilon \leq u_n - L \leq \varepsilon$ c'est-à-dire : $L-\varepsilon \leq u_n \leq L+\varepsilon$

Ceci n'est autre que la définition rigoureuse de suite qui converge vers L !!!

✓✓) Exactement pareil vu que par données, (w_n) converge aussi vers le même réel L.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang nommé r tel que, pour tout entier $n \geq r$, on ait : $L-\varepsilon \leq w_n \leq L+\varepsilon$

✓✓✓) D'après la 1ère condition de l'encadré on a aussi : $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Soit s le plus grand des trois entiers p, q et r : $(s = \mathrm{Max}(p;q;r))$.

Pour tout entier $n \geq s$ on a donc les 3 choses suivantes qui sont vraies :

$$\begin{cases} (1) \quad L-\varepsilon \leq u_n \leq L+\varepsilon \\ (2) \quad L-\varepsilon \leq v_n \leq L+\varepsilon \\ (3) \quad u_n \leq v_n \leq w_n \end{cases}$$

Donc en perte d'information on a aussi :

$$\begin{cases} v_n \overset{(3)}{\leq} w_n \overset{(2)}{\leq} L+\varepsilon \quad (*) \\ \text{et} \\ L-\varepsilon \overset{(1)}{\leq} u_n \overset{(3)}{\leq} v_n \quad (**) \end{cases}$$

De sorte qu'on a : $L-\varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq L+\varepsilon$ et donc dès que $n \geq s$, on a bien : $L-\varepsilon \leq v_n \leq L+\varepsilon$.

Ce qui signifie très exactement que la suite (v_n) converge vers le réel L, et achève ainsi la démonstration du théorème des gendarmes !

__Exemples fondamentaux__

Déterminer les limites des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}^*$:

a) $v_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$; *b)* $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$; *c)* $w_n = \dfrac{n^2+\cos(n)}{2n}$

IV– Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un réel, et considérons la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$.

- **Si $q > 1$, alors …………….**
- **Si $-1 < q < 1$, alors ………..**
- **Si $q = 1$, alors …………….**
- **Si $q \leq -1$, alors………………………………….**

Mnémo : ♥♥ ***une suite géométrique de raison q converge si et seulement si ……………♥♥***

Preuve dans le cas où $q > 1$:

Exemples

1) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n}$

2) Soit $v_n = (-\frac{1}{2})^n$ .Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

✂---

Exercice 2

Déterminer : *a)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1+2^n}{e^n}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}75^n - 4 \times 0{,}3^n$; *c)* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n+3^n}{5^n+6^n}$

✂---

Exercice 3

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 0,\underbrace{444...4}_{n \text{ fois}}$

Etudier la limite de la suite (u_n).

✂---

Exercice 4

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{e^{2n}+n+1}$ .En utilisant un théorème de comparaison, déterminer la limite de la suite (u_n).

V- Algorithme sur les suites (boucle While)

Algorithme de détermination d'une valeur seuil

On considère une population de bactéries dont la population augmente de 40 % toutes les heures. On note u_n le nombre de milliers de bactéries après n heures, et on donne $u_0 = 1$ (quantité initiale de bactéries).

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Déterminer le sens de variation de cette suite.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) En déduire qu'il existe un rang, noté n_0, à partir duquel $u_n \geq 10$.

e) On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel :

VARIABLES :	A, n nombres, A de type réel, n de type entier.
ENTREE :	*Demander la valeur de A.*
INITIALISATION :	Affecter à n la valeur 0. (On notera : $n \leftarrow 0$).
TRAITEMENT :	*Tant que* $1{,}4^n < A$ *Remplacer n* par $n + 1$. (On notera : $n \leftarrow n+1$). *Fin du Tant que*
SORTIE :	*Afficher n.*

Que fait concrètement cet algorithme ?

f) Voici un script Python correspondant à cet algorithme de seuil :

```
def seuil(A):
    n=0
    while 1.4**n < A :
        n=n+1
    return n
```

Le coder, puis déterminer la valeur du plus petit entier n_0 à partir duquel $u_n \geq 10$. Même question avec $u_n \geq 100$. Et si l'on tapait : seuil(0), qu'aurait-on comme affichage en sortie ?

✂---

Cet algorithme revient quasiment tout le temps au baccalauréat, alors prenez le temps de bien le comprendre !

VI-Convergence des suites monotones

Rappel-Définitions

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***majorée***, s'il existe un réel M, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite (u_n).♥♥
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***minorée***, s'il existe un réel m, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite (u_n).♥♥
- Une suite est dite ***bornée*** si elle est à la fois ***minorée et majorée***.♥♥

Remarque fondamentale

- Toute suite décroissante est …………………………………………..
- Toute suite croissante est ……………………………………………..

Voici un ***théorème fondamental*** qui ***tombe systématiquement au baccalauréat*** :

♥♥♥♥ ***Théorème de convergence des suites monotones*** ♥♥♥♥

1) Si une suite est ……………………… ET ………………….., alors elle …………………..

2) Si une suite est ………………………ET ………………….., alors elle……………………

On admet ce théorème de la *convergence monotone*, conformément au programme.

Remarque : Ce théorème est un théorème *existentiel* : il permet de démontrer la convergence d'une telle suite, mais ne précise en aucun cas la valeur de la limite de cette suite.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3 + \dfrac{2}{n+1}$

a) Etablir que cette suite est minorée par 0, et qu'elle est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) converge. Déterminer la limite de cette suite.

✂---

Attention **à la grosse erreur**, souvent commise par les élèves au bac :

« La suite (u_n) est décroissante, et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0. »

Si vous ne voyez pas l'erreur dans ce raisonnement, relisez (une ou plusieurs fois) l'exemple précédent !!

__Remarque naïve__ : si une suite (u_n) converge vers L, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$?

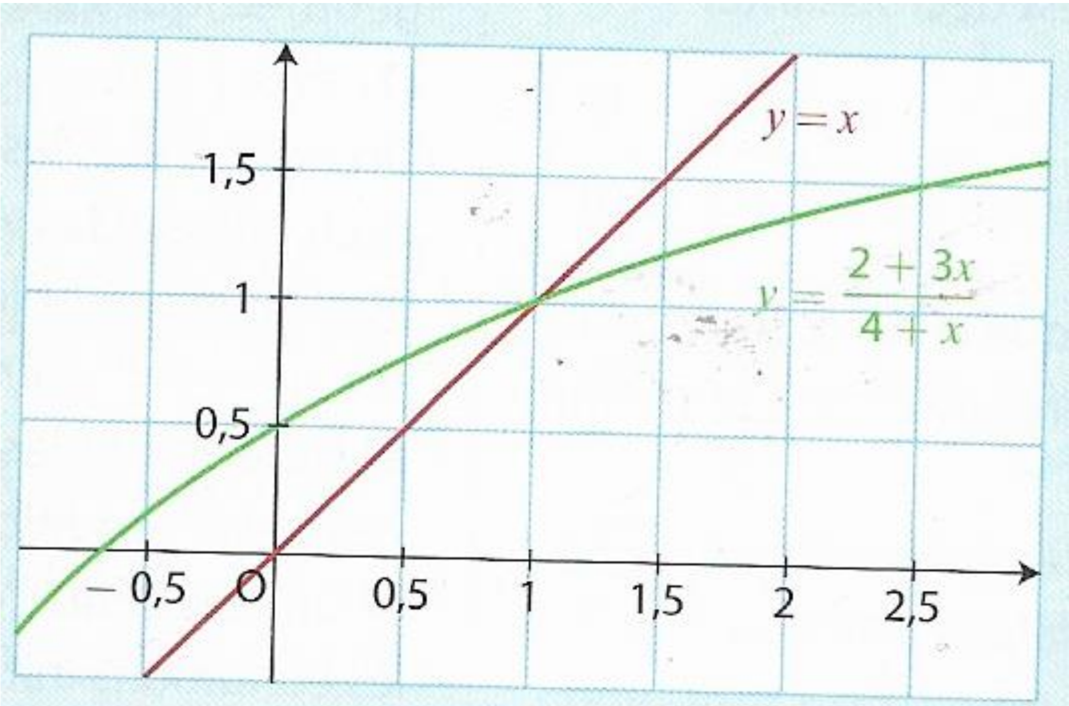
Exercice 5 *(fondamental, le classique de bac)*

f est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 3] par : $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

1) Montrer que f est croissante sur l'intervalle [0 ; 3].

2) Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) On donne dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f sur [0 ; 3], ainsi que la droite d'équation : $y = x$.



Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en s'aidant de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$, construire géométriquement sur l'axe des abscisses u_1, u_2 et u_3.

b) Quelles conjectures faites-vous concernant : le sens de variation de (u_n) ? La convergence de (u_n) ?

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

d) En déduire que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite L.

Exercice 6 ***(issu de baccalauréat, Métropole 2023, sujet 2)***

EXERCICE 2 **5 points**

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60 % chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.
On a donc $u_0 = 0,1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0,1 \times 1,6^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0,4$.
4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par :

$$v_0 = 0,1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,6v_n - 1,6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1,6x - 1,6x^2.$$

   a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

   b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.
   On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

   c. Déterminer la valeur de ℓ.
   Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction seuil, écrite en langage Python.

   a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4)?

   b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35).
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
        v=1.6*v-1.6*v*v
        n=n+1
    return n
```

✂---

Exercice 7 ***(Issu de baccalauréat, métropole* 2022)**

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

   c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

   c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde au cahier des charges sité précédemment :

```
def protocole():
    u=2
    n=0
    while u .........:
        u=......
        n=.....
    return ...
```

✂---

Exercice 8 *(issu de baccalauréat)*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & v_0 = 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + v_n \end{array}\right.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a. Calculez u_1 et v_1.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.
   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite $\left(r_n^2\right)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

✂---

Exercice 9

Trouver la bonne réponse à chaque question de ce QCM.

1.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1}.$$

La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2 ;
b. géométrique de raison e ;
c. géométrique de raison e^2 ;
d. convergente vers e.

2.

La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \frac{1}{n} w_n$.

a. La suite (w_n) est géométrique
b. La suite (w_n) n'admet pas de limite
c. $w_5 = \frac{1}{15}$
d. La suite (w_n) converge vers 0.

3. (La suite ci-après sert aux questions 3,4 et 5).

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} n + 1.$$

La valeur de u_2 est égale à :

a. $\frac{11}{4}$
b. $\frac{13}{2}$
c. 3,5
b. 2,7

4.

La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

b. géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c. constante.

d. ni arithmétique, ni géométrique.

5.

On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

n désigne un entier naturel non nul.
On rappelle qu'en langage Python « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

```
1  def terme (n)
2      U=3
3      for i in range(n) :
4  ......................
5      return U
```

Pour que terme (n) renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne 4 par :

a. U = U/2 + (i+1)/2+1

b. U = U/2 + n/2 + 1

c. U = U/2 + (i−1)/2+1

d. U = U/2 + i/2 + 1

Exercice 10

*Marie Sklodowska-Curie (*1867 − 1934*) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3\times 10^{21}\,(0{,}995^n + 1)$.

c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4.

On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1 def noyaux (n) :
2     V =6*10**21
3     L=[V]
4     for k in range (n) :
5         V= ...
6         L.append(V)
7     return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude?

✂--

VII Compléments sur les suites

Propriété

Si une suite est croissante et non majorée, alors elle ……………………………………..

Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle…………………………………

Preuve :

Exercice A

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n^2$.

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b) Démontrer que le suite (u_n) n'est pas majorée.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice B

1) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n+5$.

Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

2) Soit (v_n) une suite croissante dont le premier terme v_0 est strictement positif.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k$