Chapitre IV — **Probabilités : épreuves indépendantes et loi binomiale**

I-Rappels de première

A-Variables aléatoires et espérance

Variable aléatoire discrète

Définir une variable aléatoire discrète X pour une expérience aléatoire d'univers Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

La loi de probabilité de X associe à chaque valeur prise par X une probabilité :

Valeur prise x_i	x_1	...	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

L'espérance mathématique (on dit simplement espérance) d'une variable aléatoire X correspond à ***la valeur moyenne*** prise par X si on répète l'expérience aléatoire associée à X un grand nombre de fois. On note $E(X)$ l'espérance de X.

Avec la loi de probabilité donnée par le tableau précédent, on a :

♥♥♥ $E(X) = \dfrac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ldots + x_m \times p_m}{\underbrace{p_1 + p_2 + \cdots + p_m}_{=1}} = \boxed{\sum_{k=1}^{m} x_k \times p_k}$ ♥♥♥

Dans le cas d'un jeu d'argent, l'espérance correspond au Gain Moyen espéré par partie effectuée

Un ***jeu*** est qualifié d'***équitable*** si l'espérance de la variable aléatoire égale au gain du joueur est nulle

favorable au joueur : $E > 0$
défavorable " " : $E < 0$

Exercice 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée ci-contre.

a. Déterminer la valeur de p.

b. Calculer la probabilité des évènements $\{X \leqslant 2\}$, $\{X \geqslant 3\}$ et $\{2 \leqslant X \leqslant 4\}$.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	p	$3p$

$p \to 0,125$; $3p \to 0,375$

c. Déterminer l'espérance de X.

a) on a : $0,2 + 0,3 + p + 3p = 1$ (loi de proba).

$0,5 + 4p = 1$

$4p = 0,5$

$p = \dfrac{0,5}{4} = \boxed{0,125}$

b) $P(X \leqslant 2) = P(X=1) + P(X=2) = 0,2 + 0,3 = \boxed{0,5}$

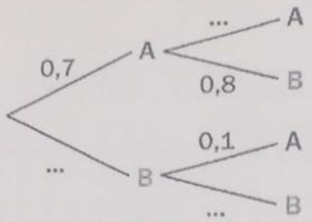
$P(X \geqslant 3) = P(X=3) + P(X=4) = 0,125 + 0,375 = \boxed{0,5}$

$P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 0,3 + 0,125 + 0,375 = \boxed{0,8}$

c) $E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,125 + 4 \times 0,375 = \boxed{2,675}$

Exercice 2

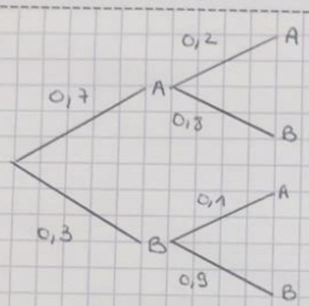
a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous, qui représente une expérience aléatoire.



b. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'évènement A se réalise.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer $E(X)$ et interpréter cette dernière.

a)



b) X = nb de fois où A se réalise.
↳ les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2

on note $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$.

$P(X=0) = P(B-B) = 0{,}3 \times 0{,}9 = \boxed{0{,}27}$

$P(X=1) = 0{,}7 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}59}$

$P(X=2) = 0{,}7 \times 0{,}2 = \boxed{0{,}14}$

D'où la loi de proba :

$(X = x_i)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,27	0,59	0,14.

$E(X) = 0 \times 0{,}27 + 1 \times 0{,}59 + 2 \times 0{,}14 = 0{,}59 + 0{,}28 = \boxed{0{,}87}$

En moyenne, la valeur prise par X est égale à 0,87.

B – Propriétés usuelles en probabilités

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1

Lorsque chaque issue d'une expérience aléatoire a même chance de réalisation, on parle de situation d'équiprobabilité.

Dans ce cas, si A désigne un événement de l'univers des possibles Ω, on a :

$p(A) = \dfrac{\text{nb de cas favorable à la réalisat° de A}}{\text{nb total de cas (issues).}}$

(et $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.)

Pour tout événement A, $\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A, et on a : $p(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Pour tout événement A et B d'un même univers Ω, $p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dans le cas où A et B sont *incompatibles*, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$ on a : $p(A \cup B) = P(A) + P(B)$

En général, $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$.

Exemple : On lance un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit A l'événement : obtenir un résultat pair, et B l'événement : obtenir un nombre premier.
Déterminer A, B, $A \cap B$ puis la probabilité de chacun de ces événements.

A-t-on : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$?

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$ $\quad A \cap B = \{2\}$ $\quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \{2 ; 3 ; 5\}$ $\quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$

dc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

C – Probabilités conditionnelles

1) Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, et A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B, sachant que A est réalisé, est notée $p_A(B)$, avec, par définition :

$$♥♥♥ \; p_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \; ♥♥♥$$

Cette relation des probabilités conditionnelles, donne un moyen de calculer la probabilité de l'intersection de deux événements :

Si $p(A) \neq 0$, on a : $p(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Remarque : Dans les exercices, on détecte la présence de probabilités conditionnelles grâce aux termes suivants : ***sachant que, parmi, si*** ……ou tout simplement quand l'énoncé donne une information de conditionnement : par exemple : "…on choisit une personne malade. Quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ? …" Ici la personne choisie l'est ***parmi*** les personnes malades !

Exemple

Dans une population donnée, 65 % des personnes possèdent un téléphone portable de marque *PHONEI* et 32 % des personnes possèdent un ordinateur de marque *PROMAC*.

De plus, 13 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre au hasard une personne de cette population.

On considère les évènements :

T : *" la personne rencontrée possède un téléphone portable PHONEI"*

O : *" la personne rencontrée possède un ordinateur PROMAC"*

0) Traduire en termes de probabilités les données chiffrées de l'énoncé.

a) Déterminer la probabilité de rencontrer une personne qui a un ordinateur *PROMAC* sachant que cette dernière possède un téléphone portable *PHONEI*.

b) Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable *PHONEI* sachant qu'elle a un ordinateur *PROMAC*.

✂---

a) $P(T) = \frac{65}{100} = \boxed{0,65}$ $P(O) = \frac{32}{100} = \boxed{0,32}$ $P(T \cap O) = \frac{13}{100} = \boxed{0,13}$

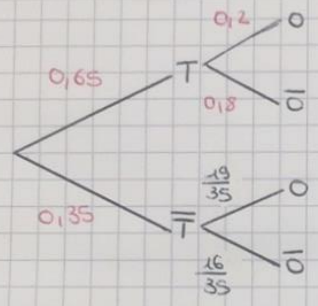
a) On cherche ici la valeur de : $P_T(O)$

d'ap la formule des proba cond or $P_T(O) = \frac{P(T \cap O)}{P(T)}$ $P_T(O) = \frac{0,13}{0,65} = \frac{1}{5} = \boxed{0,2}$

b) On cherche ici la valeur : $P_O(T) = \frac{P(T \cap O)}{P(O)} = \frac{0,13}{0,32} = \boxed{0,40625}$

2) Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple précédent, et modélisons l'expérience aléatoire par un arbre de probabilités, encore appelé arbre pondéré :



$p(O) = 0,32$ formule des proba totale

$P(O) = P(T \cap O) + P(\overline{T} \cap O)$

$P(\overline{T} \cap O) = P(O) - P(T \cap O) = 0,32 - 0,13 = \boxed{0,19}$

or $P(\overline{T} \cap O) = P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(O)$

$P_{\overline{T}}(O) = \frac{P(\overline{T} \cap O)}{P(\overline{T})} = \frac{0,19}{0,35} = \boxed{\frac{19}{35}}$

et $P_{\overline{T}}(\overline{O}) = 1 - P_{\overline{T}}(O) = 1 - \frac{19}{35} = \boxed{\frac{16}{35}}$

Remarques fondamentales concernant les arbres pondérés (à deux niveaux) :

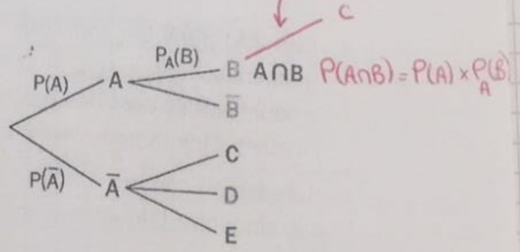
- **Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.**
- **L'origine de l'arbre est appelée la racine de l'arbre.**
- **Les branches (= segments) partant de la racine sont appelées branches primaires de l'arbre.**
- **Ces dernières mènent à des nœuds où est écrit un événement avec une lettre majuscule.**
- **Les branches partant de nœuds sont appelées branches secondaires.**
- ***Sur chaque branche secondaire, figurent des probabilités CONDITIONNELLES.***

$P_{A \cap B}(C)$

▶ On peut représenter une **succession d'épreuves quelconques** par un **arbre pondéré**.

▶ Dans l'arbre ci-contre, le **chemin A suivi de B** représente l'intersection des évènements A et B. Cette intersection est notée **A ∩ B**.

▶ Les probabilités portées sur les branches du second niveau sont des **probabilités conditionnelles**.



3) Indépendance

Définition **: Deux événements *A* et *B* d'un même univers Ω sont dits *indépendants* pour la probabilité *p*, lorsque la réalisation (ou non réalisation) de *A* n'influence pas la réalisation (ou non réalisation) de *B*.**

Nous allons "mathématiser "cette définition :

Dire que A et B sont des événements indépendants signifie que :

♥♥♥♥... $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ....♥♥♥♥

Propriété

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants équivaut à dire que :

$P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

La propriété fait donc le lien entre événements indépendants et probabilités conditionnelles.

Preuve : On suppose A et B indépdt cad $P(A \cap B)$

or $P_A(B) = \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}}_{\text{f de pc}} = \underbrace{\frac{\cancel{P(A)} \times P(B)}{\cancel{P(A)}}}_{\text{indépendance de A et B}} = P(B)$

Attention : indépendants et incompatibles, ce n'est pas du tout la même chose !

Exercice 3

A et B sont deux évènements qui vérifient :

$P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,1$.

a. Calculer les valeurs de $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

b. Calculer $P(A \cup B)$.

c. A et B sont-ils indépendants ?

a) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = \boxed{0,25}$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,4 + 0,3 - 0,1 = \boxed{0,6}$

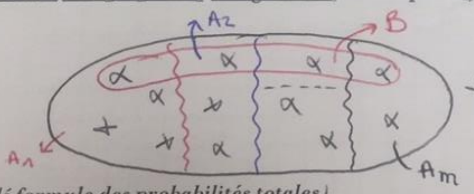
c) $P_A(B) \neq P(B)$ car $0,25 \neq 0,3$ dc A et B ne sont pas indépendants.

4) Formule des probabilités totales

Définition : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille d'événements **_non impossibles_** et **_deux à deux incompatibles_** d'un même univers Ω.

Lorsque **_la réunion de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est égale à Ω_**, on dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***forment une partition de l'univers Ω.***

Illustration :



$\left(\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right)$ union disjointe

$B = \underbrace{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)}_{\text{événements 2 à 2 incompatibles}}$

Propriété (appelé **formule des probabilités totales**)

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B de Ω, on a :

$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots\ldots\ldots\ldots + p(A_n \cap B)$.

dc $P(B) = \underbrace{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)}_{\text{F proba totales}}$.

$\bar{A} \cup A = \Omega$

Remarque : Cela n'est que la traduction mathématique du dernier point concernant les arbres !

Dans les exercices, cette dernière sera le plus fréquemment utilisée avec $n = 2$ ou $n = 3$:

Si A et $\bar{A}$ sont des événements de probabilité non nulle, ils forment une partition de Ω, et donc, pour tout événement B, on a :

$p(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

C'est essentiellement sous cette forme que nous utiliserons la formule des probabilités totales.

<u>Remarques clé concernant les arbres de probabilité</u> :

- Loi des nœuds : la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours ...1...
- La probabilité associée à un chemin est égale au ...produit... des probabilités figurant sur les branches de ce chemin.

  Par exemple, $p(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; $p(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C)$
- Enfin, la probabilité d'un événement est égale à ...la somme... des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement : c'est la formule des probabilités totales !

<u>Exercice 4</u>

Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes.

De plus, 76 % des garçons sont externes. On choisit au hasard un élève du lycée.

On note : F l'événement : " l'élève choisi est une fille".

E : "l'élève choisi est externe"

a) Traduire ces données à l'aide de probabilités.

b) Faire un arbre de probabilités.

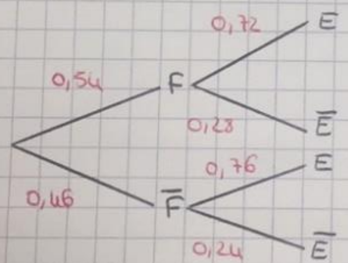
c) Calculer la probabilité d'avoir choisi une fille externe.

d) Calculer la probabilité d'interroger un élève externe.

e) Calculer la probabilité d'interroger une fille sachant qu'on a interrogé un élève non externe.

a) $P(F) = 0{,}54$ / $P_F(E) = 0{,}72$ et $P_{\bar{F}}(E) = 0{,}76$.

b)



c) On cherche ici la valeur de $P(F \cap E)$.

$P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0{,}54 \times 0{,}72 = \boxed{0{,}3888}$

d) On cherche ici la valeur de $P(E)$: d'ap la fdp totales on a :

$P(E) = P(F \cap E) + P(\bar{F} \cap E) = 0{,}3888 + 0{,}46 \times 0{,}76$

$P(E) = \boxed{0{,}7384}$

e) On cherche ici la valeur de :

$P_{\bar{E}}(F) = \dfrac{P(F \cap \bar{E})}{P(\bar{E})}$

$P_{\bar{E}}(F) = \dfrac{0{,}54 \times 0{,}28}{1 - \underbrace{0{,}7384}_{P(E)}} = \dfrac{0{,}1512}{0{,}2616} \approx \boxed{0{,}578}$ à 10^{-3} près.

Exercice 5 *(issu de bac)*

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

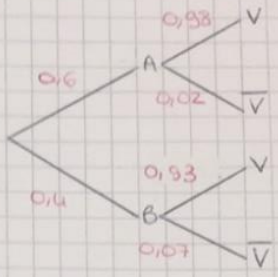
On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

0) faire un arbre de proba

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

0)



$P(V) = 0{,}96$ $\quad P(A) = 0{,}6$

1) On cherche ici la valeur de $P(A \cap V)$

or $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0{,}6 \times 0{,}98 = \boxed{0{,}588}$

2) D'ap la formule des proba totales $\underset{0,96}{P(V)} = \underset{0,588}{P(A \cap V)} + P(B \cap V)$

donc $P(B \cap V) = 0{,}96 - 0{,}588 = \boxed{0{,}372}$

on cherche $P_B(V)$ or $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = \dfrac{0{,}372}{0{,}4} = \boxed{0{,}93}$

3) ~~Le technicien affirme que~~ $\cancel{\dfrac{P_B(\overline{V})}{P(\overline{V})}}$

$P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}07}{1 - 0{,}96} = \boxed{0{,}7}$ Le technicien a raison.

II- Succession d'épreuves indépendantes

Définition

Lors d'une succession d'épreuves aléatoires, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend d'aucune des issues des épreuves précédentes, on dira qu'on a à faire à des épreuves indépendantes.

Exemple 1 : on considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé équilibré à six faces puis une pièce de monnaie non truquée. Le lancer du dé n'influe pas sur le lancer de la pièce : ces deux épreuves sont ***indépendantes.***

L'univers de la 1ère épreuve :

$\Omega_1 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ card$(\Omega_1) = 6$

L'univers de la seconde :

$\Omega_2 = \{P ; F\}$ card$(\Omega_2) = 2$

L'univers de cette expérience aléatoire :

$\Omega = \{(1;P) ; (1;F) ; (2;P) ; (2;F) ; (3;P) ; (3;F) ,$
$(4;P) ; (4;F) ; (5;P) ; (5;F) ; (6;P) ; (6;F)\}$ card$(\Omega) = 12$

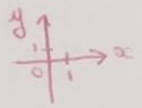
Remarque : On peut représenter la situation par un arbre pondéré.

Chacune des issues associées à cette expérience aléatoire a pour probabilité de réalisation :

Définition - vocabulaire

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le ***produit cartésien*** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ (lire A croix B), constitué des couples $(x\,;y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.



On note cela formellement : $A \times B = \{(x\,;y),\, x \in A,\, y \in B\}$.

Si $A = B$, on notera : $A \times A = A^2$. Par exemple : $\mathbb{R}^2 = \{(x;y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

ensemble des pts du plan.

On définit également sans problèmes le produit cartésien de plus de deux ensembles.
Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, l'univers Ω des possibles de cette succession de n épreuves indépendantes est le produit cartésien suivant : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Les issues de Ω sont les n-uplets $(x_1\,; x_2\,; \ldots; x_n)$ où pour tout entier i compris entre 1 et n, $x_i \in \Omega_i$.

Propriété (admise)

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité de réalisation d'une issue $(x_1\,; x_2\,; \ldots; x_n)$ est égale AU..produit.......des probabilités de réalisation de ses composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Autrement dit pour l'arbre : la probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.

Exemple 2

Une entreprise de transport possède trois camions. Une étude sur une période donnée de l'état de fonctionnement des camions a montré que, un jour donné, la probabilité qu'un camion soit en panne est égale à 0,05. On admet que la panne d'un camion est indépendante des pannes survenues antérieurement et de celles des autres camions.

a) Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en état de fonctionnement.

b) Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en panne.

c) Les événements :" tous les camions fonctionnent" et "tous les camions sont en pannes" sont-ils contraires l'un de l'autre ?

a) A_i = "le camion n°i est en panne" ici : $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ici on cherche : $P(E)$ où $E = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

Donc $P(E) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3})$

$P(E) = 0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}95$ car $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$P(E) \approx 0{,}857$ à 10^{-3} près.

b) C = "ts les camions sont en panne"

$C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

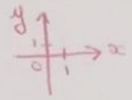
$P(C) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) = 0{,}05^3 = \boxed{1{,}25 \times 10^{-4}}$

$= 0{,}000125$

Définition - vocabulaire

Soit A et B deux ensembles non vides.

Le ***produit cartésien*** de A et B est l'ensemble, noté $A \times B$ (lire A croix B), constitué des couples $(x\,;y)$ où x est un élément de A et y un élément de B.



On note cela formellement : $A \times B = \{(x\,;y), x \in A, y \in B\}$.

Si $A = B$, on notera : $A \times A = A^2$. Par exemple : $\mathbb{R}^2 = \{(x;y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

ensemble des pts du plan

On définit également sans problèmes le produit cartésien de plus de deux ensembles.
Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, l'univers Ω des possibles de cette succession de n épreuves indépendantes est le produit cartésien suivant : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Les issues de Ω sont les n-uplets $(x_1\,; x_2\,; \ldots; x_n)$ où pour tout entier i compris entre 1 et n, $x_i \in \Omega_i$.

Propriété (admise)

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité de réalisation d'une issue $(x_1\,; x_2\,; \ldots; x_n)$ est égale AU..produit.......des probabilités de réalisation de ses composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Autrement dit pour l'arbre : la probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur l'arbre est obtenue en multipliant les probabilités portées par ses branches.

Exemple 2

Une entreprise de transport possède trois camions. Une étude sur une période donnée de l'état de fonctionnement des camions a montré que, un jour donné, la probabilité qu'un camion soit en panne est égale à 0,05. On admet que la panne d'un camion est indépendante des pannes survenues antérieurement et de celles des autres camions.

a) Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en état de fonctionnement.

b) Déterminer la probabilité qu'un jour donné, tous les camions soient en panne.

c) Les événements :" tous les camions fonctionnent" et "tous les camions sont en pannes" sont-ils contraires l'un de l'autre ?

a) A_i = " le camion n°i " est en panne " ici : $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ici on cherche : $P(E)$ où $E = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

Donc $P(E) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3})$

$P(E) = 0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}95$ car $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$P(E) \approx 0{,}857$ à 10^{-3} près.

b) C = " ts les camions sont en panne "

$C = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$P(C) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) = 0{,}05^3 = \boxed{1{,}25 \times 10^{-4}}$

$= 0{,}000125$

car $\underbrace{A_1 / A_2 / A_3}_{\text{indpdt}}$

c) non cf quest précédente : $P(C) \neq 1 - P(E)$

car $1 - 0,857 \neq 0,000125$

non : (Tous fonctionnement) $\longrightarrow$ ou − 1 ne fonctionne pas

négat°

<u>Exercice 6</u> *(important)*

Une urne contient 3 boules vertes et 7 boules noires.

On tire au hasard, successivement avec remise, trois boules de l'urne (l'une après l'autre).

On note naturellement : V_i l'événement " extraire une boule verte de l'urne au $i^{ème}$ tirage " et N_i l'événement "extraire une boule noire de l'urne au $i^{ème}$ tirage ".

***a)* Faire un arbre pondéré de cette expérience aléatoire.**

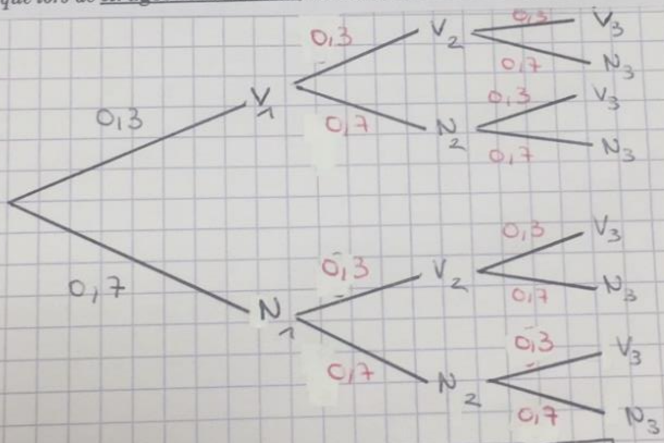
***b)* Déterminer la probabilité d'extraire :**

***i)* Deux boules noires lors des deux premiers tirages puis une boule verte au dernier tirage.**

***ii)* Trois boules de même couleur.**

♥ On retiendra que lors de <u>tirages avec remise</u>, on a une <u>succession d'épreuves aléatoires indépendantes</u> ! ♥

a)



b) i) $P(N_1 \cap N_2 \cap V_3) = 0,7 \times 0,7 \times 0,3 = \boxed{0,147}$

ii) T = "Trois boules de m̂ couleur".

$P(T) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$

$P(T) = 0,3^3 + 0,7^3 = \boxed{0,37}$

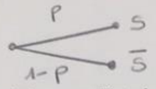
III- Epreuve et schéma de Bernoulli

Définition

Une *expérience aléatoire* qui *a deux issues possibles* (une est appelée succès, l'autre est appelée échec) est appelée une *épreuve de Bernoulli*.
En général, l'issue correspondante au succès est notée *S*, et l'issue correspondante à l'échec est donc $\bar{S}$(événement contraire de *S*), parfois notée *E*.

Le *paramètre p d'une épreuve de Bernoulli* n'est autre que *la probabilité de l'issue succès*.
$p = P(S)$. On a nécessairement : $0<p<1$ *(en particulier, p ne peut pas être égale à 0 ou 1 !)*.

Arbre associé à une épreuve de *Bernoulli* :



Les épreuves de Bernoulli sont parmi les expériences aléatoires les plus couramment rencontrées :

Exemples

i) Dans un jeu de 32 cartes comportant 4 as on pioche au hasard une carte.
Il y a 32 issues possibles, donc cette expérience aléatoire n'est pas une épreuve de *Bernoulli*.

Cependant, en prenant comme succès l'événement S: *"Piocher un as"*, cette expérience aléatoire constitue une épreuve de *Bernoulli* de paramètre $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
L'échec est ici : "ne pas piocher d'as" !

ii) Un internaute regarde une vidéo, et peut lui attribuer un pouce vert, un pouce rouge ou ne rien faire.

L'expérience consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert, un pouce rouge, ou ne fait rien n'est pas une épreuve de *Bernoulli* car 3 issues possibles
Par-contre, l'expérience aléatoire consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert ou non est une épreuve de *Bernoulli* (par exemple le succès est ici attribuer un pouce vert).
On ne dispose de pas assez de données pour déterminer son paramètre.

Loi de Bernoulli

Considérons une épreuve de Bernoulli de paramètre *p*.
Soit *X* la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès, et la valeur 0 en cas d'échec.

La loi de probabilité de X, c'est-à-dire le ***tableau à deux lignes*** donnant en première ligne les valeurs prises par *X*, et en seconde ligne les probabilités associées à ces valeurs, est appelée loi de *Bernoulli* de paramètre *p*.
On a donc :

$X=x_i$	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

Calculer l'espérance de *X*. $E(x) = 0(1-p) + 1 \times p = \boxed{p}$

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On pioche au hasard une boule de l'urne. On appelle succès le fait de piocher une boule noire.

Soit *X* la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon.

Donner le nom de *X*, préciser son paramètre. $\begin{cases} X = 1 \text{ si succès} \\ X = 0 \text{ si échec} \end{cases}$ X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Définition **(*schéma de Bernoulli*)**

Soient ***n un entier naturel non nul***, et *p* un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

L'expérience aléatoire qui consiste à ***répéter** n fois*, ***une même épreuve de Bernoulli*** de paramètre p, *de façon indépendante*, est appelée un *schéma de Bernoulli de paramètres n et p*.

Une issue de cette expérience aléatoire est une liste de n lettres prises parmi S et $\overline{S}$, du type $(S, \overline{S}, \overline{S}, ..., S)$.
L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega = \{S, \overline{S}\}^n$

Exemples

nb de répétit°

appelé

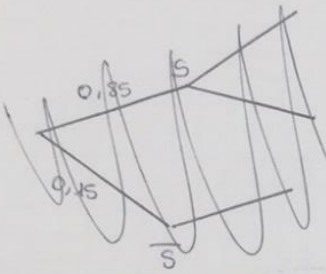
Lancer 10 fois d'affilée une même pièce de monnaie non truquée, et à chaque lancer, est appel succès le fait d'obtenir pile.
On a ici un schéma de Bernoulli de paramètres : $\begin{cases} n = 10 \\ p = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ car pièce non truquée} \end{cases}$

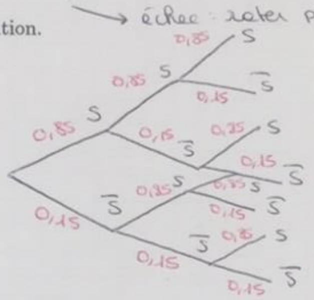
Un joueur de basket réalise trois lancers de façon indépendante.
A chaque lancer, la probabilité qu'il marque un panier est égale à 0,85.

Expliquer pourquoi on peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli dont on précisera les paramètres. 2 issues à chaque lancer
on répète 3 fois cette expérience.

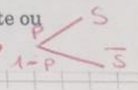
succès : mettre panier : S
échec : rater panier : $\overline{S}$

Faire un arbre de probabilité associé à cette situation.





Remarque : sur un arbre de probabilité, on détecte très facilement si la situation étudiée s'apparente ou pas à un schéma de *Bernoulli* : schéma de B. si répétition du motif



IV-Lois binomiales

Définition

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $]0 ; 1[$. $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$

On considère un schéma de *Bernoulli* de paramètres n et p.

Soit $\boxed{X \text{ la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus lors de ces } n\text{-épreuves.}}$

La loi de probabilité de cette variable aléatoire X est appelé la *loi binomiale de paramètres n et p*, notée $\mathcal{B}(n ; p)$ (n'a rien à voir avec une banque...).

$X \xrightarrow{\text{suit}} \mathcal{B}(n ; p)$

On dit aussi que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on notera :
X est parfois aussi appelée ***la loi du nombre de succès.***

Exemple : On lance 10 fois d'affilée une même pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où l'on $\underbrace{\text{obtient pile}}_{S}$.

La variable aléatoire prend pour valeurs tous les nombres entiers compris entre 0 et 10

X suit donc la loi binomiale de paramètres. $\begin{cases} n = 10 \\ p = 0{,}5 \end{cases}$

Voici quelques questions bien légitimes que tout un chacun se pose naturellement :

- Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 piles lors des 10 lancers ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir moins de piles que de faces ?

Un peu de théorie va nous permettre de répondre à ces questions.

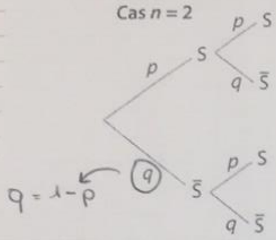
A-Coefficients binomiaux

Définition : soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, et k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

On appelle *coefficient binomial*, ou *combinaison de k parmi n, le nombre de chemins conduisant à k succès lors de n répétitions d'une même épreuve de Bernoulli* sur l'arbre représentant l'expérience. Ce nombre se note $\binom{n}{k}$ et se lit " k parmi n ".

Exemple : Grâce aux arbres suivants associés à des schémas de Bernoulli de paramètres 2 et p (respectivement 3 et p), déterminer chacun des coefficients binomiaux suivants :

Cas $n = 2$



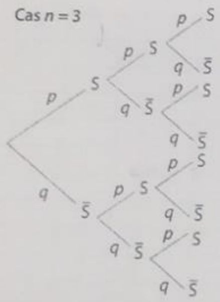
$\binom{2}{0} = 1$; $\binom{2}{1} = 2$; $\binom{2}{2} = 1$

$\hookrightarrow$ 0 succès lors de 2 répétit°.

" vous allez kiffer vos sœurs ".

" M'emmerdez pas mais vous avez qd m̂ raison "

Cas $n = 3$



$\binom{3}{0} = 1$; $\binom{3}{1} = 3$; $\binom{3}{2} = 3$; $\binom{3}{3} = 1$

Propriété : ***premières propriétés sur les coefficients binomiaux***

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$

$n! = \underbrace{1 \times \ldots \times n}_{\text{entiers de } 1 \text{ à } n.}$

Remarque : au chapitre " *combinatoire et dénombrement* " on verra une expression permettant de calculer les coefficients binomiaux rigoureusement.

<u>Sinon, en attendant, momentanément, avec la CALCULATRICE</u> :

- Coefficients binomiaux :

TI : math puis PRB puis Combinaison

Casio : Optn choix PROB puis nCr

Exemple : $\binom{10}{4}$ = 210

$\binom{12}{5} = 792$ $\binom{30}{3} = 4060$ $\binom{21}{7} = 116\,280$

Propriété phare

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

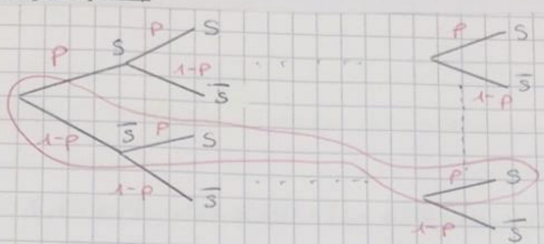
1) Les valeurs prises par X sont : $0, 1, 2, \dots, n$: $[\![0\ ;\ n]\!]$ entiers

2) ♥♥♥♥ Pour tout entier k tel que $0 \le k \le n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}$ ♥♥♥♥

$= \binom{n}{k} \times p^{\text{nb succès}} \times (1-p)^{\text{nb échec}}$

3) L'espérance de X est $E(X) = n \times p$

Idée de justification pour le point 2) :



X = nb succès obtenus lors de n répétit° : on compte le nb de chemins de l'arbre conduisant à k succès lors de n répétit°.

Or la proba de réalisat° de chacun de ces chemins :

$$\underbrace{p \times p \times p \times \dots \times p}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{(1-p) \times (1-p) \times \dots \times (1-p)}_{\substack{(n-k) \text{ fois} \\ (\text{proba } (n-k) \text{ échecs})}}$$

D'après le principe multiplicatif : $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}$

exemple :

$P(X=1) = \binom{3}{1} \times 0,375^{1} \times (1-0,375)^{3-1} = 3 \times 0,375 \times 0,625^{2}$

$= \boxed{0,439}$ à 10^{-3} près

$P(X=2) = \binom{3}{2} \times 0,375^{2} \times (1-0,375)^{3-2} = 3 \times 0,375^{2} \times 0,625^{1}$

$\approx \boxed{0,264}$ à 10^{-3} près

$P(X=3) = \binom{3}{3} \times 0,375^{3} \times (1-0,375)^{3-3} = 1 \times 0,375^{3} \approx \boxed{0,053}$ à 10^{-3} près

Exemple

Une urne contient 3 boules noires et 5 boules vertes indiscernables au toucher. On pioche au hasard, successivement et avec remise, une boule de l'urne, trois fois d'affilée.

Pour chaque tirage, on appelle succès le fait de piocher une boule noire.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues lors de ces trois tirages.

a) Nommer la loi de probabilité associée à X en précisant ses paramètres.

b) Donner la loi de probabilité de X.

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 3$ et $p = 0,375$

$P(X=0) = \binom{3}{0} \times 0,375^{0} \times (1-0,375)^{3-0} = 1 \times 1 \times 0,625^{3}$

$\approx 0,244$ à 10^{-3} près.

b)

$(X = x_i)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,244	0,439	0,264	0,053

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

1) Exprimer plus simplement :

a) $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

b) $P(X\leq 10)+P(X=11)$

c) $P(X\leq 13)-P(X\leq 7)$

d) $P(X\geq 5)-P(X\geq 11)$

2) Ecrire à l'aide de X chacun des événements suivants :

a) obtenir au moins 3 succès

b) obtenir plus de 15 succès

c) obtenir moins de 21 succès

d) obtenir au plus 5 succès.

$X \sim \mathcal{B}(n;p)$

1) a) $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

$= \sum_{k=0}^{4} P(X=k) = P(X\leq 4)$ → X ne prend que des valeurs entières

b) $P(X\leq 10)+P(X=11) = P(X\leq 11)$

c) $P(X\leq 13)-P(X\leq 7) = P(8\leq X\leq 13) = P(7<X<14)$ car X prend des valeurs entières

car $P(X\leq 13) = \sum_{k=0}^{13} P(X=k)$

et $P(X\leq 7) = \sum_{k=0}^{7} P(X=k)$

$P(X\leq 13)-P(X\leq 7) = \sum_{k=0}^{13} P(X=k) - \sum_{k=0}^{7} P(X=k)$

$= \cancel{\sum_{k=0}^{7} P(X=k)} + \sum_{k=8}^{13} P(X=k) - \cancel{\sum_{k=0}^{7} P(X=k)}$

$= \sum_{k=8}^{13} P(X=k)$.

d) $P(X\geq 5)-P(X\geq 11) = P(5\leq X\leq 10)$

$= P(X=5)+P(X=6)+\dots+\cancel{P(X=11)}+\dots-\cancel{P(X=11)}+\cancel{P(X=12)}+\dots$

2) a) $(X\geq 3)$

b) $(X>15)$ ou $(X\geq 16)$

c) $(X<21)$ ou $(X\leq 20)$ car X ne prend que des valeurs entières.

d) $(X\leq 5)$ ou $(X<6)$

Calculette : $P(X=k) = \text{Binomfdp}(n, p, k)$

$P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k)$

$\hookrightarrow \text{BinomFrep}(n, p, k)$.

Dans les autres cas de figure, il faudra *"ruser"* pour obtenir $P(X>k)$ ou $P(X<k)$ ou encore $P(X \geq k)$, qui ne se calculent pas directement à l'aide de la machine !

Exemple : soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres : $n = 50$ et $p = 0{,}23$.
Calculer, en arrondissant à 10^{-4} près : $= 0{,}0001$

$P(X = 10)$; $P(X \leq 12)$; $P(X \geq 5)$; $P(4 \leq X \leq 9)$

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ où $\begin{cases} n = 50 \\ p = 0{,}23 \end{cases}$

$P(X<k) = P(X \leq k-1)$ car X à valeur entière.

$P(X>k) = 1 - P(X \leq k) \rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(X \geq k) = 1 - P(X<k) = 1 - P(X \leq k-1)$

Exemple :

- $P(X=10) = \binom{50}{10} \times 0{,}23^{10} \times (1-0{,}23)^{50-10} = \binom{50}{10} \times 0{,}23^{10} \times 0{,}77^{40}$

on tape la séquence $\text{BinomFdB}(50, 0.23, 10)$

On obtient $P(X=10) \approx \boxed{0{,}1226}$ à 10^{-4} près

- $P(X \leq 12) = \sum_{k=0}^{12} P(X=k) = \sum_{k=0}^{12} \binom{50}{k} \times 0{,}23^{k} \times 0{,}77^{50-k}$

on tape $\text{BinomFrep}(50, 0.23, 12)$ on obtient $P(X \leq 12) \approx \boxed{0{,}6415}$ à 10^{-4} près

- $P(X \geq 5) = \sum_{k=5}^{50} P(X=k) = \sum_{k=5}^{50} \binom{50}{k} \times 0{,}23^{k} \times 0{,}77^{50-k}$

or $P(X \geq 5) = 1 - P(X<5) = 1 - P(X \leq 4)$ car X est à valeur entière

on tape : $1 - \text{BinomFrep}(50, 0.23, 4)$.

$P(X \geq 5) \approx \boxed{0{,}9948}$ à 10^{-4} près.

- $P(4 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 3)$

on tape : $\text{BinomFrep}(50, 0.23, 9) - \text{BinomFrep}(50, 0.23, 3)$

$P(4 \leq X \leq 9) \approx \boxed{2550}$ à 10^{-4} près

Remarques importantes :

L'expression de $P(X=k)$, lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ se calcule facilement à l'aide de la calculatrice grâce à la séquence suivante :

mb essais → m
p → paramètre
valeur de x → k
coller.

♥♥♥♥♥ $P(X=k)$ =

$p = 0.3$

TI : 2nde var puis *binomFdp(* et ensuite dans l'ordre : n, p, k).
Casio : OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis Bpd

De même, une autre fonction de cumul est implantée sur la calculatrice, qui sait également facilement calculer $P(X \leq k)$ en tapant :

♥♥♥♥♥ $P(X \leq k)$ =

TI : 2nde var puis *binomFRép(et ensuite dans l'ordre : n, p, k.*
Casio : OPTN puis STAT puis DIST puis BINM puis BCD

Exercice 8

Reprenons l'exemple qui suit la définition d'une loi binomiale :

On lance 10 fois d'affilée une même pièce équilibrée, et on note X le nombre de fois où l'on obtient pile.

a) Dans l'exemple précédent, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 piles lors des 10 lancers ? Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième près.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir autant de piles que de faces ? Donner la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie à 10^{-4} près.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile lors de ces 10 lancers ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir moins $\underbrace{\text{de piles}}_{X} < \underbrace{\text{que de faces}}_{10-X}$? Arrondir à 10^{-3} près.

e) Déterminer la valeur de : $p(1 < X \leq 3)$ arrondie au centième près.

f) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile et au moins un face au cours des 10 lancers ?

Remarque : ***bien retenir la procédure pour le cas récurrent dans les exercices du calcul de $p(X \geq 1)$.***

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(m\,;p)$ avec $m = 10$ et $p = 0{,}5$ (pièce non truquée).

a) On cherche ici $P(X=4)$

$P(X=4) = \binom{10}{4} \times 0{,}5^4 \times 0{,}5^6 = \binom{10}{4} \times 0{,}5^{10}$

on tape BinomFdp (10, 0.5, 4)

Dc $P(X=4) \approx \boxed{0{,}205}$ à 10^{-3} près

b) On cherche $P(X=5) = \binom{10}{5} \times 0{,}5^5 \times 0{,}5^5 = \binom{10}{5} \times 0{,}5^{10} = \dfrac{252}{1024}$

$P(X=5) \approx \boxed{0{,}2461}$ à 10^{-4} près

c) On cherche ici la valeur de $P(X \geq 1)$ car X à valeurs entières nat !

Or $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X = 0)$

~~[illegible]~~ $P(X \geq 1) = 1 - \text{fdp}(10, 0.5, 0)$

$= 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}5^0 \times 0{,}5^{10} = 1 - 0{,}5^{10}$

$\approx \boxed{0{,}999}$ à 10^{-4}

d) $X < 10 - X$

$X < 5$

on cherche : $P(X < 5)$

Or $P(X < 5) = P(X \leq 4)$ car X ...

BinomFrep $(10, 0.5, 4)$ $P(X < 5) \approx \boxed{0{,}377}$ à 10^{-3} près

e) $p(1 < X \leq 3) = p(X = 2) + P(X = 3) = \binom{10}{2} \times 0{,}5^{10} + \binom{10}{3} \times 0{,}5^{10}$

$\approx \boxed{0{,}16}$ à 10^{-2} près

f) On cherche ici la valeur de $P(\underbrace{1 \leq X}_{\text{au - 1 pile}} \overbrace{\leq 9}^{\text{au - 1 face}})$

$P(1 \leq X \leq 9) = p(X \leq 9) - p(X = 0) \approx \boxed{0{,}998}$ à 10^{-3} près

Exercice 9

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

Un *QCM* est composé de 20 questions avec une seule réponse correcte parmi les quatre proposées à chaque question.

Matt adopte comme stratégie de répondre au hasard à chacune des 20 questions.

On note X la variable aléatoire égale à la note obtenue par *Matt* à ce *QCM*. = nb bonnes rep.

0) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X.

Dans les questions suivantes, les résultats seront arrondis au millième près :

a) Déterminer la probabilité que *Matt* ait exactement 3 bonnes réponses.
b) Déterminer la probabilité que *Matt* ait au moins une bonne réponse.
c) Déterminer la probabilité que *Matt* ait moins de 7 bonnes réponses.
d) Déterminer la probabilité de l'événement K suivant : "*Matt* a plus de réponses fausses que de bonnes réponses".

2) Déterminer le nombre moyen de bonnes réponses obtenu par *Matt* à ce *QCM*.

1) Rép au hasard à une quest donnée constitue une épreuve de B de paramètre $p = \frac{1}{4}$ (succès = rep juste).

le répète 20 fois de façon indpdt cette épreuve dc on a un schéma de B de paramètres : $n = 20$ et $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

Dc X qui est égal au nb de succès obtenu lors de ces 20 répétitions suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $\begin{cases} n = 20 \\ p = 0,25 \end{cases}$

a) On cherche $P(X = 3)$

$P(X=3) = \binom{20}{3} \times 0,25^3 \times (1-0,25)^{20-3} = \binom{20}{3} \times 0,25^3 \times 0,75^{17}$

on tape BinomFdp (20, 0.25, 3)

$P(X=3) \approx \boxed{0,134}$ à 10^{-3} près

b) On cherche ici $P(X \geq 1)$

or $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{20}{0} \times 0,25^0 \times 0,75^{20} = 1 - 0,75^{20}$

$\approx \boxed{0,997}$ à 10^{-3} près

+) moitié juste $P(X=10) \approx \boxed{0,01}$

tout juste $P(X=20) \approx 9 \times 10^{-13} \approx 10^{-12}$

c) On cherche ici : $P(X < 7)$

Or $P(X<7) = P(X \leq 6)$ car X à ...

BinomFrep (20, 0.25, 6)

$P(X < 7) \approx \boxed{0,786}$ à 10^{-3} près

d) On cherche : $P(X < 10) = P(X \leq 9) \approx \boxed{0,986}$ à 10^{-3} près

2) On cherche ici l'espérance de X.

$E(X) = n \times p = 20 \times 0.25 = \boxed{5}$

En moyenne Matt peu s'attendre à avoir 5 bonnes rep au QCM.

Exercices de synthèse issus de textes de baccalauréat

Exercice I

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.

La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

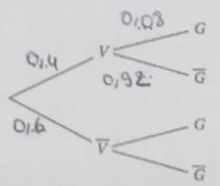
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.
   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

PARTIE A

1) a) $P(G) = \frac{20}{100} = \boxed{0,2}$

2) On cherche ici : $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = \boxed{0,032}$

3)