Chapitre III Repérage dans le plan, géométrie repérée, compléments de géométrie

I – Repérage dans le plan

Définition

On appelle ***repère du plan***, tout ensemble formé par trois points non alignés, appelé un triplet.
On notera $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un tel triplet formé par les trois points O, I et J non alignés.

O est appelée l'origine du repère, c'est l'intersection des deux axes du repère.

L'axe (OI) est appelé l'axe des abscisses ; en général, la lettre x désigne l'abscisse.

L'axe (OJ) est appelé l'axe des ordonnées ; en général, la lettre y désigne l'ordonnée.

Illustration :

Remarque

Soit $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un repère du plan.

Tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x\ ;\ y)$ de nombres.
x est appelé l'abscisse du point M, et y est appelé l'ordonnée du point M.

On notera : $M(x\ ;\ y)$ pour dire que le point M a pour abscisse x et pour ordonnée y.

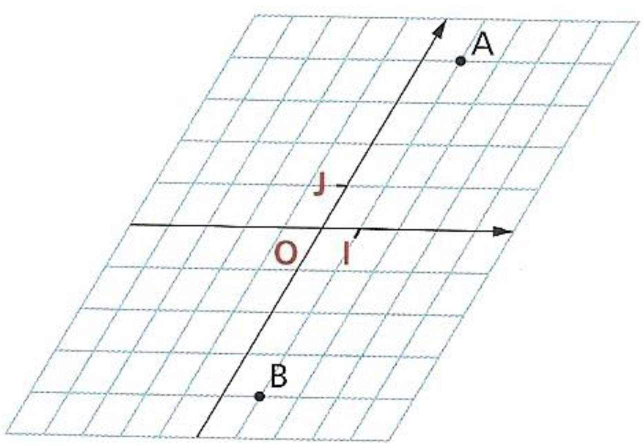
Attention, l'ordre dans les coordonnées est crucial : d'abord l'abscisse, ensuite l'ordonnée !!

Par exemple $M(2\ ;\ 3)$ n'est pas le même point que $N(3\ ;\ 2)$!!

Dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, le point O a pour coordonnées $O(\ldots\ ;\ \ldots)$, le point I a pour coordonnées $I(\ldots\ ;\ \ldots)$ et le point J a pour coordonnées $J(\ldots\ ;\ \ldots)$.

Exemple de repère quelconque $(O\ ;\ I\ ;\ J)$

Dans le repère ci-dessous $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, lire les coordonnées des points A et B, puis placer les point $C(-3\ ;\ 2)$, $D(0\ ;\ -2)$ et $E(-4\ ;\ 0)$



__Définition__ Un repère est dit *__orthogonal__* lorsque ses *__axes sont perpendiculaires__*.

Un repère est dit ***__orthonormé__*** lorsque ses ***__axes sont perpendiculaires__*** $\boxed{\text{ET}}$ qu'il y a la ***__même unité pour graduer chacun__*** ***__des deux axes__***.

Au lycée, on est très souvent placé dans des repères orthonormés.

__Illustration graphique__ :

✂--

__Exemple__

a) Dans un repère orthonormé *(O ; I ; J)*, construire l'ensemble des points du plan qui ont pour ordonnée le nombre 3.

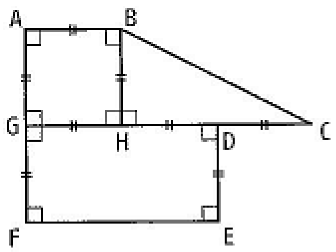
b) Dans ce même repère, construire avec une autre couleur l'ensemble des points du plan qui ont pour abscisse le nombre -1.

c) Caractériser par leurs coordonnées, l'ensemble de tous les points du plan situé à l'intérieur du rectangle *ABCD*, où *A* (3 ; 2) ; *B* (3 ; -1) ; *C* (- 4 ; -1) et *D* (-4 ; 2).

✂--

__Exercice 1__

La figure ci-dessous est composée d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle.



1. Donner les coordonnées de tous les points de cette figure dans le repère (H, D, B).

2. Le point K a pour coordonnées (0,5 ; −0,5) dans ce repère.
Est-il dans le carré, le rectangle ou bien le triangle ?

3. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (F, E, G).

4. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (H, B, G).

II – Géométrie analytique

Activité : soit (O, I, J) un repère du plan, $A\,(2\ ;\ 5)$ et $B\,(4\ ;\ 1)$ et K le milieu du segment $[AB]$.
Faire une figure, puis lire graphiquement les coordonnées du milieu de $[AB]$.
Comment les coordonnées du point K se déduisent-elles de celles des points A et B ?

✂---

Propriété 1 (Calcul des coordonnées du milieu d'un segment)

Soit (O ; I ; J) un repère du plan.

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points dans ce repère.

Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées $K(x_K\,;y_K)$ avec :

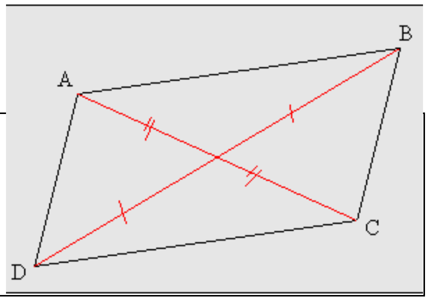
❤❤ **$x_K =$** **et** **$y_K =$** ❤❤

On justifiera ces relations lors du chapitre sur les vecteurs.

Avant de commencer les exercices suivants, voici quelques rappels sur les quadrilatères.

QUADRILATERES PARTICULIERS

Parallélogramme



1) Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont deux à deux parallèles.

2) Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu

Ces deux règles vous donnent des moyens pour justifier qu'un quadrilatère et un parallélogramme.

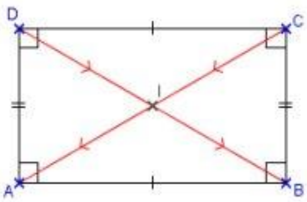
Par exemple, pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffira d'expliquer pourquoi ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Remarques : un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur, par-contre, les diagonales d'un parallélogramme n'ont pas nécessairement la même longueur.

Point de logique : en mathématiques si deux affirmations ont la même valeur de vérité (c'est-à-dire vraies toutes les deux ou fausses toutes les deux), il en est de même pour leurs négations.

Donc en prenant les négations du point 2) de l'encadré ci-dessus :
Un quadrilatère n'est pas un parallélogramme si et seulement si ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu.
Ceci donne rapidement un moyen de prouver qu'un quadrilatère n'est pas un parallélogramme en justifiant que ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu !

Rectangle

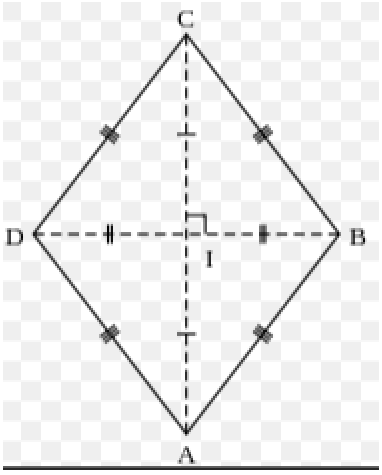


1) Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si tous ses angles sont droits.

2) Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.

Pour justifier qu'un quadrilatère est rectangle, il suffira par exemple de justifier que c'est un parallélogramme ayant un angle droit, ou encore, un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur.

Losange

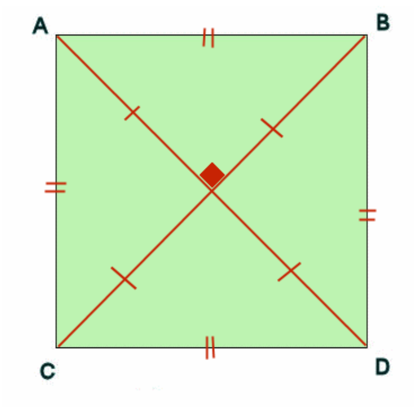


1) Un quadrilatère est un losange si et seulement si tous ses côtés ont la même longueur.

2) Un quadrilatère est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

Pour justifier qu'un quadrilatère est losange, il suffira par exemple de justifier que c'est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, ou encore, un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires.

Carré



1) Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses 4 côtés sont de même longueur et s'il a 4 angles droits.

2) Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et ont la même longueur.

Pour justifier qu'un quadrilatère est carré, il suffira par exemple de justifier que c'est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur, ou encore un losange ayant ses diagonales de même longueur.

Ces propriétés qui ***caractérisent*** *ces quadrilatères fonctionnent dans les deux sens (on parle de double implication en mathématiques) :*

Si je sais qu'un quadrilatère est un carré, alors j'ai le droit de dire que ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur.

Réciproquement, si je sais qu'un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur, alors il est vrai d'affirmer que ce quadrilatère est un carré.

✂--

Exemple

Soit (O ; I ; J) un repère du plan.

a) Placer les points A (2 ; 3) et B (1 ; -4).

b) Déterminer les coordonnées du point K, sachant que K étant le milieu de [AB].

c) Soit C (5 ; 2) et D (-2 ; -3). Déterminer les coordonnées du milieu du segment [CD].

d) Qu'en déduisez-vous concernant le quadrilatère ACBD ?

✂--

Exercice 2

Soit (O ; I ; J) un repère du plan, et A (2,5 ; -1,5)

a) Déterminer les coordonnées du point H, sachant que H est le symétrique du point A par rapport au point J.

b) Soit T (-1 ; 4). Déterminer, en justifiant, les coordonnées du point B de telle sorte que le quadrilatère ABHT soit un parallélogramme.

✂--

Activité

Soit (O ; I ; J) un repère orthonormé, et A (2 ; 4) et B (3 ; 7).

Trouver une méthode pour déterminer la longueur AB.

✂--

Propriété 2 (Calcul de la distance entre deux points dans un repère orthonormé)

Soit (O ; I ; J) un repère ORHONORME du plan.

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points dans ce repère.

La distance entre les points A et B est donnée par :

♥♥♥♥ AB = ♥♥♥♥

Essayons de comprendre et de justifier cette relation :

Exemple

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (2 ; 3) et B (4 ; 7).

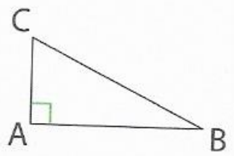
Déterminer la valeur exacte de la longueur AB, puis une valeur approchée au centième près.

✂---

Voici deux rappels importants : **le théorème de Pythagore** ainsi que **sa réciproque :**

Théorème de Pythagore

- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- **Réciproque :** Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.



Le théorème de Pythagore sert donc ***exclusivement à*** ....
....

La réciproque du théorème de Pythagore sert ***exclusivement à*** ....
....

✂---

Exercice 3

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (2 ; 1) ; B (4 ; -2) et C $(\frac{7}{2}\,;\,2)$

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre concernant le triangle ABC ?

b) A l'aide d'une démonstration, valider la conjecture effectuée.

Remarque : Dans les exercices, on pourra parfois, si besoin est, calculer le carré des distances pour simplifier les écritures.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (5 ; 1) ; B (3 ; 4).

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on légitimement émettre concernant la nature du triangle OAB ?

b) Le triangle OAB est-il isocèle ? Justifier.

c) Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice ?

d) En raisonnant par l'absurde, démontrer que le triangle OAB n'est pas rectangle en B.

✂---

Exercice 5

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), placer les points : A (1 ;3), B (3 ; -2), C (7; -1) et D (9 ;2).
Soit *K* le milieu de [AB], L le milieu de [BC], M le milieu de [CD], N le milieu de [AD].
Compléter la figure.
Quel constat faites-vous concernant le quadrilatère KLMN ?

A l'aide d'une démonstration, déterminer la nature du quadrilatère KLMN.

✂---

III- Compléments de géométrie

Définition

Soit O un point du plan et r un réel positif. Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan situé à la même distance r du point O.

Illustration :

Conséquence : pour prouver qu'un point M appartient au cercle de centre O et de rayon r, il suffira d'établir que…………

Définition

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon donné, et A un point appartenant à ce cercle.

On appelle ***TANGENTE au cercle $\mathcal{C}$ en le point A***, ……………………………………….............................
……

Illustration :

Exercice 6

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points : A (2 ; 4) ; B (-2 ; 2) et C (-1 ; 5).

a) Déterminer les coordonnées du point L, sachant que L est le centre du cercle de diamètre AB.
b) Démontrer que le point C appartient au cercle de diamètre AB.

c) Construire la droite (Δ), où (Δ) est la tangente au cercle de diamètre AB en le point B.

✂---

Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit (d) une droite, et A un point du plan.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Illustration :

Remarque :

Si A appartient à (d), ……………………………………………………………………………………………

Si A n'appartient pas à (d) on a la caractérisation suivante :

H est le projeté orthogonal de A sur (d) si et seulement si : ………………………………………………
Propriété

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche de A, c'est-à-dire :
Pour tout point M appartenant à (d) et distinct de H, on a : $AM > AH$.

Illustration et justification :

Définition : On appelle ***distance d'un point A à une droite (d)* la longueur *AH***, où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

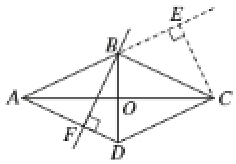
Exercice 7

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O. En utilisant le codage de la figure, compléter les phrases suivantes :

a) Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) est ....

b) Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est ....

c) Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est ....



d) La distance du point C à la droite (BD) est……………….

e) La distance du point B à la droite (AD) est………………..

✂---

Définition

Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A du triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).

Le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC est le point H projeté orthogonal de A sur (BC).

Illustration :

Propriété *(admise à ce stade sera démontrée en DM)*

Quel que soit le triangle ABC, ses trois hauteurs se coupent en un même point appelé ……………….. du triangle.

Illustration :

Remarque : Quand on exprime l'aire d'un triangle ABC en disant : $Aire = \dfrac{Base \times hauteur}{2}$, pour base, on a trois choix possibles : AB, AC ou BC.

Pour chacun de ces choix, la hauteur est alors la distance du dernier sommet restant à la droite portant la base choisie.

Illustration :

Exercice 8

Soit ABCD un carré de côté $4cm$ et M le point du segment [CD] tel que MC $= 1\ cm$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AM).

a) Faire une figure en vraie grandeur.

b) En calculant l'aire du triangle AMB de deux façons, déterminer la distance du point B à la droite (AM).

✂--

Exercice 9

Nous allons démontrer que si un triangle est inscrit dans un cercle et qu'un des côtés du triangle est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

a) Construire un cercle de diamètre AB, et placer un point C sur ce cercle distinct de A et B.
b) Soit O le milieu de [AB], et D le symétrique du point C par rapport à O. Démontrer que le quadrilatère $CADB$ est un rectangle.
c) En déduire que le triangle ABC est rectangle en C.

✂--

Définition

La médiatrice d'un segment [AB] est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

Illustration :

Propriété fondamentale (qui caractérise la médiatrice)

Un point M appartient à la médiatrice d'un segment $[AB]$ si et seulement si MA=MB, c'est-à-dire si et seulement si M est équidistant de A et B.

Illustration :

Remarque : cette propriété dit deux choses :

D'une part, si un point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, alors on peut dire que :
…………………………………………………………………………………………………….

D'autre part, si un point M est équidistant des points A et B, c'est-à-dire si $MA = MB$, alors
………………………………………………………………………………………………………

Exercice 10

Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur a, où a est un réel strictement positif quelconque.

Soit H le milieu de [BC].

a) Montrer que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b) Exprimer la longueur AH en fonction de a.

c) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de a.

✂---

Exercice 11

Soit ABC un triangle non aplati.

Soit (d) la médiatrice du segment [AB] et (Δ) la médiatrice du segment [AC].

1) Expliquer pourquoi les droites (d) et (Δ) sont sécantes.

2) On note O le point d'intersection de (d) et (Δ). Démontrer que OA = OB et OA = OC.

3) En déduire que O appartient également à la médiatrice du segment [BC].

4) Quelle propriété fondamentale concernant les trois médiatrices d'un triangle vous a-t-on ici fait démontrer ?

✂---

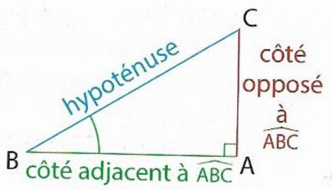
IV- Trigonométrie et triangle rectangle

A Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Définitions (rappels)

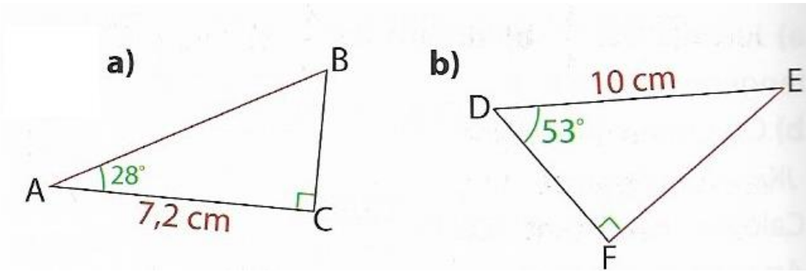
Dans un triangle ABC rectangle en A,

- $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$



Exercice 12

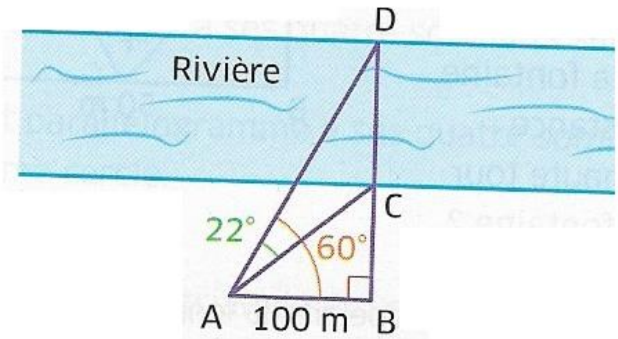
Calculer la longueur AB dans la figure *a)*, puis DF et EF dans la figure *b)*. Arrondir au millimètre près.



✂---

Exercice 13

En utilisant les informations données sur la figure, calculer la largeur DC de la rivière. arrondie au m.



✂---

Propriétés

ABC est un triangle rectangle en A et on note α la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

- $0 < \cos(\alpha) < 1$
- $0 < \sin(\alpha) < 1$
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

$tan(\alpha) =$

Preuve :

Exercice 15

α est la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

Sachant que $cos(\alpha) = 0{,}7$, déterminer la valeur exacte de : $sin(\alpha)$ puis $tan(\alpha)$.

Exercice 16 *(éventuellement en dm)*

Soit ABC un triangle. On note $a = $ BC, $b = $ AC et $c = $ AB et enfin $\widehat{\mathrm{A}}$ la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

La figure ci-contre résume cela.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1) On note S l'aire du triangle ABC. Montrer que S $= \frac{bc\times sin(\hat{A})}{2}$.
2) Etablir de même que : S $= \frac{ac\times \sin(\hat{B})}{2} = \frac{ab\times \sin(\hat{C})}{2}$.
3) En déduire la relation suivante appelée loi des sinus dans un triangle quelconque :

$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$. Cette dernière est par exemple très utilisée en optique géométrique.

<u>Application</u> : ABC est un triangle tel que : AB $= 6\ cm$; BC $= 8\ cm$ et $\hat{A} = 30°$.

Déterminer, en justifiant, les mesures des autres angles de ce triangle ainsi que la longueur AC. On arrondira si besoin est les résultats, à 0,1° près pour les mesures d'angles, et au millimètre près pour AC.