Chapitre III Repérage dans le plan, géométrie repérée, compléments de géométrie

I – Repérage dans le plan

Définition

On appelle ***repère du plan***, tout ensemble formé par trois points non alignés, appelé un triplet.
On notera $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un tel triplet formé par les trois points O, I et J non alignés.

O est appelée l'origine du repère, c'est l'intersection des deux axes du repère.

L'axe (OI) est appelé l'axe des abscisses ; en général, la lettre x désigne l'abscisse.

L'axe (OJ) est appelé l'axe des ordonnées ; en général, la lettre y désigne l'ordonnée.

Illustration :

Remarque

Soit $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un repère du plan.

Tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x\ ;\ y)$ de nombres.
x est appelé l'abscisse du point M, et y est appelé l'ordonnée du point M.

On notera : $M(x\ ;\ y)$ pour dire que le point M a pour abscisse x et pour ordonnée y.

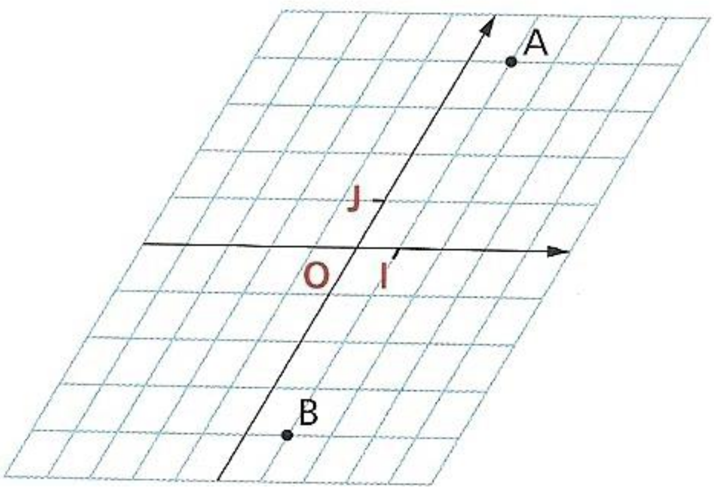
Attention, l'ordre dans les coordonnées est crucial : d'abord l'abscisse, ensuite l'ordonnée !!

Par exemple $M(2\ ;\ 3)$ n'est pas le même point que $N(3\ ;\ 2)$!!

Dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, le point O a pour coordonnées $O(\dots\ ;\ \dots)$, le point I a pour coordonnées $I(\dots\ ;\ \dots)$ et le point J a pour coordonnées $J(\dots\ ;\ \dots)$.

Exemple de repère quelconque $(O\ ;\ I\ ;\ J)$

Dans le repère ci-dessous $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, lire les coordonnées des points A et B, puis placer les point $C(-\ 3\ ;\ 2)$, $D(0\ ;\ -2)$ et $E(-\ 4\ ;\ 0)$



Définition Un repère est dit *orthogonal* lorsque ses *axes sont perpendiculaires*.

Un repère est dit ***orthonormé*** lorsque ses ***axes sont perpendiculaires*** $\boxed{\text{ET}}$ qu'il y a la ***même unité pour graduer chacun des deux axes.***

Au lycée, on est très souvent placé dans des repères orthonormés.

Illustration graphique :

✂

Exemple

a) Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), construire l'ensemble des points du plan qui ont pour ordonnée le nombre 3.

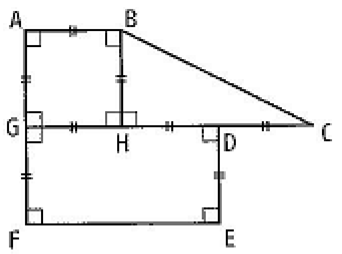
b) Dans ce même repère, construire avec une autre couleur l'ensemble des points du plan qui ont pour abscisse le nombre -1.

c) Caractériser par leurs coordonnées, l'ensemble de tous les points du plan situé à l'intérieur du rectangle $ABCD$, où $A(3 ; 2)$; $B(3 ; -1)$; $C(-4 ; -1)$ et $D(-4 ; 2)$.

✂

Exercice 1

La figure ci-dessous est composée d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle rectangle.



1. Donner les coordonnées de tous les points de cette figure dans le repère (H, D, B).

2. Le point K a pour coordonnées (0,5 ; −0,5) dans ce repère.
Est-il dans le carré, le rectangle ou bien le triangle ?

3. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (F, E, G).

4. Exprimer les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (H, B, G).

II – Géométrie analytique

Activité : soit (O, I, J) un repère du plan, $A(2\ ;\ 5)$ et $B(4\ ;\ 1)$ et K le milieu du segment $[AB]$.
Faire une figure, puis lire graphiquement les coordonnées du milieu de $[AB]$.
Comment les coordonnées du point K se déduisent-elles de celles des points A et B ?
✂

Propriété 1 : Soit $(O\,;I\,;J)$ un repère du plan.

Soit $A(x_A\,; y_A)$ et $B(x_B\,; y_B)$ deux points dans ce repère.

Le milieu K du segment $[AB]$ a pour coordonnées $K(x_K\,; y_K)$ avec :

$x_K =$ et $y_K =$

On justifiera ces relations lors du chapitre sur les vecteurs.

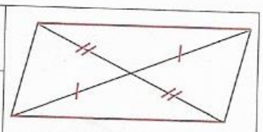
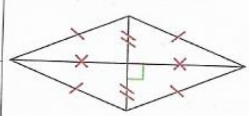
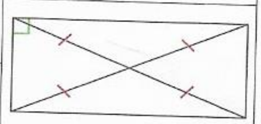
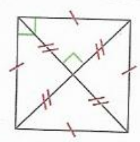
✂
Avant de commencer les exercices suivants, voici quelques rappels sur les quadrilatères.

Ces règles vous donnent des moyens pour justifier qu'un quadrilatère et un parallélogramme, un losange, un rectangle, un carré.

Par exemple, pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffira d'expliquer pourquoi ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Pour justifier qu'un quadrilatère est un losange, il suffira de justifier qu'il a ses quatre côtés de même longueur, ou encore de justifier que c'est un parallélogramme et qu'il a deux côtés consécutifs égaux.

Quadrilatères particuliers

Parallélogramme	• Quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles. • Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.	
Losange	• Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur. • Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.	
Rectangle	• Parallélogramme qui a un angle droit. • Parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.	
Carré	• Quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange. • Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires.	

Ce n'est pas la seule manière de procéder pour établir qu'un quadrilatère est un losange : on aurait pu, si on avait des renseignements sur les diagonales de ce quadrilatère, justifier que ce quadrilatère a ses diagonales qui sont perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu.

Ces propriétés qui ***caractérisent*** *ces quadrilatères fonctionnent dans les deux sens (on parle de double implication en mathématiques) :*

Si je sais qu'un quadrilatère est un carré, alors j'ai le droit de dire que ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur.

Réciproquement, si je sais qu'un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur, alors il est vrai d'affirmer que ce quadrilatère est un carré.

✂

Exemple

Soit $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un repère du plan.

a) Placer les points $A(2\ ;\ 3)$ et $B(1\ ;\ -4)$.

b) Déterminer les coordonnées du point K, K étant le milieu de $[AB]$.

c) Soit $C(5\ ;2)$ et $D(-2\ ;\ -3)$. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[CD]$.

d) Qu'en déduisez-vous concernant le quadrilatère $ACBD$?

✂

Exercice 2

Soit $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un repère du plan, et $A(2{,}5\ ;\ -1{,}5)$

a) Déterminer les coordonnées du point H, sachant que H est le symétrique du point A par rapport au point J.

b) Soit $T(-1\ ;\ 4)$. Déterminer, en justifiant, les coordonnées du point B de telle sorte que le quadrilatère $ABHT$ soit un parallélogramme.

<u>Activité</u>

Soit $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ un repère orthonormé, et $A(2\ ;\ 4)$ et $B(3\ ;\ 7)$.

Trouver une méthode pour déterminer la longueur AB.
✂

Propriété 2 (_Calcul de la distance entre deux points dans un repère orthonormé_)

Soit (O ; I ; J) un repère ORHONORME du plan.

Soit $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points dans ce repère.

La distance entre les points A et B est donnée par :

AB =

<u>Essayons de comprendre et de justifier cette relation :</u>

<u>Exemple</u>

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points : $A(2\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;\ 7)$.

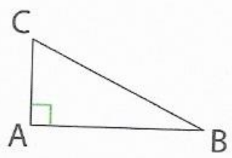
Déterminer la valeur exacte de la longueur AB, puis une valeur approchée au centième près.

✂

Voici deux rappels importants : **le théorème de Pythagore** ainsi que **sa réciproque :**

Théorème de Pythagore

- Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- **Réciproque :** Si ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.



Le théorème de Pythagore sert donc ***exclusivement*** à ………………………………………………………
……

La réciproque du théorème de Pythagore sert ***exclusivement*** à ………………………………………………
……..

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points : $A(2\ ;\ 1)$; $B(4\ ;\ -2)$ et $C(\frac{7}{2}\ ;\ 2)$

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on émettre concernant le triangle ABC ?

b) A l'aide d'une démonstration, valider la conjecture effectuée.

<u>*Remarque*</u> : Dans les exercices, on pourra parfois, si besoin est, calculer le carré des distances pour simplifier les écritures.

✂

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points : $A(5\ ;\ 1)$; $B(3\ ;4)$.

a) Faire une figure. Quelle conjecture peut-on légitimement émettre concernant la nature du triangle OAB ?

b) Le triangle OAB est-il isocèle ? Justifier.

c) Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice ?

d) En raisonnant par l'absurde, démontrer que le triangle OAB n'est pas rectangle en B.

✂

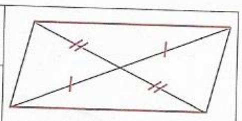
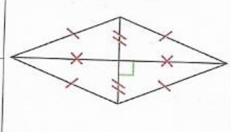
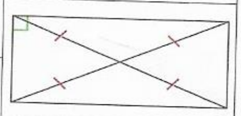
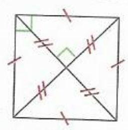
Avant de commencer les exercices suivants, voici quelques rappels sur les quadrilatères.

Ces règles vous donnent des moyens pour justifier qu'un quadrilatère et un parallélogramme, un losange, un rectangle, un carré.

Par exemple, pour justifier qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffira d'expliquer pourquoi ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Pour justifier qu'un quadrilatère est un losange, il suffira de justifier qu'il a ses quatre côtés de même longueur, ou encore de justifier que c'est un parallélogramme et qu'il a deux côtés consécutifs égaux.

Quadrilatères particuliers

Parallélogramme	• Quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles. • Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.	
Losange	• Parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur. • Parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.	
Rectangle	• Parallélogramme qui a un angle droit. • Parallélogramme dont les diagonales ont même longueur.	
Carré	• Quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange. • Quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires.	

Ce n'est pas la seule manière de procéder pour établir qu'un quadrilatère est un losange : on aurait pu, si on avait des renseignements sur les diagonales de ce quadrilatère, justifier que ce quadrilatère a ses diagonales qui sont perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu.

Ces propriétés qui ***caractérisent*** *ces quadrilatères fonctionnent dans les deux sens (on parle de double implication en mathématiques) :*

Si je sais qu'un quadrilatère est un carré, alors j'ai le droit de dire que ce dernier a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur.

Réciproquement, si je sais qu'un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et qu'elles ont la même longueur, alors il est vrai d'affirmer que ce quadrilatère est un carré.

✂

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, placer les points : $A(1\ ;3)$, $B(3\ ;\ -2)$, $C(7\ ;\ -1)$ *et* $D(9\ ;2)$.
Soit K le milieu de $[AB]$, L le milieu de $[BC]$, M le milieu de $[CD]$, N le milieu de $[AD]$.
Compléter la figure.
Quel constat faites-vous concernant le quadrilatère $KLMN$?

A l'aide d'une démonstration, déterminer la nature du quadrilatère $KLMN$.

✂

III- Compléments de géométrie

Définition

Soit O un point du plan et R un réel positif. Le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan situé à la même distance R du point O.

Illustration :

Conséquence : pour prouver qu'un point M appartient au cercle de centre O et de rayon R il suffira d'établir que…………

Définition

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon donné, et A un point appartenant à ce cercle.

On appelle ***TANGENTE au cercle C en le point A***, ……………………………………..............................
……………………………………………………………………………

Illustration :

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on considère les points : $A(2\ ;4)$; $B(-2\ ;\ 2)$ et $C(-1\ ;\ 5)$.

a) Le point C appartient-il au cercle de diamètre AB ? Justifier.

b) Construire la droite (Δ), où (Δ) est la tangente au cercle de diamètre AB en le point B.

c) Le point $K(-1\ ;-1)$ appartient-il à la droite (Δ) ? Justifier.

✂

Définition du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit (d) une droite, et A un point du plan.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par A.

Illustration :

Remarque :

Si A appartient à (d), ……………………………………………………………………………………………

Si A n'appartient pas à (d) on a la caractérisation suivante :

H est le projeté orthogonal de A sur (d) si et seulement si : ……………………………………………

Propriété

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche de A, c'est-à-dire :
Pour tout point M appartenant à (d) et distinct de H, on a : $AM > AH$.

Illustration et justification :

Définition : On appelle distance d'un point A à une droite (d) la longueur AH, où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

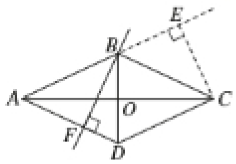
Exercice 7

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O. En utilisant le codage de la figure, compléter les phrases suivantes :

a) Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) est ….

b) Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est ….

c) Le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est ….



d) La distance du point C à la droite (BD) est………………

e) La distance du point B à la droite (AD) est………………..

<u>Définition</u>

Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A du triangle ABC est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC).

Le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC est le point H projeté orthogonal de A sur (BC).

<u>Illustration</u> :

<u>Propriété</u> (*admise sera démontrée en DM*)

Quel que soit le triangle ABC, ses trois hauteurs se coupent en un même point appelé ……………….. du triangle.

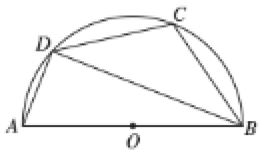
<u>Illustration</u> :

<u>Remarque</u> : Quand on exprime l'aire d'un triangle ABC en disant : $Aire = \frac{Base \times hauteur}{2}$, pour base, on a trois choix possibles : AB, AC ou BC.

Pour chacun de ces choix, la hauteur est alors la distance du dernier sommet restant à la droite portant la base choisie.

<u>Illustration</u> :

Exercice 8



Sur la figure ci-contre, les points C et D sont des points du demi-cercle de diamètre $[AB]$ tels que le triangle BCD est isocèle en C.
Le centre du demi-cercle est noté O.

1. Déterminer en justifiant la réponse :

a) le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD).

b) le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

c) le projeté orthogonal du point C sur la droite (BD).

2. Placer les points E et F respectivement projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).

3. Quel est l'orthocentre du triangle ADC ?

✂

Exercice 9

Soit $ABCD$ un carré de côté $4cm$ et M le point du segment $[CD]$ tel que $MC = 1\ cm$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AM).

a) Faire une figure en vraie grandeur.

b) En calculant l'aire du triangle AMB de deux façons, déterminer la distance du point B à la droite (AM).

✂

Exercice 10

Construire en vraie grandeur un triangle RST tel que : $RS = 5\ cm$; $ST = 7\ cm$ et $RT = 6\ cm$.

Construire le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[ST]$. Il coupe (RT) en M et (RS) en N (avec M distinct de T et N distinct de de S).
Placer enfin le point I intersection des droites (SM) et (TN).

Démontrer que les droites (RI) et (ST) sont perpendiculaires.

✂

Définition

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

Illustration :

<u>Propriété fondamentale (qui caractérise la médiatrice)</u>

Un point *M* appartient à la médiatrice d'un segment [*AB*] si et seulement si *MA*=*MB*, c'est-à-dire si et seulement si *M* est équidistant de *A* et *B*.

<u>Illustration</u> :

<u>Remarque</u> : cette propriété dit deux choses :

D'une part, si un point M appartient à la médiatrice du segment [AB], alors on peut dire que : ……

D'autre part, si un point M est équidistant des points A et B, c'est-à-dire si $MA = MB$, alors ………

***Exercice* 11**

Soit ABC un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur a, où a est un réel strictement positif quelconque.

Soit H le milieu de [BC].

a) Montrer que H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

b) Exprimer la longueur AH en fonction de a.

c) En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de a.

✂

***Exercice* 12**

Soit ABC un triangle non aplati.

Soit (d) la médiatrice du segment [AB] et (Δ) la médiatrice du segment [AC].

1) Expliquer pourquoi les droites (d) et (Δ) sont sécantes.

2) On note O le point d'intersection de (d) et (Δ). Démontrer que $OA = OB$ et $OA = OC$.

3) En déduire que O appartient également à la médiatrice du segment [BC].

4) Quelle propriété fondamentale concernant les trois médiatrices d'un triangle vous a-t-on ici fait démontrer ?

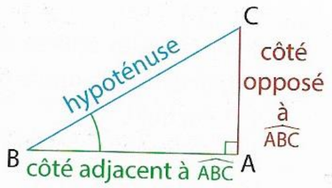
IV- Trigonométrie et triangle rectangle

A Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Définitions (rappels)

Dans un triangle ABC rectangle en A,

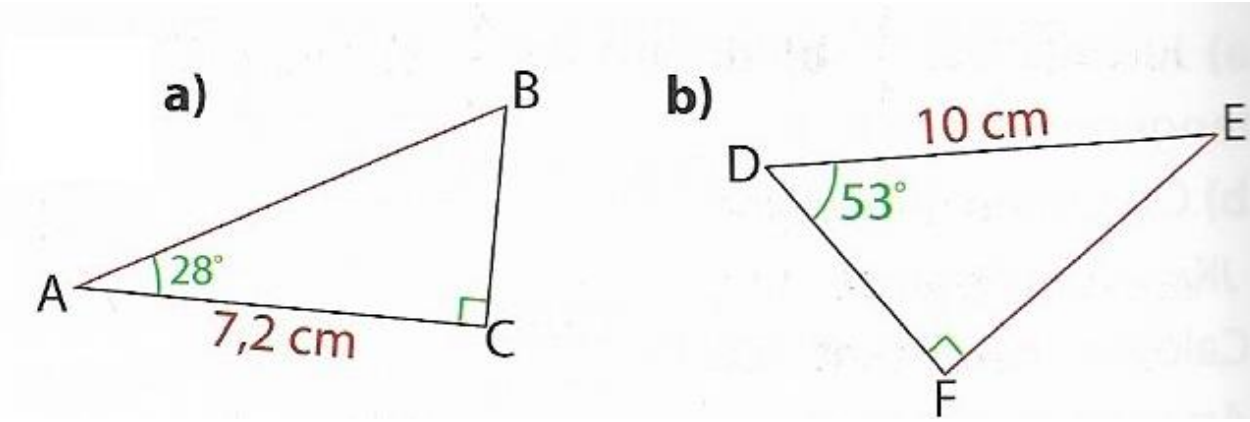
- $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$
- $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$
- $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$



✂

Exercice 13

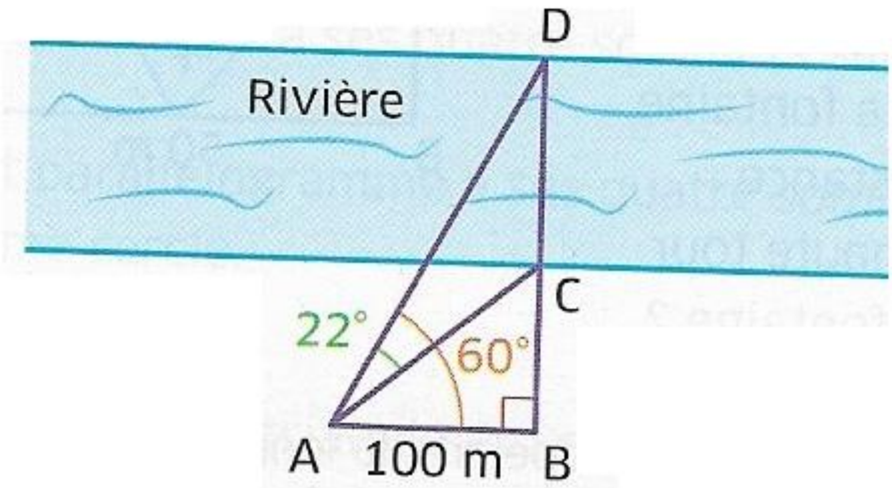
Calculer la longueur AB dans la figure a), puis DF et EF dans la figure b). Arrondir au millimètre près.



✂

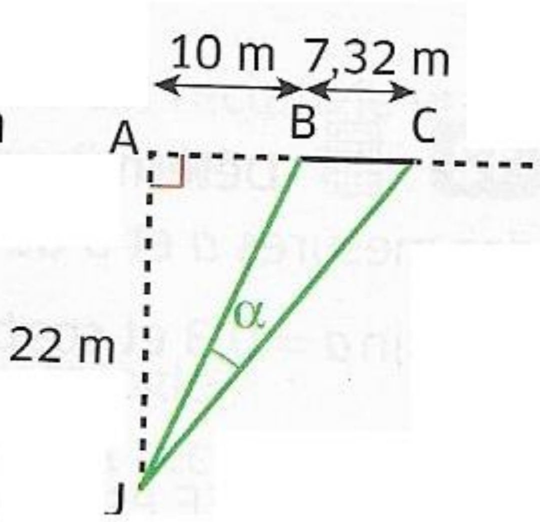
Exercice 14

En utilisant les informations données sur la figure, calculer la largeur DC de la rivière. arrondie au m.



***Exercice* 15**

On a représenté ci-contre une partie d'un terrain de football : la largeur des buts [BC] est égale à 7,32 m ; le joueur placé en J est à 22 mètres du point A au fond du terrain et [AB] mesure 10 m. Déterminer une valeur arrondie au degré de l'angle de tir α.



✂

Propriétés

ABC est un triangle rectangle en A et on note α la mesure, en degré, d'un angle aigu de ce triangle.

- $0 < \cos(\alpha) < 1$
- $0 < \sin(\alpha) < 1$
- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

***tan*(α) =**

Preuve :

✂

***Exercice* 16**

α est la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

Sachant que $cos(\alpha) = 0{,}7$, déterminer la valeur exacte de : $sin(\alpha)$ puis $tan(\alpha)$.