Chapitre III **La dérivation**

I- Rappels sur les équations de droites

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$.

a) Comment s'appelle la fonction f ? Que peut-on dire de sa courbe représentative ?

b) Construire cette dernière dans un repère orthonormé $(O \; ; I \; ; J)$.

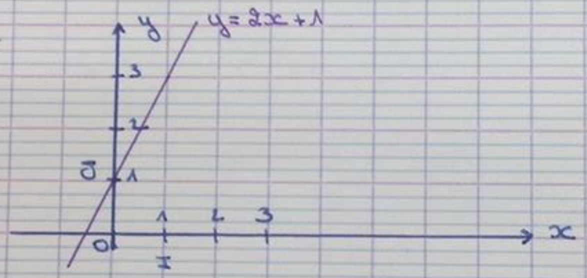
Remarque : la courbe tracée a pour équation : $y = 2x + 1$

a) $f(x) = 2x + 1$

f est une fonction affine càd de la forme $ax+b$ avec $a=2$ et $b=1$.

La courbe représentative de f est une droite.

b)



Donnons-nous deux points situés sur $\mathcal{C}_f$:

x	0	1
$f(x)$	1	3

$J(0;1) \in \mathcal{C}_f$ et $A(1;3) \in \mathcal{C}_f$

Propriété

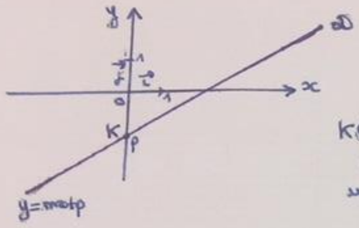
Toute droite $\mathcal{D}$, non parallèle à l'axe des ordonnées, admet pour équation réduite :

$y =$ .mx + p..........

m est appelé le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ (ou encore la pente de la droite).

p est appelé l'ordonnée à l'origine : c'est l'ordonnée du point de la droite $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est nulle.

Illustration



K(0;p) où p est l'ordonnée à l'origine K est le point situé sur $\mathcal{D}$ d'abscisse $x = 0$.

On parle de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine uniquement pour des droites non parallèles à l'axe des ordonnées. Les droites verticales (= parallèles à l'axe des ordonnées) n'ont ni coefficient directeur, ni d'ordonnée à l'origine !

Rappelons comment se calcule le coefficient directeur d'une droite non verticale :

Propriété clé *(comment se calcule le coefficient directeur)*

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation réduite : $y=mx+p$.

Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts appartenant à $\mathcal{D}$.

Alors ♥♥♥ $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$ ♥♥♥

(prise dans le même ordre)

Exemple

Calculer le coefficient directeur des droites (AB) et (CD) sachant que :
$A(5\,;2)$, $B(-3\,;1)$, $C(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4})$ et $D(-1;\frac{1}{2})$.

Soit m le coeff. directeur de (AB) :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{-3-5} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

Soit m' le coeff. directeur de (CD) :

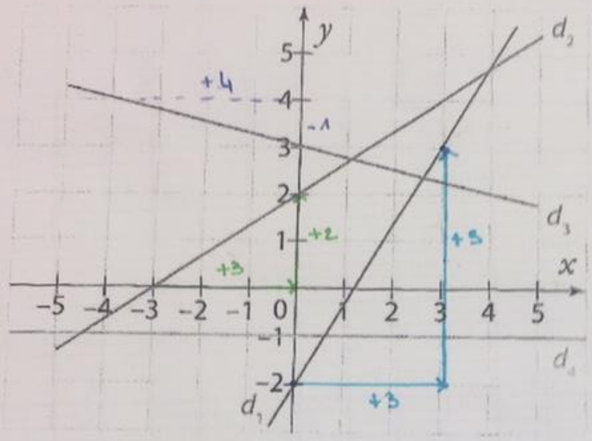
$$m' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{-1 - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Remarque : lorsqu'on demande de donner l'équation réduite d'une droite, il faut trouver la valeur de m et celle de p puis écrire l'équation réduite sous la forme : $y = mx + p$.

Exercice 1

Déterminer le coefficient directeur, puis l'ordonnée à l'origine de chacune des droites tracées.

En déduire l'équation réduite de chacune des droites ci-dessous :



d_1 a pour coeff. directeur : $m_1 = \frac{5}{3}$ (Méthode escalier)
et pr ordonnée à l'origine : $p_1 = -2$.

Donc d_1 a pour équa° réduite : $y = \frac{5}{3}x - 2$.

d_2 a pr coeff. directeur : $m_2 = \frac{2}{3}$
et pr ordonnée à l'origine : $p_2 = 2$.

Donc d_2 a pr équa° réduite = $y = \frac{2}{3}x + 2$

d_3 a pr coeff. directeur : $m_3 = \frac{-1}{4}$
et pr ordonnée à l'origine : $p_3 = 3$

Donc d_3 a pour équa° réduite : $y = -\frac{1}{4}x + 3$

d_4 a pour équa° réduite : $y = -1$.
car d_4 a pour coeff. directeur 0
Son ordonnée à l'origine est -1.

Remarques fondamentales

- *Les droites parallèles à l'axe des abscisses (appelées droites horizontales) ont toutes pour coefficient directeur* 0.
- *Les droites "ascendantes" ont toujours un coefficient directeur*...positif...............
- *Les droites "descendantes" ont toujours un coefficient directeur*...négatif...............

Il arrive que parfois, on ne puisse pas lire graphiquement l'équation réduite d'une droite.

Exercice 2

1) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB), où $A(4\ ;\ 5)$ et $B(1\ ;\ 7)$.

2) Le point $L(8\ ;\ 5)$ appartient-il à la droite (AB)?

1) $x_A \neq x_B$ car $4 \neq 1$, donc (AB) a pour équation réduite :
$y = mx + p$

Or $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-5}{1-4} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$.

Donc $y = -\dfrac{2}{3}x + p$

Enfin $A(4;5) \in (AB)$, donc les coordonnées du point A vérifient l'égalité : $y_A = -\dfrac{2}{3}x_A + p$

à savoir : $5 = -\dfrac{2}{3} \times 4 + p$

Donc $p = 5 + \dfrac{2}{3} \times 4 = 5 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{15}{3} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{23}{3}$

Donc (AB) a pour équation réduite : $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{23}{3}$

2) $L(8;5) \in (AB)$ ssi $y_L = -\dfrac{2}{3}x_L + \dfrac{23}{3}$

Or $-\dfrac{2}{3}x_L + \dfrac{23}{3} = -\dfrac{2}{3} \times 8 + \dfrac{23}{3} = \dfrac{-16}{3} + \dfrac{23}{3} = \dfrac{7}{3}$

Or $\frac{7}{3} \neq 5$, donc $L(8;5) \notin (AB)$.

Exercice 3

Construire dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ dont une équation est : $3x + 2y - 8 = 0$.

Pour $x = 0$: $3 \times 0 + 2 \times y - 8 = 0$

$2y = 8$

$y = 4$

Donc $A(0;4) \in \mathcal{D}$.

Pour $x = 2$: $3 \times 2 + 2 \times y - 8 = 0$

$6 + 2y - 8 = 0$

$2y = 8 - 6 = 2$

$y = \frac{2}{2} = 1$.

Donc $B(2;1) \in \mathcal{D}$

Le tracé est alors évident : $\mathcal{D} = (AB)$

Propriété

Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur. (et réciproquement)

Exercice 4

Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(2\ ;\ 15)$ et parallèle à la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite : $y = -6x + 2022$.

$\mathcal{D}$ a pour équa° : $y = -6x + 2022$, donc $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur : $m = -6$.
Or $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}$
Donc $\mathcal{D}'$ a pour coefficient directeur -6.
Par suite $\mathcal{D}'$ a pour équa° : $y = -6x + p$
Enfin : $A(2;15) \in \mathcal{D}'$ donc : $15 = -6 \times 2 + p$
$p = 15 + 6 \times 2 = 27$

$\mathcal{D}'$ a pour équa° : $y = -6x + 27$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 1$.

a) Déterminer les coordonnées du point A situé sur C_f et ayant pour abscisse 1.

b) Soit h un réel non nul et B le point de C_f ayant pour abscisse $1+h$.
Exprimer en fonction de h le coefficient directeur de la droite (AB).

c) En déduire les coordonnées du point K situé sur C_f pour lequel la droite (AK) est parallèle à l'axe des abscisses.

a) $A(1; y)$ et $A \in \mathcal{C}_f$, donc $y = f(1)$.
$y = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$A(1;3)$

b) h est réel non nul ($h \neq 0$)

$B(1+h\,;\,f(1+h))$ avec : $f(1+h) = (1+h)^2 + 1+h+1$

$f(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 1 + h + 1 = h^2 + 3h + 3$.

Donc $B(1+h\,;\,h^2+3h+3)$

Par suite, la pente (coeff. directeur) de (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{h^2+3h+3-3}{1+h-1} = \frac{h^2+3h}{h}$$

$$m = \frac{h(h+3)}{h} = h+3$$

c) (AK) et l'axe des abscisses sont parallèles donc (AK) a pour équation : $y = y_A = 3$

Par suite $K(x\,;\,3)$.

Or le point $K(x\,;\,3) \in \mathcal{C}_f$ donc : $f(x) = 3$

$$x^2 + x + 1 = 3$$

$$x^2 + x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

1 est racine évidente de cette équa°,

donc l'autre racine x_2 vérifie : $1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_2 = -\frac{2}{1} = -2$$

Or K et A st distincts, donc $x_A \neq x_K$.

Donc $x_K \neq 1$.

Donc $x_K = -2$ et $K(-2\,;\,3)$

II – La notion de limite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$
Comment se comporte f au voisinage de 0 ? C'est-à-dire, lorsque x est très proche de 0, de quel réel est proche $f(x)$?

x	$-0,001$	$-0,01$	$-0,1$	$0,1$	$0,01$	$0,001$
$f(x) = x^2$	$0,000001$	$0,0001$	$0,01$	$0,01$	$0,0001$	$0,000001$

Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend également vers 0.

Notation :

- Pour dire que x tend vers 0 (si vous préférez, x se rapproche de 0, sans jamais valoir 0), on notera $x \to 0$.

- Pour dire que les valeurs prises par f sont proches de 0 lorsque x tend vers 0, on adoptera l'écriture classique suivante : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

lim : abréviaᵒ du mot limite
se lit : "la limite quand x tend vers 0 de $f(x)$ est égale à 0."

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3$.

Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2+6$. Déterminer : $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

$f(x) = 2x + 3$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

$g(x) = x^2 + 6$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 6$ car $g(0,01) = 0,0001 + 6 = 6,000$

III – Dérivation

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in$ I, et h un réel non nul tel que $a + h \in$ I.

On appelle taux de variation (d'accroissements) de f entre a et $a + h$, le réel noté $t(h)$ défini par :

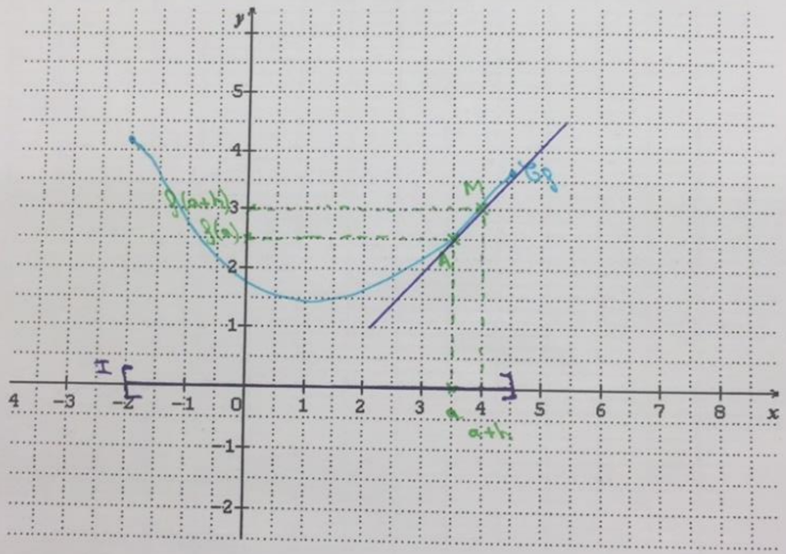
$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\textit{différence} \text{ des images}}{\textit{différence} \text{ des abscisses}}$$ (calculées dans le même ordre).

Soit $A(a\,;f(a))$, et $M(a+h\,;f(a+h))$ deux points appartenant à la courbe représentative de la fonction f. Placer ces deux points dans le repère suivant :

Concrètement, que représente le taux de variation de f entre a et $a + h$?

$t(h)$ est le coefficient directeur de (AM) car : $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = t(h)$

Illustration graphique :



$t(h)$ n'est autre que ..le coefficient directeur de la droite (AM).....................

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$.
Calculer le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$ sous forme simplifiée où h est un réel non nul.

$t(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ (défini° avec ici $a = 3$)

$t(h) = \frac{(3+h)^2 + (3+h) - (3^2+3)}{h} = \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 + \cancel{3} + h - \cancel{12}}{h} = \frac{h^2 + 7h}{h} = \frac{h(h+7)}{h} = h+7$

Définition 2

Une fonction f est ***dite dérivable en $a \in I$*** si le taux de variation $t(h)$ de f entre a et $a+h$ admet une ***limite finie*** lorsque h tend vers 0.

f est dérivable en $a \in I \Leftrightarrow$ il existe ***un réel ℓ*** tel que : $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$.

On adopte la ***notation suivante*** : le réel $\ell = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est noté $f'(a)$ [lire f *prime* de a], on l'appelle le nombre dérivé de f en a.

Donc on a (à bien retenir) :

♥♥♥ $f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ♥♥♥

Méthode pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un réel a :

Etape 1 : On calcule sous forme simplifiée le taux de variaᵒ de f entre a et $a+h$:
$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Etape 2 : On cherche ensuite la limite qd $h \to 0$ de ce taux $t(h)$. Si elle est finie, f est dérivable en a.

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

a) Montrer que f est dérivable en $a = 1$, et déterminer la valeur de $f'(1)$.

b) Essayer de généraliser ce résultat en un réel a quelconque.

a) Montrer que f est dérivable en $a = 1$.

Etape 1 : On forme, pour $h \neq 0$ le taux :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$t(h) = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$

Etape 2 : $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \lim\limits_{h \to 0} (2+h) = 2$

Or $2 \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a=1$ et $f'(1) = 2$

Rappel : $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} t(h)$

2) Montrer que f est dérivable en a, où $a \in \mathbb{R}$.

Etape 1 : On forme, pour $h \neq 0$, le taux :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h}$$

$$t(h) = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

Etape 2 : $\lim t(h) = \lim (2a+h) = 2a$

Exemple 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que f est dérivable en $a = 2$, et calculer $f'(2)$.

b) *Généraliser ce résultat à un réel a quelconque non nul : démontrer que f est dérivable en a et donner l'expression de $f'(a)$.*

---

a) Etape 1 : pour $h \neq 0$: $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ avec $a = 2$.

$$t(h) = \frac{f(2+h) - f(h)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h}$$

$$t(h) = \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \frac{\frac{2-2-h}{2(2+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h} = \frac{-h}{2h(2+h)}$$

$$t(h) = \frac{h \times (-1)}{h \times 2(2+h)} = \frac{-1}{2(2+h)}$$

Etape 2 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = \dfrac{-1}{4}$

Or $\dfrac{-1}{4} \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a = 2$, et $f'(2) = \dfrac{-1}{4}$.

b) Généralisation

Etape 1 : pour $h \neq 0$: $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$t(h) = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h}.$$

$$t(h) = \frac{-\cancel{h}}{a(a+h)} \times \frac{1}{\cancel{h}} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

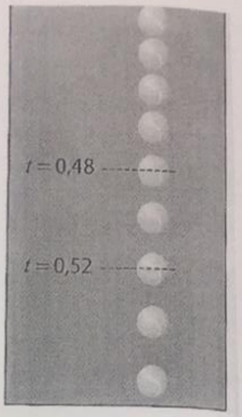
Etape 2 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = \dfrac{-1}{a^2}$

Or $\dfrac{-1}{a^2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$

IV– Approche cinématique du nombre dérivé

Une balle en chute libre

On a photographié, à intervalles de temps réguliers 0,02 seconde, la chute d'une balle de tennis. Le tableau ci-dessous fournit le relevé des mesures effectuées : $d(t)$ est la distance (arrondie à 0,01 mètre) parcourue par la balle, t secondes après l'avoir lâchée.



t	0,44	0,46	0,48	0,5	0,52	0,54	0,56
$d(t)$	0,95	1,04	1,13	1,23	1,32	1,43	1,54

La vitesse moyenne de la balle est égale au quotient de la distance parcourue par le temps écoulé.

1 Montrer que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5 s et 0,54 s est égale à 5 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 On admet que la distance $d(t)$ parcourue par la balle en fonction du temps t écoulé depuis le lâcher s'exprime par la formule $d(t) = 4{,}9t^2$.
Soit r la fonction définie pour tout réel h non nul par $r(h) = \dfrac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h}$.
a. Montrer que $r(h) = 4{,}9h + 4{,}9$.
b. Calculer $r(0{,}1)$ puis interpréter le résultat en termes de vitesse.
c. Calculer $r(0{,}01)$ puis $r(0{,}001)$. On arrondira si nécessaire les résultats à 0,001.

Quel constat fait-on concernant la vitesse moyenne de la balle entre les instants $0{,}5s$ et $0{,}5 + h\ s$ lorsque h tend vers 0 ?

Ce nombre est appelé **nombre dérivé de d en 0,5** et on le note $d'(0{,}5)$. Ainsi, $d'(0{,}5) = 4{,}9$.
Cette valeur limite 4,9 est la **vitesse instantanée** en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ de la balle à l'instant $t = 0{,}5$.

1) $v = \dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{1{,}43-1{,}23}{0{,}54-0{,}5} = \dfrac{0{,}2}{0{,}04} = \dfrac{20}{4} = 5$

2) $h \neq 0$ et $r(h) = \dfrac{d(0{,}5+h)-d(0{,}5)}{h}$ avec $d(t) = 4{,}9t^2$.

a) $r(h) = \dfrac{4{,}9(0{,}5+h)^2 - 4{,}9\times 0{,}5^2}{h}$

$r(h) = \dfrac{4{,}9(\cancel{0{,}5^2} + 2\times 0{,}5\times h + h^2 - \cancel{0{,}5^2})}{h}$

$r(h) = \dfrac{4{,}9(h+h^2)}{h} = \dfrac{4{,}9\cancel{h}(1+h)}{\cancel{h}}$

$r(h) = 4{,}9(1+h) = 4{,}9h + 4{,}9.$

b) $r(0,1) = 4,9 \times 0,1 + 4,9 = 0,49 + 4,9 = 5,39\ m.s^{-1}$

La vitesse moyenne de la balle entre les instants 0,50 et 0,60 est de 5,39 $m.s^{-1}$.

c) Ici $h = 0,01$

$r(0,01) = 4,9 \times 0,01 + 4,9 = 4,949\ m.s^{-1}$

Ici $h = 0,001$

$r(0,001) = 4,9 \times 0,001 + 4,9$

$r(0,001) \simeq 4,905\ m.s^{-1}$

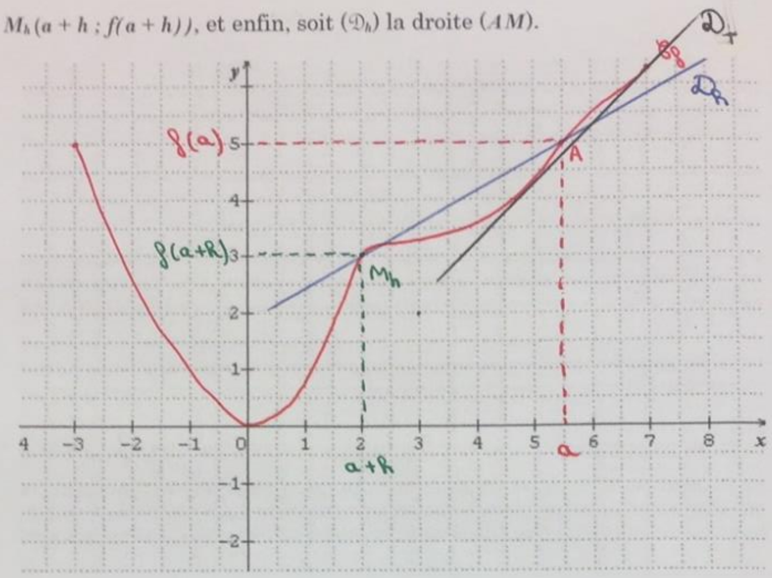
Lorsque $h \to 0$, la vitesse moyenne de la balle entre les instants 0,5 s et $0,5 + h$ tend vers $4,9\ m.s^{-1}$.

V – Interprétation géométrique du nombre dérivé d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et dérivable en $a \in I$; soit C_f la courbe représentant la fonction f et h un réel non nul.

Soit $A(a\,;f(a))$ et $M_h(a+h\,;f(a+h))$, et enfin, soit $(\mathcal{D}_h)$ la droite (AM).

Illustration :



Lorsque $h \to 0$, M_h se rapproche du point A, et la droite $(\mathcal{D}_h)$ se rapproche d'une position limite : la droite D_T.

Remarque : la droite D_T "*frôle* "la courbe C_f.

Or, f est dérivable en a, donc, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et vaut $f'(a)$.

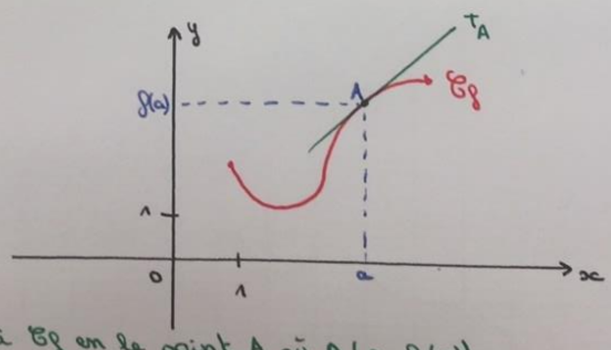
Donc, D_T a pour coefficient directeur $f'(a)$

Cela amène naturellement à poser la définition suivante :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in$I.
Si f est dérivable en a, on appelle tangente... à C_f en le point $A(a\,;f(a))$, la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur le nombre $f'(a)$.

Illustration :



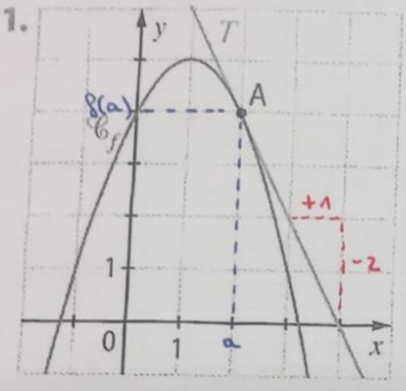
T_A : la tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point A où $A(a\,;f(a))$

Exercice 6

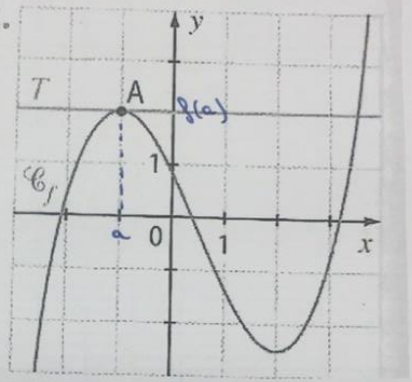
Sur chacun des deux graphiques suivants sont représentées la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable en a et sa tangente T au point d'abscisse a.

Dans chacun des cas, déterminer par lecture graphique les nombres a, $f(a)$ et $f'(a)$.

1.



2.



1. $a = 2$

$f(a) = 4$

$f'(a) = f'(2)$ = coeff. directeur de T.

$f'(2) = \frac{-2}{1} = -2$ (Méthode escalier)

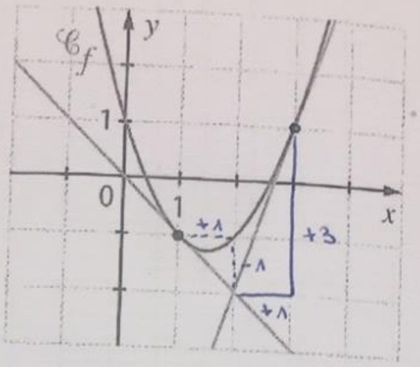
2. $a = -1$

$f(a) = 2$

$f'(a) = f'(-1) = 0$ car coeff. directeur droite horizontale $= 0$.

Exercice 7

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 3.



1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 1.

2. Déterminer graphiquement $f'(3)$.

1. $f'(1) = \frac{-1}{1} = -1$

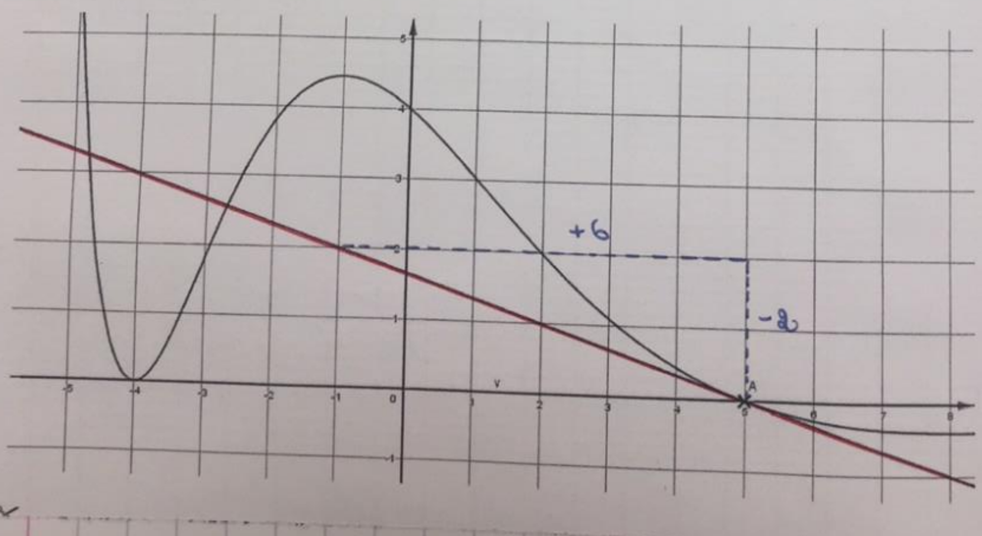
2. $f'(3) =$ coeff. directeur de la tangente T_3.

$f'(3) = \frac{3}{1} = 3$

Exercice 8

f est une fonction dérivable en chacun de ses points. La tangente en A à la courbe de f est tracée ci-dessous.

a) Déterminer *le nombre dérivé de f en 5.*
b) Déterminer les réels x en lesquels $f'(x) = 0$.
c) Quel est le signe de : $f'(2)$? Et celui de $f'(-3)$?



a) $f'(5)$ = coeff. directeur de la tangente Δ.

$f'(5) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$.

b) $f'(x)$ est le coeff. directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse.

$f'(x) = 0$ signifie qu'on cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale (càd parallèle à l'axe des abscisses).

$f'(x) = 0$ a pour sol° : $x = -4$ et $x = -1$

$\mathcal{S} = \{-4 ; -1\}$

c) $f'(2) < 0$
$f'(3) > 0$

Propriété : (équation de la tangente à une courbe).

Soit a un réel.

Si f est dérivable en a, alors la courbe C_f représentant f admet une tangente en $A(a\,;f(a))$ qui a pour équation réduite :

♥♥♥ $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$ ♥♥♥

♥♥ A savoir par cœur, vous vous en servirez le jour du bac ! ♥♥

Preuve :

Soit T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(a;f(a))$:

T_A a pour équation réduite : $y = mx + p$: avec m = coeff. direc. de T_A.

Or, f est dérivable en a, donc le c.d. de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est égal à $f'(a)$.

Donc $m = f'(a)$.

Par suite : T_A a pour équa° réduite :

$y = f'(a) \times x + p$

Enfin, T_A passe par le point $A(a;f(a))$.

Donc les coordonnées du point A vérifient l'équa° de la droite T_A à savoir :

$y_A = f'(a) \times x_A + p$

$f(a) = f'(a) \times a + p$

Donc $p = f(a) - f'(a) \times a$

Par suite T_A a pour équa° réduite :

$y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$

$y = f'(a) \times x - f'(a) \times a + f(a)$

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

On retiendra bien que $\boxed{\text{le coefficient directeur de cette tangente est } f'(a)}$.

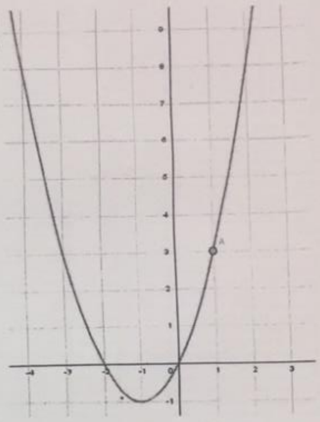
Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 2x$.

a) Vérifier que f est dérivable en $a = 1$ et que $f'(1) = 4$.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f en le point A d'abscisse $a = 1$.

c) Construire T dans le repère ci-contre :



a) Etape 1 : Pour $h \neq 0$,

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{ici avec } a = 1$$

$$t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$t(h) = \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h}$$

$$t(h) = \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h}$$

$$t(h) = \frac{h^2 + 4h}{h} = \frac{h(h+4)}{h} = h + 4$$

Etape 2 :

$$\lim_{h \to 0} t(h) = \lim_{h \to 0} (h+4) = 4$$

Or $4 \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a = 1$ et $f'(1) = 4$.

b) T_A a pour équa° réduite :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici : $a = 1$

Donc $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Or $f'(1) = 4$
et $f(1) = 3$, de sorte que $y = 4(x-1)+3$

$y = 4x - 4 + 3$
$y = 4x - 1$ ← équa° réduite de T_A

VI – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

A-Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en chacun des points de I.

Dans ce cas, on définit une nouvelle fonction, notée f', appelée la fonction dérivée de la fonction f.

$f' : I \to \mathbb{R}$

$x \to f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Le tableau suivant, fournit la liste des dérivées des principales fonctions usuelles.

Il est à mémoriser par cœur, vous en aurez besoin le jour du baccalauréat.

Fonction f	Ensemble de définition de f	Ensemble sur lequel f est dérivable	Fonction dérivée f'
Fonction constante : $f(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$.	$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.	$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Fonction carrée : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Cas particuliers importants :

L'identité définie sur ℝ par : $f(x) = x$ est dérivable sur ℝ et $f'(x) = 1$..

La fonction cube définie sur ℝ par : $f(x) = x^3$ est dérivable sur ℝ et $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Quelques justifications sur les résultats du tableau des dérivées usuelles :

Cas des fonctions affines : Déjà vu.

Remarque : une fonction constante est une fonction affine particulière (avec $a=0$), donc la première ligne du tableau est justifiée.

Exemple

Déterminer les dérivées de chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 12x + 1$ $\quad$ $g(x) = -x$.

$g'(x) = 12$ $\quad$ $g'(x) = -1$

Cas de la fonction carrée : vu à l'exemple 1 du paragraphe III !

Cas de la fonction inverse :

Soit a un réel non nul. Etablir que f est dérivable en a, et déterminer $f'(a)$ où f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit $a \neq 0$ et $h \neq 0$ tels que $a + h \neq 0$.

Alors $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = -\frac{h}{a(a+h)}$.

Ainsi, $r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$.

Par conséquent, $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = \lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a\times(a+0)} = -\frac{1}{a^2}$.

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$. Ainsi, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On admet les autres relations donnant les dérivées dont la démonstration dépasse le niveau de première.

**** : Montrons que la fonc° racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Démontrons (à titre culturel) que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

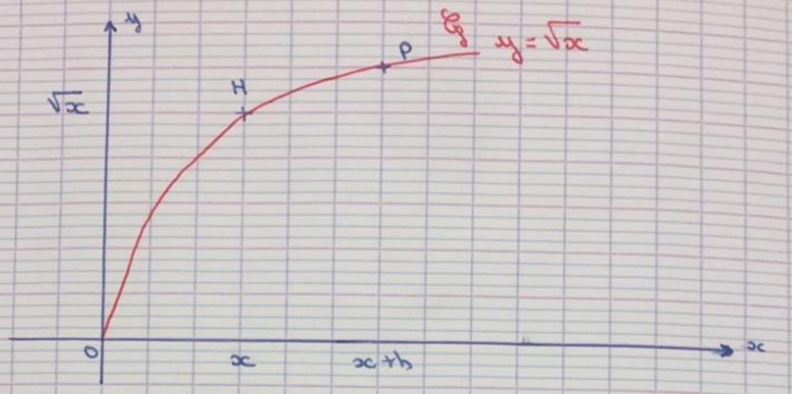
$f(x) = \sqrt{x}$ avec $x \geq 0$.

Soit h un réel strictement positif. Etudions la limite du taux d'accroissement $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 (en restant strictement positif) :

Or, ici, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

h	0,01	0,0001	0,000001	0,0000000001
$\frac{1}{\sqrt{h}}$	10	100	1000	100000

**** Suite : Soit $x > 0$ et h un réel non nul tel que :



Etape 1 : $t(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$t(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Astuce : la quantité conjuguée de $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ est $\sqrt{A} + \sqrt{B}$

Suite : astuce : on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par le conjugué du numérateur.

$$t(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$t(h) = \frac{(\sqrt{x+h})^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$t(h) = \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$t(h) = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Etape 2 : $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ce tableau devrait légitimement vous convaincre que lorsque h se rapproche de 0, la quantité $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient *"de plus en plus grande"*, et finit par être supérieure à n'importe quel réel arbitrairement fixé, bref que :

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

Concrètement, la sécante (OM) où $O(0\,;\,0)$ et $M(h\,;\,\sqrt{h})$ tend à devenir verticale lorsque h se rapproche de 0 (et on rappelle qu'une droite verticale n'admet pas de coefficient directeur).

Exercice 10

a) Rappeler la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

b) Déterminer s'il existe une tangente à la courbe représentative de la fonction f qui est parallèle à la droite D d'équation réduite : $y = -x + 5$.

c) Même question avec la droite Δ d'équation réduite : $y = 12x + 3$. Préciser les coordonnées des points de contact entre la tangente et la courbe représentant f.

a) $f(x) = x^3$ Donc $f'(x) = 3x^2$

b) Rappel : Au point A d'abscisse x de $\mathcal{C}_f$, la tangente à cette courbe a pour c.d. : $f'(x)$.

De plus, on veut que T_A et $\mathcal{D}$ soient parallèles.

Donc T_A et D doivent avoir le m̂ c.d.

Or le c.d. de $\mathcal{D}$ est égal à -1.

$T_A \parallel \mathcal{D}$ équivaut à : $f'(x) = -1$.

Or par la q. a) : $f'(x) = 3x^2$

Donc $f'(x) = -1$ équivaut à : $3x^2 = -1$: cette équa° n'a pas de sol° réelle car pr tt réel x, $x^2 \geq 0$, donc $3x^2 \geq 0$. $\mathcal{S} = \emptyset$

Il n'existe donc aucune tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à $\mathcal{D}$.

c) Par le m̂ raisonnement, on cherche s'il existe des réels x tels que : $f'(x) = 12$

càd : $3x^2 = 12$

$x^2 = 4$.

Donc $x = -\sqrt{4} = -2$ ou $x = \sqrt{4} = 2$

$S = \{-2 ; 2\}$

En les points $A(-2 ; (-2)^3)$ et $B(2 ; 2^3)$.
C_f admet des tangentes parallèles à Δ.

$A(-2 ; 8)$; $B(2 ; 8)$.

B – Dérivation et opérations algébriques

Définition de la somme de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I.
La somme des fonctions u et v est la fonction notée $u + v$, définie sur I par : Pr tt réel $x \in I$:……

$(u+v)(x) = u(x) + v(x)$

Exemple

Déterminer la somme des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x + 3$.

Pour tout réel x : $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = x^2 + 2x + 3$.

La notion de somme de fonctions s'étend naturellement à plus de deux fonctions.

Par exemple, la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^3 + x^2 + \sqrt{x}$ est la somme de trois fonctions !

1) Dérivée de la somme de deux fonctions

Si u et v sont dérivables sur I, alors la fonction $u + v$ est dérivable sur I, et on a : ♥♥ $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$ ♥♥.
On admet cette relation.

On retiendra donc que **la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées** et que cette relation se généralise à plus de deux fonctions.

Soit $a \in I$, $h \neq 0$.

On veut prouver que $u+v$ est dérivable en a :

Donc on forme $t(h)$:

$$t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) + v(a+h) - (u(a) + v(a))}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) - v(a) + v(a+h) - v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Or u est dérivable en a, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

De m̂, v est dérivable en a, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

Par suite : $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$

Donc $u+v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$.

__Exemple__

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes définie par :

$f(x) = x^2 + 5x$; $g(x) = x^3 + x - 3$; $h(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ où $x \neq 0$.

• Calculer : $f(x) = x^2 + 5x = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$.
$v(x) = 5x$ donc $v'(x) = 5$.

Donc $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f'(x) = 2x + 5$.

- $g(x) = x^3 + x - 3 = u(x) + v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ u'(x) = 3x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x - 3 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$g'(x) = u'(x) + v'(x) = 3x^2 + 1$

- $h(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x} = x^2 + (-3x) + \frac{1}{x} = u(x) + v(x) + w(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = -3x \\ v'(x) = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} w(x) = \frac{1}{x} \\ w'(x) = \frac{-1}{x^2} \end{cases}$

Donc $h'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x)$

$h'(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x^2}$

Définition du produit d'une fonction par un réel

Soit u une fonction *définie sur un intervalle I et k un nombre réel.*

Le produit du réel k et de la fonction u est la fonction notée ku et définie sur I par : Pr. tt. réel $x \in I$:

$(ku)(x) = k \times u(x)$

Exemple

Déterminer $2u$ puis $-u$ où u est définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 + 5x + 2$.

Pour tt réel x : $(2u)(x) = 2 \times u(x) = 2(x^2 + 5x + 2) = 2x^2 + 10x + 4$.

$(-u)(x) = -1 \times u(x) = -1(x^2 + 5x + 2 = -x^2 - 5x - 2$.

1) Dérivée du produit d'un réel par une fonction

Si u est dérivable sur I, alors, pour tout **réel k**, la fonction ku est dérivable sur I, et on a :

♥♥♥ $\boxed{(ku)' = k \times u'}$ ♥

On retiendra que pour dériver un "multiple" d'une fonction donnée, on dérive la fonction donnée, et on multiplie le résultat obtenu par ce multiple.

Preuve : Soit $a \in I$, et $h \neq 0$:

$$t(h) = \frac{(ku)(a+h) - (ku)(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{k \times u(a+h) - k \times u(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{k\,(u(a+h) - u(a))}{h} = k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Or u est dérivable en a donc, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

Par suite, $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = k \times u'(a)$

Donc ku est dérivable en a, et $(ku)'(a) = k \times u'(a)$.

Exemple

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = 5x^2 = 5 \times x^2 = 5 \times u(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ Donc $f'(x) = 5 \times u'(x) = 5 \times 2x = 10x$.

$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3} \times x^3 = -\frac{1}{3} \times u(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 \\ u'(x) = 3x^2 \end{cases}$ Donc $g'(x) = -\frac{1}{3} \times u'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2$

$g'(x) = -x^2$

$h(x) = 5x^3 + 4x^2 + 6x + 1$

La courbe représentative de la fonction h admet-elle des tangentes horizontales ? Justifier.

$i(x) = -3x^2 - 5x + 11.$

$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

- $h(x) = 5x^3 + 4x^2 + 6x + 1 = u(x) + v(x) + w(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 5x^3 \\ u'(x) = 15x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 4x^2 \\ v'(x) = 8x \end{cases}$ $\begin{cases} w(x) = 6x + 1 \\ w'(x) = 6 \end{cases}$

Donc $h'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x)$
$h'(x) = 15x^2 + 8x + 6$

- On résout l'équation : $h'(x) = 0$ pour savoir si $\mathcal{C}_h$ admet des tangentes horizontales.

$h'(x) = 0 \iff 15x^2 + 8x + 6 = 0$: de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 15$, $b = 8$, $c = 6$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 15 \times 6 = 64 - 360 = -296$.
$\Delta < 0$, donc $S = \emptyset$

$\mathcal{C}_h$ n'admet aucune tangente horizontale.

- $i(x) = -3x^2 - 5x + 11 = u(x) + v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = -3x^2 \\ u'(x) = -6x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = -5x + 11 \\ v'(x) = -5 \end{cases}$

Donc $i'(x) = u'(x) + v'(x) = -6x - 5$

- $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{x} = k \times u(x)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$
$u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc $j'(x) = k \times u'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4\sqrt{x}}$

Définition du produit de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions définies sur un même intervalle I.
Le produit des fonctions u et v est la fonction notée uv, définie sur I par : Pour tt réel $x \in I$:
$(uv)(x) = u(x) \times v(x)$

Exemple

Déterminer uv lorsque u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 3x$ et $v(x) = 5x - 1$.
Pr tt réel x :
$(uv)(x) = u(x) \times v(x) = 3x(5x-1) = 15x^2 - 3x$.

3) Dérivée d'un produit de fonctions

Si u et v sont dérivables sur I, alors la fonction uv est dérivable sur I, et on a : ♥♥♥ $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$ ♥♥♥

En particulier, lorsque $u = v$, on a : ♥♥♥ $\boxed{(u^2)' = 2u'u}$ ♥♥♥

Démonstration donnée à titre indicatif

Calculons le taux de variation de $(uv)(x) = u(x)v(x)$, pour $h \neq 0$:

$$t(h) = \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme : $u(x)v(x+h)$

$$\begin{aligned} t(h) = &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{v(x+h)\,[u(x+h) - u(x)] + u(x)\,[v(x+h) - v(x)]}{h} \\ &= v(x+h) \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

factorisation

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} t(h) &= \lim_{h\to 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[v(x+h) \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h\to 0} v(x+h) \times \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} u(x) \times \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= v(x)\,u'(x) + u(x)\,v'(x) \end{aligned}$$

La dérivée du produit : $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

***Pour la seconde relation** : preuve :* $(uv)' = u'v + uv'$

Si $u = v$, alors $u' = v'$, donc : $(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u$ car $u'u = uu'$

Attention : *la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées* (erreur classique).

Exercice 11

a) Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$.

b) Même question avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (5x^2 - 7x + 1)^2$

c) Même question avec la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = x^3\sqrt{x}$.

a) $f(x) = (2x+1)\sqrt{x}$

f se présente sous la forme d'un produit.

$f(x) = u(x) \times v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \sqrt{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$f'(x) = 2 \times \sqrt{x} + (2x+1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{x}}$

b) $g(x) = (5x^2 - 7x + 1)^2 = (u(x))^2$

avec : $\begin{cases} u(x) = 5x^2 - 7x + 1 \\ u'(x) = 10x - 7 \end{cases}$

Donc $g'(x) = 2(10x-7)(5x^2 - 7x + 1)$

c) $x > 0$ et $h(x) = x^3\sqrt{x} = u(x) \times v(x)$

avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 3x^2$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Par suite : $h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$h'(x) = 3x^2 \times \sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = 3x^2 \times \sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{3x^2 \times \sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

$\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$

$$h'(x) = \frac{6x^3 + x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{7x^3 \times \sqrt{x}}{2x}$$

$$h'(x) = \frac{7x^2\sqrt{x}}{2}.$$

Définition de l'inverse d'une fonction

Soit v une fonction définie sur un intervalle I, qui ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire que pour tout réel $x \in I$, $v(x) \neq 0$).

La fonction inverse de v, notée $\frac{1}{v}$ est définie sur I par : Pr tt réel $x \in I$, $\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)}$

__Exemple__ : Justifier que la fonction v définie par : $v(x) = x^2+x+2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puis déterminer l'expression de $\frac{1}{v}$.

$x \in \mathbb{R}$ et $v(x) = x^2 + x + 2$

Résolvons l'équation : $v(x) = 0$, à savoir :

$x^2 + x + 2 = 0$ avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$.

$-7 < 0$ donc $\Delta < 0$ donc $S = \emptyset$.

Donc v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Par suite : Pr tt réel x :

$$\left(\frac{1}{v}\right)(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{x^2+x+2}.$$

4) Dérivée de l'inverse d'une fonction

Si v est dérivable sur I, et si de plus v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I, et

on a : ♥♥♥ $\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$ ♥♥♥

Preuve :

$\underbrace{v \times \frac{1}{v}}_{\text{produit}} = 1$, donc en dérivant ce produit : $\left(v \times \frac{1}{v}\right)' = 0$ car si $f=g$ sur I, alors $f'=g'$ sur I.

Donc : $v' \times \frac{1}{v} + v \times \left(\frac{1}{v}\right)' = 0$

Donc : $v \times \left(\frac{1}{v}\right)' = 0 - v' \times \frac{1}{v} = \frac{-v'}{v}$

Donc $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{\frac{-v'}{v}}{v} = \frac{-v'}{v} \times \frac{1}{v} = \frac{-v'}{v^2}$.

Exercice 12

1) f est définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2x^2+x}$.

Calculer $f'(x)$.

2) Même question avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x^3}$

3) Même question avec la fonction h définie sur $]\,0\,;+\infty[$ par : $h(x) = 4x^2 + 3x + \frac{5}{x^2}$.

1) $x \geqslant 1$: $f(x) = \frac{1}{2x^2+x} = \frac{1}{v(x)}$

avec $\begin{cases} v(x) = 2x^2+x \\ v'(x) = 4x+1 \end{cases}$

Donc : $f'(x) = \frac{-v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-(4x+1)}{(2x^2+x)^2} = \frac{-4x-1}{(2x^2+x)^2}$

2) $x \neq 0$: $g(x) = \frac{1}{x^3} = \frac{1}{v(x)}$ avec $\begin{cases} v(x) = x^3 \\ v'(x) = 3x^2 \end{cases}$

Donc : $g'(x) = \frac{-v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4}$.

3) $x > 0$, $h(x) = 4x^2 + 3x + \frac{5}{x^2} = 4x^2 + 3x + 5 \times \frac{1}{x^2}$

$h(x) = 4x^2 + 3x + 5 \times \frac{1}{v(x)}$ avec $\begin{cases} v(x) = x^2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Donc $h'(x) = 8x + 3 + 5 \times \frac{(-v'(x))}{v^2(x)}$

$h'(x) = 8x + 3 - 5 \times \frac{2x}{x^4} = 8x + 3 - \frac{10x}{x^4}$

$h'(x) = 8x + 3 - \frac{10}{x^3} = \frac{8x^4}{x^3} + \frac{3x^3}{x^3} - \frac{10}{x^3}$

$h'(x) = \frac{8x^4 + 3x^3 - 10}{x^3}$

Définition du quotient de deux fonctions

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I, telles que v ne s'annule pas sur I.

La fonction quotient de u par v, notée $\frac{u}{v}$ est définie sur I par : Pr tt réel $x \in I$, $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Exemple : u et v sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Déterminer l'expression de la fonction $\frac{u}{v}$.

$v(x) > 0$ donc $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{2x+1}{x^2+1}$.

5) Dérivée d'un quotient de fonctions.

Si u et v sont dérivables sur I, et si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et on a :

$$\boxed{♥♥♥ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad ♥♥♥}$$

Preuve :

Rq : ⚠ $u'v - uv' \neq uv' - u'v$

L'ordre de la soustraction est capital.

Preuve : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$

Donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{1}{v}\right)'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \times \frac{(-v')}{v^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 13

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+1}{x+4}$

Déterminer son ensemble de définition, puis justifier que f est dérivable sur ce dernier, puis calculer $f'(x)$.

2) g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x^2+x+3}$. Calculer la dérivée de g.

3) h est définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. Calculer $h'(x)$.

1) $f(x) = \frac{3x+1}{x+4}$

$x+4 \neq 0$ pour pouvoir calculer $f'(x)$, càd : $x \neq 4$

Par suite, l'ensemble de défini° de f est :

$D_f = \mathbb{R} - \{-4\}$ ou encore : $D_f =]-\infty;-4[\cup]-4;+\infty[$.

Ici, u définie par $u(x) = 3x+1$ est dérivable sur D_f

De m̂, v définie par $v(x) = x+4$ est dérivable sur D_f,

et v ne s'annule pas sur D_f.

Donc par R. f est dérivable sur D_f.

Enfin : $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+1 \\ u'(x) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x+4 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+1)1}{(x+4)^2} = \frac{3x+12-3x-1}{(x+4)^2} = \frac{11}{(x+4)^2}.$$

2) $g(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x^2+x+3} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = -3x^2+5x+1 \\ u'(x) = -6x+5 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x^2+x+3 \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases}$

Donc $g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$g'(x) = \frac{(-6x+5)(x^2+x+3) - (-3x^2+5x+1)(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-6x^3-6x^2-18x+5x^2+5x+15-(-6x^3-3x^2+10x+5x+2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\cancel{-6x^3}-6x^2-18x+5x^2+\cancel{5x}+15+\cancel{6x^3}+3x^2-10x^2-\cancel{5x}-2x-1}{(x^2+x+3)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-8x^2-20x+14}{(x^2+x+3)^2}$$

3) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ avec $x > 0$.

$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x+1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

Donc : $h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{\frac{-x+1}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2}$$

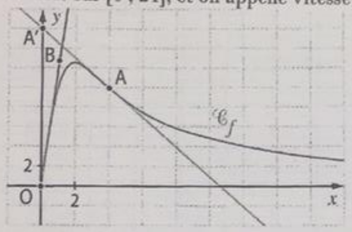
$$h'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}$$

Exercice 14 On administre un médicament par injection intraveineuse.

On note $f(t)$ la quantité de produit (en milligrammes) présente dans le sang t heures après l'intraveineuse, t appartenant à l'intervalle $[0 ; 24]$.

$v(t)$

On admet que f est dérivable sur $[0 ; 24]$, et on appelle vitesse de diffusion du produit à l'instant t le nombre $f'(t)$.



1. Déterminer graphiquement la vitesse de diffusion du produit à $t = 4$.
2. On admet que pour tout $t \in [0 ; 24]$:

$$f(t) = \frac{50t}{t^2 + 4}.$$

a. Retrouver par le calcul la réponse apportée à la question 1..
b. Calculer la vitesse initiale de diffusion du produit.

1. $v(t) = f'(t)$

Ici on cherche : $v(4) = f'(4)$ = pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 (A).

$$v(4) = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}.$$

2.a. $f(t) = \dfrac{50t}{t^2+4}$ avec $0 \leq t \leq 24$.

$f(t) = \dfrac{u(t)}{v(t)}$ avec $\begin{cases} u(t) = 50t \\ u'(t) = 50 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) = t^2 + 4 \\ v'(t) = 2t \end{cases}$

Donc $f'(t) = \dfrac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v^2(t)}$

$f'(t) = \dfrac{50(t^2+4) - 50t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \dfrac{50t^2 + 200 - 100t^2}{(t^2+4)^2}$

$f'(t) = \dfrac{-50t^2 + 200}{(t^2+4)^2}$ *

Donc pour $t = 4$: $f'(4) = \dfrac{-50 \times 4^2 + 200}{(4^2+4)^2} = \dfrac{-600}{400} = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2}$.

b. Initialement : $t = 0$

On cherche ici : $f'(0)$

D'après * avec $t = 0$; $f'(0) = \dfrac{200}{4^2} = \dfrac{200}{16} = 12,5$ mg.h^{-1}

6) Dérivée de fonctions composées

Soient a et b deux réels et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = g(ax+b)$.

On dit que f est la composée de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ par g.

Exemple

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+5)^3 = X^3$ où $X = 2x+5$

On a : $f(x) = g(2x+5)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(X) = X^3$

Propriété *(admise)*

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = g(ax+b)$.

Si g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Retenir : on dérive le contenu de la parenthèse que l'on multiplie par la dérivée de g appliquée au contenu de cette parenthèse.

Exemples

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-des

a) $f(x) = (2x+5)^3$.

b) $m(x) = \sqrt{-3x+9}$ pour $x < 3$.

a) $f(x) = (2x+5)^3 = g(2x+5)$ où $\begin{cases} g(X) = X^3 \\ g'(X) = 3X^2 \end{cases}$

Donc $f'(x) = 2g'(2x+5)$

$f'(x) = 2 \times 3 \times (2x+5)^2 = 6(2x+5)^2$

b) $m(x) = \sqrt{-3x+9}$ avec $x < 3$.

$m(x) = g(-3x+9)$ où $\begin{cases} g(X) = \sqrt{X} \\ g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}} \end{cases}$

Donc : $m'(x) = -3g'(-3x+9)$

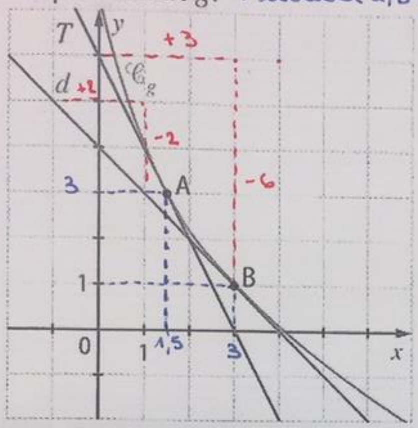
$m'(x) = -3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{-3x+9}} = \dfrac{-3}{2\sqrt{-3x+9}}$

Exercices de synthèse

I-

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{a}{x}+bx+c$, où a, b et c sont trois réels. La courbe de g et deux de ses tangentes sont tracées ci-dessous.

Déterminer l'expression de g. → trouver a, b et c



$A(1{,}5\,;3)\in\mathscr{C}_g$ donc : $g(1{,}5)=3$.

Donc : $\dfrac{a}{1{,}5}+b\times 1{,}5+c=3$

Or $1{,}5=\dfrac{3}{2}$, donc : $\dfrac{a}{\frac{3}{2}}+b\times\dfrac{3}{2}+c=3$

$\dfrac{2}{3}a+\dfrac{3}{2}b+c=3$

$B(3\,;1)\in\mathscr{C}_g$ donc : $g(3)=1$.

Donc : $\dfrac{a}{3}+3b+c=1$ ***

d est tangente en $B(3\,;1)$ à $\mathscr{C}_g$:
donc : le c.d. de d est égal à $g'(3)$.
Or par lecture graphique, le c.d. de d est m avec $m=\dfrac{-2}{2}=-1$.

Donc $g'(3)=-1$.

Or $g(x) = \frac{a}{x} + bx + c$

Donc $g'(x) = a \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) + b$

$$g'(x) = \frac{-a}{x^2} + b$$

Par suite : $g'(3) = -1 \Longleftrightarrow \frac{-a}{3^2} + b = -1.$

$$g'(3) = -1 \Longleftrightarrow \frac{-a}{9} + b = -1. \ *$$

T est tangente en $A\left(\frac{3}{2} ; 3\right)$ à $\mathcal{C}_g$ donc :

$g'\left(\frac{3}{2}\right) = $ c.d. de $T = \frac{-6}{3} = -2.$

$g'\left(\frac{3}{2}\right) = -2.$ Donc : $\frac{-a}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + b = -2.$

$$\frac{-a}{\frac{9}{4}} + b = -2.$$

$$\frac{-4}{9}a + b = -2. \ **$$

$*$ et $**$: $\begin{cases} \frac{-a}{9} + b = -1 \\ \frac{-4}{9}a + b = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -1 + \frac{a}{9} \\ \frac{-4}{9}a + (-1) + \frac{a}{9} = -2 \end{cases} \cancel{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \frac{-3a}{9} = -2 + 1 = -1 \\ b = -1 + \frac{a}{9} \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{-a}{3} = -1 \\ b = -1 + \frac{a}{9} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 + \frac{3}{9} = -1 + \frac{1}{3} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Ainsi : $a = 3$; $b = \frac{-2}{3}$

Grâce à $***$ et au fait que $a = 3$ et $b = \frac{-2}{3}$, on peu dire que :

$\frac{3}{3} + 3 \times \left(\frac{-2}{3}\right) + c = 1.$

$1 - 2 + c = 1$

$-1 + c = 1$

$\therefore c = 2$ $\therefore$ Conclusion : $g(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{3}x + 2.$

II-

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -1.

a) Justifier que T a pour équation réduite : $y = 3x+2$.

b)

. Faire une conjecture sur la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

c)

d) Vérifier que, pour tout réel x, $x^3 - (3x+2) = (x-2)(x+1)^2$.

Montrer que la tangente T recoupe la courbe $\mathscr{C}$ en un point B dont on déterminera les coordonnées.

e) Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.

a) T est la tangente à $\mathscr{C}$ en le point A d'abscisse $a = -1$.

T a pour équation réduite :

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

Or $f(x) = x^3$

Donc $f'(x) = 3x^2$, donc $f(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$.

Par suite : $y = 3(x+1) + (-1)$

$y = 3x + 3 - 1$

$y = 3x + 2$.

b) Il semblerait que : T soit située au-dessus de $\mathscr{C}$, et, T et $\mathscr{C}$ ont pour unique point commun $A(-1;-1)$.

c) $x^3 - (3x+2) = x^3 - 3x - 2$.

et $(x-2)(x+1)^2 = (x-2)(x^2+2x+1) = x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2$

$(x-2)(x+1)^2 = x^3 - 3x - 2$.

Donc pr tt réel x : $x^3 - (3x+2) = (x-2)(x+1)^2$.

d) Posons $g(x) = 3x + 2$: $\mathscr{C}_g \rightarrow T$

$f(x) = x^3$: $\mathscr{C}_f \rightarrow \mathscr{C}$

$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x^3 = 3x + 2 \Longleftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0.$

$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x^3 - (3x+2) = 0$ d'après q.c

$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0$ (= produit nul)

$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow x - 2 = 0$ ou $(x+1)^2 = 0$

$x = 2$ ou $x + 1 = 0$

$x = 2$ ou $x = -1$

$$\mathscr{S} = \{-1 ; 2\}.$$

T et $\mathscr{C}$ se coupent en les points A et B d'abscisses respectives -1 et

Par suite $B(2 ; f(2))$ avec $f(2) = 2^3 = 8$.

$B(2 ; 8)$.

e) Étudions algébriquement le signe de $f(x) - g(x)$.

- Si $f(x) - g(x) > 0$, alors $f(x) > g(x)$
  donc $\mathscr{C}_f$ au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
- Si $f(x) - g(x) < 0$, alors $\mathscr{C}_f$ au-dessous de $\mathscr{C}_g$.
- Si $f(x) - g(x) = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse x.

Ici : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x + 2$

Donc : $f(x) - g(x) = x^3 - (3x+2) \overset{q.b}{=} (x-2)(x+1)^2$

Donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : Sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;-2[$,
$f(x)-g(x)<0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g = T$ sur ces deux intervalles.
Sur $]2;+\infty[$, $f(x)-g(x)>0$, donc $f(x)>g(x)$
donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T sur $]2;+\infty[$.
T et $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection A et B.

⚠ Notre conjecture était fausse !

III-

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$.

a) Déterminer si la courbe représentant *f* admet des tangentes horizontales.

b) Démontrer que la courbe représentative de *f* admet deux tangentes parallèles à la droite *(d)* d'équation $y=5x+4$. Préciser les abscisses de ces points.

a) Résolvons l'équation : $f'(x) = 0$:
Or, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 5$.
Donc $f'(x) \Leftrightarrow 3x^2+6x+5=0$ $(a=3 ; b=6$ et $c=5)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24$.
$-24 < 0$, donc $\Delta < 0$, donc pas de solu° à l'équa°.

Donc : $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune tangente horizontale.

b) (d) a pour c.d. : $m = 5$.
Donc chercher les tangentes parallèles à (d) revient à résoudre :
$f'(x) = 5$
Or $f'(x) = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$
$f'(x) = 5 \Leftrightarrow x(3x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $3x + 6 = 0$
$x = 0$ ou $x = -2$
$\mathcal{S} = \{0 ; -2\}$

En les points $A(-2 ; f(-2))$ et $B(0 ; f(0))$, $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à (d). $A(-2 ; -5)$ et $B(0 ; 1)$

IV-

Problème ouvert

On considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation : $y = x^2$, courbe représentative de la fonction carrée.
Soit $M(\alpha \; ; \; \beta)$ un point fixé du plan.

Déterminer le nombre de tangentes à cette parabole $\mathscr{P}$ passant par le point M.

→ voir DM n° 7