

**Chapitre III****La dérivation****I-Rappels sur les équations de droites**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 1$ .

a) Comment s'appelle la fonction  $f$ ? Que peut-on dire de sa courbe représentative ?

b) Construire cette dernière dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

**Remarque** : la courbe tracée a pour équation : .....

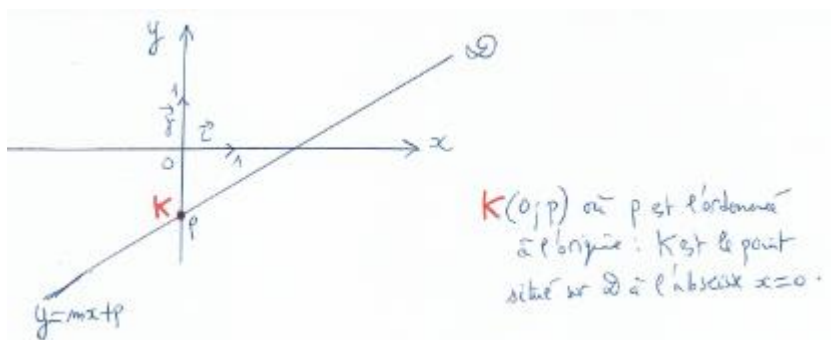
**Propriété**

Toute droite  $\mathcal{D}$ , non parallèle à l'axe des ordonnées, admet pour équation réduite :

$$y = \dots\dots\dots$$

$m$  est appelé le coefficient directeur de la droite  $\mathcal{D}$  (ou encore la pente de la droite).

$p$  est appelé l'ordonnée à l'origine : c'est l'ordonnée du point de la droite  $\mathcal{D}$  dont l'abscisse est nulle.

**Illustration**

💡💡 On parle de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine uniquement pour des droites non parallèles à l'axe des ordonnées. Les droites verticales (= parallèles à l'axe des ordonnées) n'ont ni coefficient directeur, ni d'ordonnée à l'origine !

Rappelons comment se calcule le coefficient directeur d'une droite non verticale :

**Propriété clé (comment se calcule le coefficient directeur)**

Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation réduite :  $y = mx + p$ .

Soient  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points **distincts** appartenant à  $\mathcal{D}$ .

Alors ♥♥♥  $m = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$  ♥♥♥

**Exemple**

Calculer le coefficient directeur des droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sachant que :

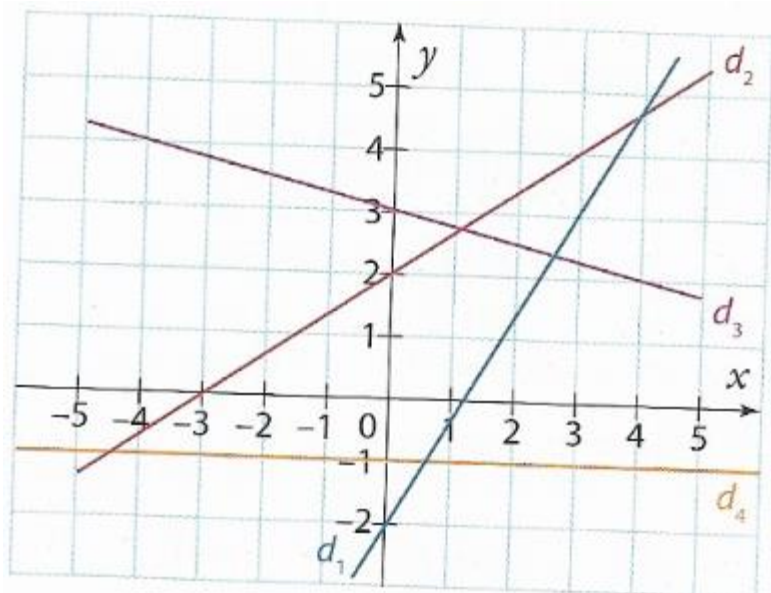
$A(5 ; 2)$ ,  $B(-3 ; 1)$ ,  $C(\frac{1}{2} ; \frac{3}{4})$  et  $D(-1 ; \frac{1}{2})$ .

**Remarque** : lorsqu'on demande de donner l'équation réduite d'une droite, il faut trouver la valeur de  $m$  et celle de  $p$  puis écrire l'équation réduite sous la forme :  $y = mx + p$ .

### **Exercice 1**

Déterminer le coefficient directeur, puis l'ordonnée à l'origine de chacune des droites tracées.

En déduire l'équation réduite de chacune des droites ci-dessous :



✂-----

### **Remarques fondamentales**

- **Les droites parallèles à l'axe des abscisses (appelées droites horizontales) ont toutes pour coefficient directeur .....**
- **Les droites "ascendantes" ont toujours un coefficient directeur.....**
- **Les droites "descendantes" ont toujours un coefficient directeur.....**

Il arrive que parfois, on ne puisse pas lire graphiquement l'équation réduite d'une droite.

### **Exercice 2**

1) Déterminer l'équation réduite de la droite  $(AB)$ , où  $A(4 ; 5)$  et  $B(1 ; 7)$ .

2) Le point  $L(8 ; 5)$  appartient-il à la droite  $(AB)$ ?

✂-----

### **Exercice 3**

Construire dans un repère orthonormé la droite  $\mathcal{D}$  dont une équation est :  $3x + 2y - 8 = 0$ .

### **Propriété**

**Deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.**

**Exercice 4**

Déterminer l'équation réduite de la droite  $\mathcal{D}'$  passant par  $A(2 ; 15)$  et parallèle à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation réduite :  $y = -6x + 2022$ .

✂ -----

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + x + 1$ .

a) Déterminer les coordonnées du point  $A$  situé sur  $C_f$  et ayant pour abscisse 1.

b) Soit  $h$  un réel non nul et  $B$  le point de  $C_f$  ayant pour abscisse  $1+h$ .  
Exprimer en fonction de  $h$  le coefficient directeur de la droite  $(AB)$ .

c) En déduire les coordonnées du point  $B$  situé sur  $C_f$  pour lequel la droite  $(AB)$  est parallèle à l'axe des abscisses.

✂ -----

**II – La notion de limite**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2$

Comment se comporte  $f$  au voisinage de 0 ? C'est-à-dire, lorsque  $x$  est très proche de 0, de quel réel est proche  $f(x)$  ?

**Notation :**

- Pour dire que  $x$  tend vers 0 (si vous préférez,  $x$  se rapproche de 0, sans jamais valoir 0), on notera  $x \rightarrow 0$ .
- Pour dire que les valeurs prises par  $f$  sont proches de 0 lorsque  $x$  tend vers 0, on adoptera l'écriture classique suivante :

**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 3$ .

Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

$g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^2 + 6$ . Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

### III – Dérivation

Définition : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a \in I$ , et  $h$  un réel non nul tel que  $a + h \in I$ .

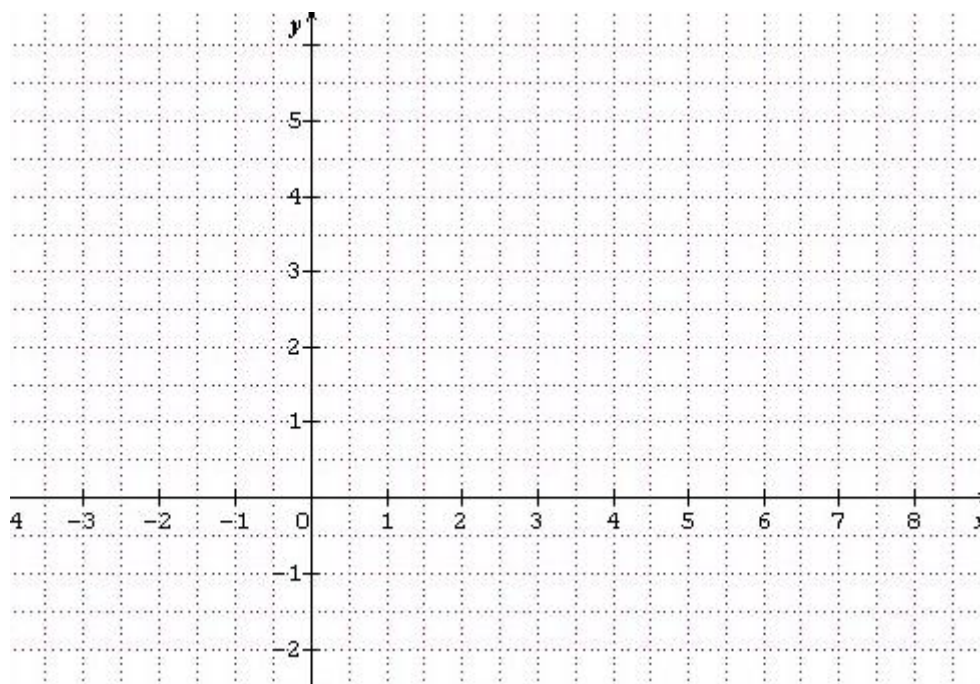
On appelle taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$ , le réel noté  $t(h)$  défini par :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\text{différence des images}}{\text{différence des abscisses}} \quad (\text{calculées dans le même ordre}).$$

Soit  $A(a; f(a))$ , et  $M(a + h; f(a + h))$  deux points appartenant à la courbe représentative de la fonction  $f$ . Placer ces deux points dans le repère suivant :

Concrètement, que représente le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  ?

Illustration graphique :



$t(h)$  n'est autre que.....

Exemple

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + x$ .

Calculer le taux de variation de  $f$  entre 3 et  $3 + h$  sous forme simplifiée où  $h$  est un réel non nul.

Définition 2

Une fonction  $f$  est **dite dérivable en  $a \in I$**  si le taux de variation  $t(h)$  de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  admet une **limite finie** lorsque  $h$  tend vers 0.

$f$  est dérivable en  $a \in I \Leftrightarrow$  il existe un réel  $\ell$  tel que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$ .

On adoptera la **notation suivante** : le réel  $\ell = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  est noté  $f'(a)$  [lire *f prime* de  $a$ ], on l'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

Donc on a (à bien retenir) :

♥♥♥  $f'(a) := \dots\dots\dots$  ♥♥♥

Méthode pour démontrer qu'une fonction est dérivable en un réel  $a$  :

**Etape 1** : .....

**Etape 2** : .....

Exemple 1 : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2$ .

a) Montrer que  $f$  est dérivable en  $a = 1$ , et déterminer la valeur de  $f'(1)$ .

b) Essayer de généraliser ce résultat en un réel  $a$  quelconque.

✂-----

Exemple 2 : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Montrer que  $f$  est dérivable en  $a = 2$ , et calculer  $f'(2)$ .

Généraliser ce résultat à un réel  $a$  quelconque non nul : démontrer que  $f$  est dérivable en  $a$  et donner l'expression de  $f'(a)$ .

✂-----

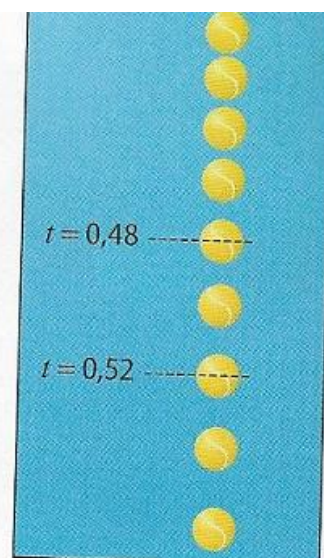
#### IV- Approche cinématique du nombre dérivé

### Une balle en chute libre

On a photographié, à intervalles de temps réguliers 0,02 seconde, la chute d'une balle de tennis. Le tableau ci-dessous fournit le relevé des mesures effectuées :  $d(t)$  est la distance (arrondie à 0,01 mètre) parcourue par la balle,  $t$  secondes après l'avoir lâchée.

|        |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| $t$    | 0,44 | 0,46 | 0,48 | 0,5  | 0,52 | 0,54 | 0,56 |
| $d(t)$ | 0,95 | 1,04 | 1,13 | 1,23 | 1,32 | 1,43 | 1,54 |

La vitesse moyenne de la balle est égale au quotient de la distance parcourue par le temps écoulé.



**1** Montrer que la vitesse moyenne de la balle entre 0,5 s et 0,54 s est égale à  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2** On admet que la distance  $d(t)$  parcourue par la balle en fonction du temps  $t$  écoulé depuis le lâcher s'exprime par la formule  $d(t) = 4,9t^2$ .

Soit  $r$  la fonction définie pour tout réel  $h$  non nul par  $r(h) = \frac{d(0,5 + h) - d(0,5)}{h}$ .

a. Montrer que  $r(h) = 4,9h + 4,9$ .

b. Calculer  $r(0,1)$  puis interpréter le résultat en termes de vitesse.

c. Calculer  $r(0,01)$  puis  $r(0,001)$ . On arrondira si nécessaire les résultats à 0,001.

Quel constat fait-on concernant la vitesse moyenne de la balle entre les instants 0,5s et  $0,5 + h$  s lorsque  $h$  tend vers 0 ?

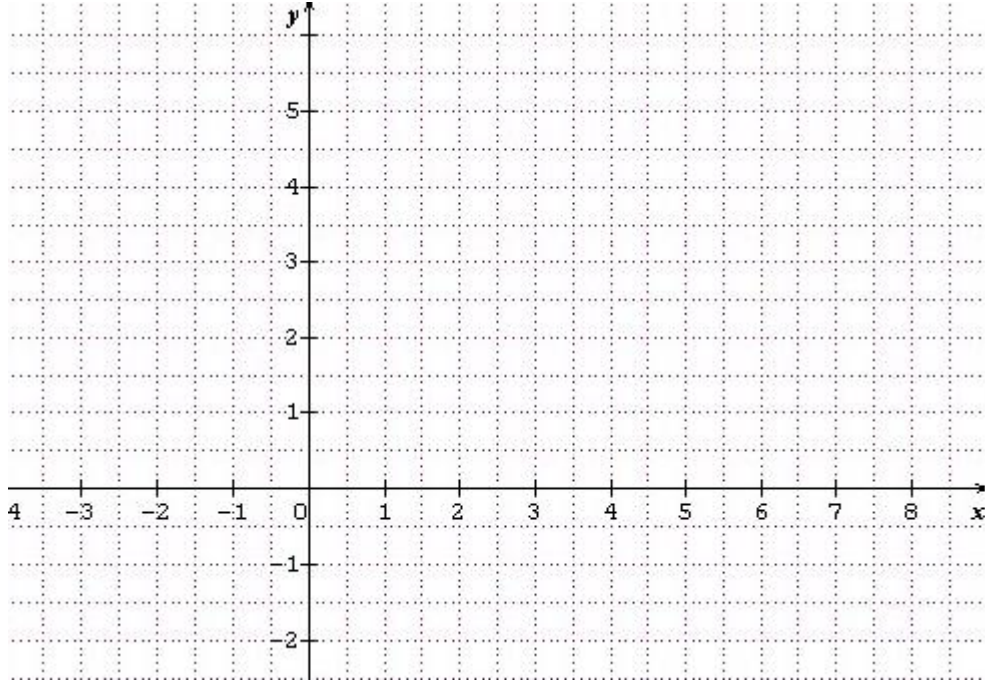
Ce nombre est appelé **nombre dérivé de  $d$  en 0,5** et on le note  $d'(0,5)$ . Ainsi,  $d'(0,5) = 4,9$ . Cette valeur limite 4,9 est la **vitesse instantanée** en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  de la balle à l'instant  $t = 0,5$ .

### V – Interprétation géométrique du nombre dérivé d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , et dérivable en  $a \in I$  ; soit  $C_f$  la courbe représentant la fonction  $f$  et  $h$  un réel non nul.

Soit  $A(a ; f(a))$  et  $M_h(a + h ; f(a + h))$ , et enfin, soit  $(\mathcal{D}_h)$  la droite  $(AM)$ .

Illustration :



Lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $M_h$  se rapproche du point  $A$ , et la droite  $(\mathcal{D}_h)$  se rapproche d'une position limite : la droite  $D_T$

Remarque : la droite  $D_T$  "frôle" la courbe  $C_f$ .

Or,  $f$  est dérivable en  $a$ , donc, ..... existe et vaut  $f'(a)$ .

Donc,  $D_T$  a pour coefficient directeur .....

Cela amène naturellement à poser la définition suivante :

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , et  $a \in I$ .

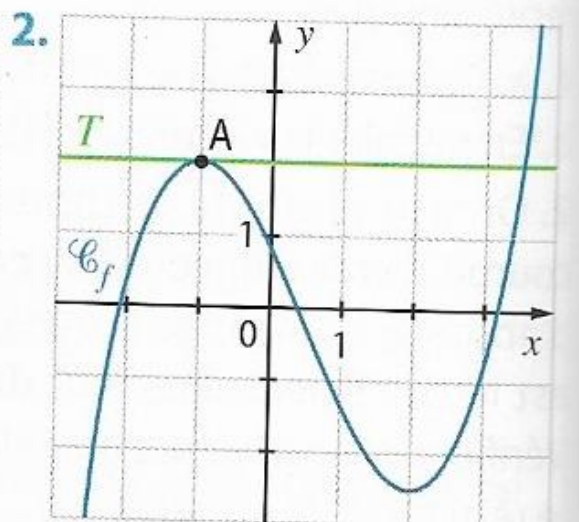
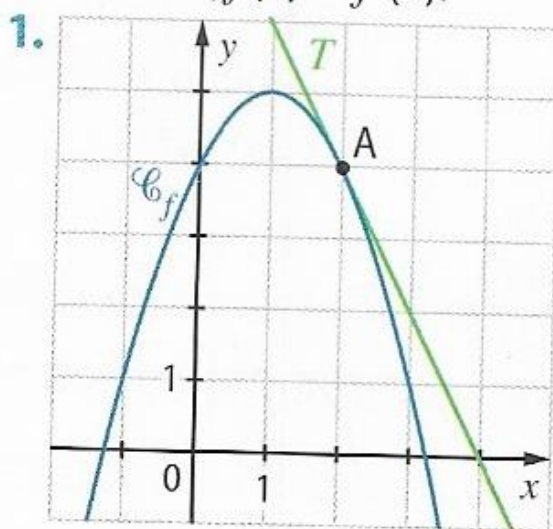
Si  $f$  est dérivable en  $a$ , on appelle ..... à  $C_f$  en le point  $A(a ; f(a))$ , la droite passant par  $A$  et qui a pour coefficient directeur le nombre  $f'(a)$ .

Illustration :

**Exercice 6**

Sur chacun des deux graphiques suivants sont représentées la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  dérivable en  $a$  et sa tangente  $T$  au point d'abscisse  $a$ .

Dans chacun des cas, déterminer par lecture graphique les nombres  $a, f(a)$  et  $f'(a)$ .

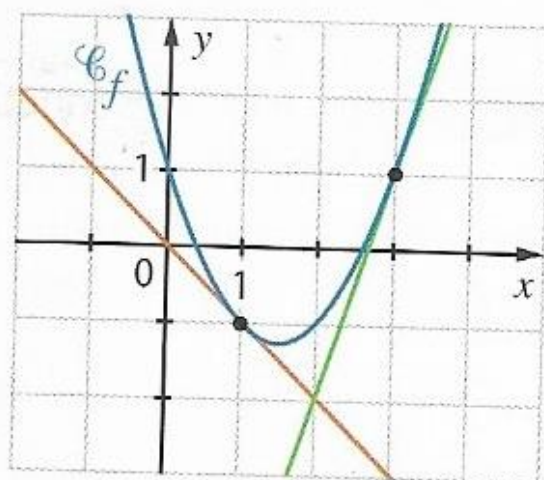


✂-----

**Exercice 7**

On a tracé ci-contre la courbe d'une fonction  $f$  ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 3.

1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de  $f$  en 1.
2. Déterminer graphiquement  $f'(3)$ .

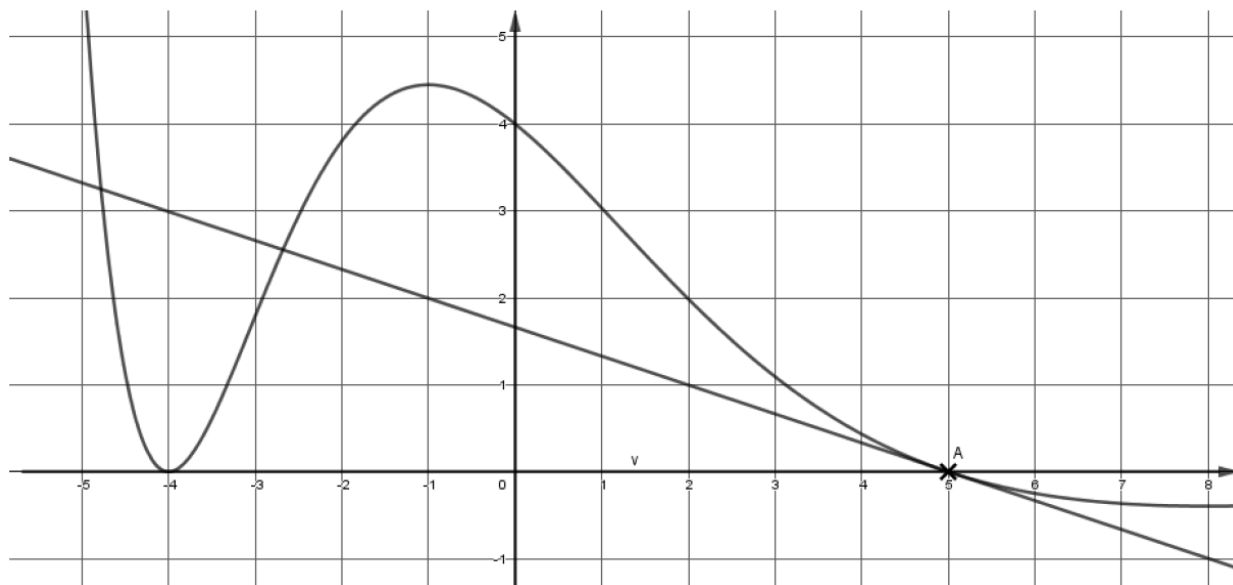


✂-----

**Exercice 8**

$f$  est une fonction dérivable en chacun de ses points. La tangente en  $A$  à la courbe de  $f$  est tracée ci-dessous.

- a) Déterminer le nombre dérivé de  $f$  en 5.
- b) Déterminer les réels  $x$  en lesquels  $f'(x) = 0$ .
- c) Quel est le signe de  $f'(2)$  ? Et celui de  $f'(-3)$  ?



**Propriété : (équation de la tangente à une courbe).**

Soit  $a$  un réel.

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors la courbe  $C_f$  représentant  $f$  admet une tangente en  $A(a ; f(a))$  qui a pour équation réduite :

♥♥♥  $y =$  ♥♥♥

♥♥ A savoir par cœur, vous vous en servirez le jour du bac ! ♥♥

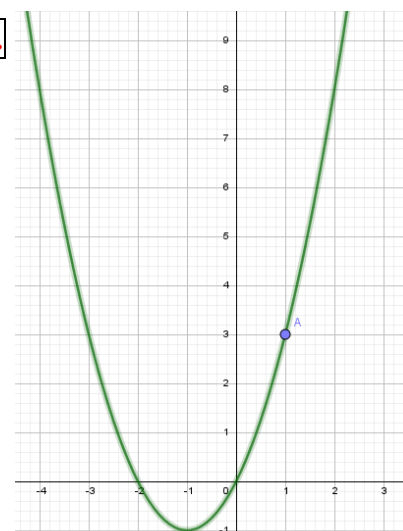
Preuve :

On retiendra bien que **le coefficient directeur de cette tangente est  $f'(a)$ .**

### Exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + 2x$ .

- Vérifier que  $f$  est dérivable en  $a = 1$  et que  $f'(1) = 4$ .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à  $C_f$  en le point  $A$  d'abscisse  $a = 1$ .
- Construire  $T$  dans le repère ci-contre :



## VI – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

### A-Fonction dérivée

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  lorsque  $f$  est dérivable en chacun des points de  $I$ .

Dans ce cas, on définit une nouvelle fonction, notée  $f'$ , appelée la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Le tableau suivant, fournit la liste des dérivées des principales fonctions usuelles.

Il est à mémoriser par cœur, vous en aurez besoin le jour du baccalauréat.



| Fonction $f$  | Ensemble de définition de $f$ | Ensemble sur lequel $f$ est dérivable | Fonction dérivée $f'$ |
|---|-------------------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| <b>Fonction constante :</b><br>$f(x) = k$ , où $k \in \mathbb{R}$ .   |                               |                                       |                       |
| <b>Fonction affine :</b><br>$f(x) = ax + b$ avec $a$ et $b$ réels.    |                               |                                       |                       |
| <b>Fonction carrée :</b><br>$f(x) = x^2$                              |                               |                                       |                       |
| <b>Fonction puissance :</b><br>$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ |                               |                                       |                       |
| <b>Fonction inverse :</b><br>$f(x) = \frac{1}{x}$                     |                               |                                       |                       |
| <b>Fonction racine carrée :</b><br>$f(x) = \sqrt{x}$                  |                               |                                       |                       |



#### Cas particuliers importants :

L'identité définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \dots\dots$

La fonction cube définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \dots\dots\dots$

#### Quelques justifications sur les résultats du tableau des dérivées usuelles :

##### Cas des fonctions affines :

Remarque : une fonction constante est une fonction affine particulière (avec  $a=0$ ), donc la première ligne du tableau est justifiée.

Exemple

Déterminer les dérivées de chacune des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 12x + 1 \quad g(x) = -x.$$

Cas de la fonction carrée : vu à l'exemple 1 du paragraphe III !

Cas de la fonction inverse :

Soit  $a$  un réel non nul. Etablir que  $f$  est dérivable en  $a$ , et déterminer  $f'(a)$  où  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Soit  $a \neq 0$  et  $h \neq 0$  tels que  $a + h \neq 0$ .

$$\text{Alors } f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = -\frac{h}{a(a+h)}.$$

$$\text{Ainsi, } r(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

$$\text{Par conséquent, } \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a \times (a+0)} = -\frac{1}{a^2}.$$

Donc  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ . Ainsi, pour tout  $x \neq 0$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

On admet les autres relations donnant les dérivées dont la démonstration dépasse le niveau de première.

Démontrons (à titre culturel) que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{avec } x \geq 0.$$

Soit  $h$  un réel strictement positif. Etudions la limite du taux d'accroissement  $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers 0 (en restant strictement positif) :

$$\text{Or, ici, } \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

|                      |      |        |          |              |
|----------------------|------|--------|----------|--------------|
| $h$                  | 0,01 | 0,0001 | 0,000001 | 0,0000000001 |
| $\frac{1}{\sqrt{h}}$ | 10   | 100    | 1000     | 100000       |

Ce tableau devrait légitimement vous convaincre que lorsque  $h$  se rapproche de 0, la quantité  $\frac{1}{\sqrt{h}}$  devient "de plus en plus grande", et finit par être supérieure à n'importe quel réel arbitrairement fixé, bref que :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Concrètement, la sécante  $(OM)$  où  $O(0; 0)$  et  $M(h; \sqrt{h})$  tend à devenir verticale lorsque  $h$  se rapproche de 0 (et on rappelle qu'une droite verticale n'admet pas de coefficient directeur).

### Exercice 10

- a) Rappeler la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3$ .
- b) Déterminer s'il existe une tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  qui est parallèle à la droite  $D$  d'équation réduite :  $y = -x + 5$ .
- c) Même question avec la droite  $\Delta$  d'équation réduite :  $y = 12x + 3$ . Préciser les coordonnées des points de contact entre la tangente et la courbe représentant  $f$ .

✂-----

## B – Dérivation et opérations algébriques

### Définition de la somme de deux fonctions

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un même intervalle  $I$ .  
La somme des fonctions  $u$  et  $v$  est la fonction notée  $u + v$ , définie sur  $I$  par : .....

#### Exemple

Déterminer la somme des fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = 2x + 3$ .

La notion de somme de fonctions s'étend naturellement à plus de deux fonctions.

Par exemple, la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^3 + x^2 + \sqrt{x}$  est la somme de trois fonctions !

### 1) Dérivée de la somme de deux fonctions

Si  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , alors la fonction  $u + v$  est dérivable sur  $I$ , et on a : ♥♥  $(u + v)' = \boxed{\phantom{000}}$  ♥♥.  
On admet cette relation.

On retiendra donc que **la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées** et que cette relation se généralise à plus de deux fonctions.

#### Exemple

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes définie par :

$$f(x) = x^2 + 5x \quad ; \quad g(x) = x^3 + x - 3 \quad ; \quad h(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x} \text{ où } x \neq 0.$$

### Définition du produit d'une fonction par un réel

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $k$  un nombre réel.

Le produit du réel  $k$  et de la fonction  $u$  est la fonction notée  $ku$  et définie sur  $I$  par : .....

#### Exemple

Déterminer  $2u$  puis  $-u$  où  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = x^2 + 5x + 2$ .

### 1) Dérivée du produit d'un réel par une fonction

Si  $u$  est dérivable sur  $I$ , alors, pour tout réel  $k$ , la fonction  $ku$  est dérivable sur  $I$ , et on a :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit (ku)' = \boxed{\phantom{000}} \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

On retiendra que pour dériver un "multiple" d'une fonction donnée, on dérive la fonction donnée, et on multiplie le résultat obtenu par ce multiple.

#### Exemple

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 5x^2$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3$$

$$h(x) = 5x^3 + 4x^2 + 6x + 1$$

La courbe représentative de la fonction  $h$  admet-elle des tangentes horizontales ? Justifier.

$$i(x) = -3x^2 - 5x + 11.$$

$$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

**Définition du produit de deux fonctions**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un même intervalle  $I$ .

Le produit des fonctions  $u$  et  $v$  est la fonction notée  $uv$ , définie sur  $I$  par : .....

**Exemple**

Déterminer  $uv$  lorsque  $u$  et  $v$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = 3x$  et  $v(x) = 5x - 1$ .

**3) Dérivée d'un produit de fonctions**

Si  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , alors la fonction  $uv$  est dérivable sur  $I$ , et on a : ♥♥♥  $(uv)' =$   ♥♥♥

En particulier, lorsque  $u = v$ , on a : ♥♥♥  $(u^2)' =$   ♥♥♥

**Démonstration donnée à titre indicatif**

Calculons le taux de variation de  $(uv)(x) = u(x)v(x)$ , pour  $h \neq 0$  :

$$t(h) = \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

On retranche puis on ajoute un même terme

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{v(x+h)[u(x+h) - u(x)] + u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h} \\ &= v(x+h) \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} t(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ v(x+h) \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \times \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= v(x) u'(x) + u(x) v'(x) \end{aligned}$$

La dérivée du produit :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pour la seconde relation : preuve :

♥\* **Attention** : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées ♥\* (erreur classique).

### **Exercice 11**

a) Calculer la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $]1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$ .

b) Même question avec la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (5x^2 - 7x + 1)^2$

c) Même question avec la fonction  $h$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $h(x) = x^3\sqrt{x}$ .

✂ -----

### **Définition de l'inverse d'une fonction**

Soit  $v$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , qui ne s'annule pas sur  $I$  (c'est-à-dire que pour tout réel  $x \in I$ ,  $v(x) \neq 0$ ).

La fonction inverse de  $v$ , notée  $\frac{1}{v}$  est définie sur  $I$  par : .....

**Exemple** : Justifier que la fonction  $v$  définie par :  $v(x) = x^2 + x + 2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , puis déterminer l'expression de  $\frac{1}{v}$ .

### **4) Dérivée de l'inverse d'une fonction**

Si  $v$  est dérivable sur  $I$ , et si de plus  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la fonction  $\frac{1}{v}$  est dérivable sur  $I$ , et

on a : ♥♥♥  $\left(\frac{1}{v}\right)' = \dots \dots \dots$  ♥♥♥

Preuve :

### **Exercice 12**

1)  $f$  est définie sur  $]1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{2x^2 + x}$ .

Calculer  $f'(x)$ .

2) Même question avec la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = \frac{1}{x^3}$

3) Même question avec la fonction  $h$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $h(x) = 4x^2 + 3x + \frac{5}{x^2}$ .

### Définition du quotient de deux fonctions

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ , telles que  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ .

La fonction quotient de  $u$  par  $v$ , notée  $\frac{u}{v}$  est définie sur  $I$  par :

Exemple :  $u$  et  $v$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = 2x + 1$  et  $v(x) = x^2 + 1$ .

Déterminer l'expression de la fonction  $\frac{u}{v}$ .

### 5) Dérivée d'un quotient de fonctions.

Si  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , et si  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la fonction  $\frac{u}{v}$  est dérivable sur  $I$ , et on a :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \left( \frac{u}{v} \right)' = \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

Preuve :

### Exercice 13

1) Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{3x+1}{x+4}$

Déterminer son ensemble de définition, puis justifier que  $f$  est dérivable sur ce dernier, puis calculer  $f'(x)$ .

2)  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x^2+x+3}$ . Calculer la dérivée de  $g$ .

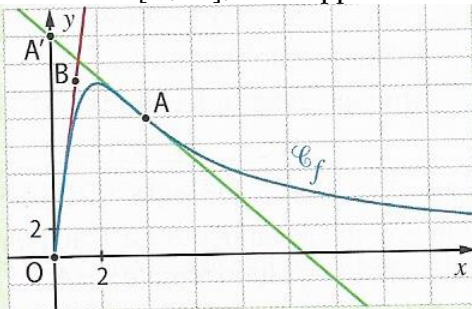
3)  $h$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ . Calculer  $h'(x)$ .

✂ -----

Exercice 14 On administre un médicament par injection intraveineuse.

On note  $f(t)$  la quantité de produit (en milligrammes) présente dans le sang  $t$  heures après l'intraveineuse,  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; 24]$ .

On admet que  $f$  est dérivable sur  $[0; 24]$ , et on appelle vitesse de diffusion du produit à l'instant  $t$  le nombre  $f'(t)$ .



1. Déterminer graphiquement la vitesse de diffusion du produit à  $t = 4$ .

2. On admet que pour tout  $t \in [0; 24]$  :

$$f(t) = \frac{50t}{t^2 + 4}$$

a. Retrouver par le calcul la réponse apportée à la question 1..

b. Calculer la vitesse initiale de diffusion du produit.

### **6) Dérivée de fonctions composées**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $g$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = g(ax+b)$ .

On dit que  $f$  est la composée de la fonction affine  $x \mapsto ax+b$  par  $g$ .

#### **Exemple**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2x + 5)^3$ .

On a :  $f(x) = g(2x + 5)$  où  $g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : .....

#### **Propriété (admise)**

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = g(ax+b)$ .

Si  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a :  $f'(x) = \dots\dots\dots$

**Retenir** : on dérive le contenu de la parenthèse que l'on multiplie par la dérivée de  $g$  appliquée au contenu de cette parenthèse.

#### **Exemples**

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

a)  $f(x) = (2x + 5)^3$ .

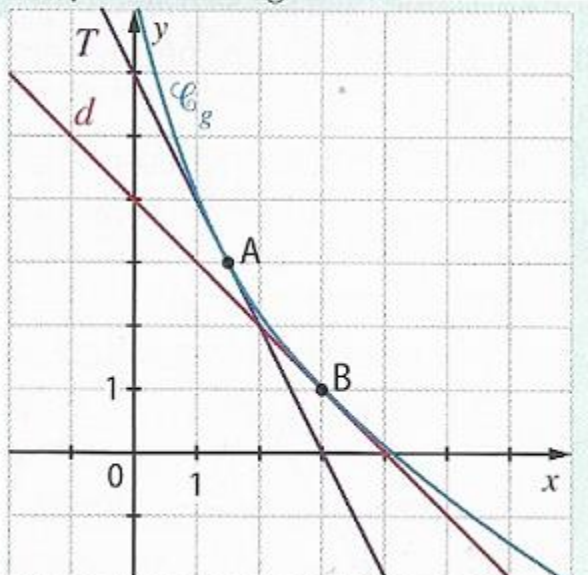
b)  $m(x) = \sqrt{-3x+9}$  pour  $x < 3$ .

**Exercices de synthèse**

**I-**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{a}{x} + bx + c$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels. La courbe de  $g$  et deux de ses tangentes sont tracées ci-dessous.

Déterminer l'expression de  $g$ .



✂

**II-**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$  et  $T$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse  $-1$ .

- Justifier que  $T$  a pour équation réduite :  $y = 3x + 2$ .
- Faire une conjecture sur la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $T$ .
- 
- Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $x^3 - (3x + 2) = (x - 2)(x + 1)^2$ .  
Montrer que la tangente  $T$  recoupe la courbe  $\mathcal{C}$  en un point  $B$  dont on déterminera les coordonnées.
- Déterminer la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $T$ .

III-

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ .

- a) Déterminer si la courbe représentant  $f$  admet des tangentes horizontales.
- b) Démontrer que la courbe représentative de  $f$  admet deux tangentes parallèles à la droite  $(d)$  d'équation  $y=5x+4$ . Préciser les abscisses de ces points.

IV-Problème ouvert

On considère la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation :  $y = x^2$ , courbe représentative de la fonction carrée.  
Soit  $M(\alpha ; \beta)$  un point fixé du plan.

Déterminer le nombre de tangentes à cette parabole  $\mathcal{P}$  passant par le point  $M$ .

caser des exos à la pelle :

52 ; 54 ; 56 ; 61 ; 65 ; 64 ; 68 ; 73 ; 79 ; 81 ; 92 vitesse inst. ; 95 102 TB !!! tp2 p 131

QCM p 133 tb (dm/ds)

124 p 135 xxl + 125 p 135 xxxxl dm

Dans chacun des exemples suivants, il est **fondamental** de prendre le temps de dire qui joue le rôle de  $u$  et qui joue celui de  $v$ .

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + 2x - 5$ .

a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $f'(x)$ .

b) La courbe représentative de la fonction  $f$  admet-elle une tangente horizontale ? Justifier.

c) La courbe représentant  $f$  admet-elle des tangentes parallèles à la droite  $(d)$  d'équation :  $y = 5x + 2018$  ?

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^4 + x^2 + 3x - 7$

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , puis, calculer  $g'(x)$ .

b) La courbe représentative de la fonction  $g$  admet-elle une tangente passant par l'origine du repère ?

3) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = -4x^5$

Montrer que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $h'(x)$ .

4) Soit  $w$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $w(x) = 6x^5 + 3x^2 - 5x + 3$

Montrer que  $w$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $w'(x)$ .

5) Soit  $p$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $p(x) = x^2 \sqrt{x}$

Montrer que  $p$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , et calculer  $p'(x)$ .

6) Soit  $i$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $i(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

Après avoir justifié que  $i$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , montrer que  $i$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $i'(x)$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = \frac{3x+1}{x+4}$

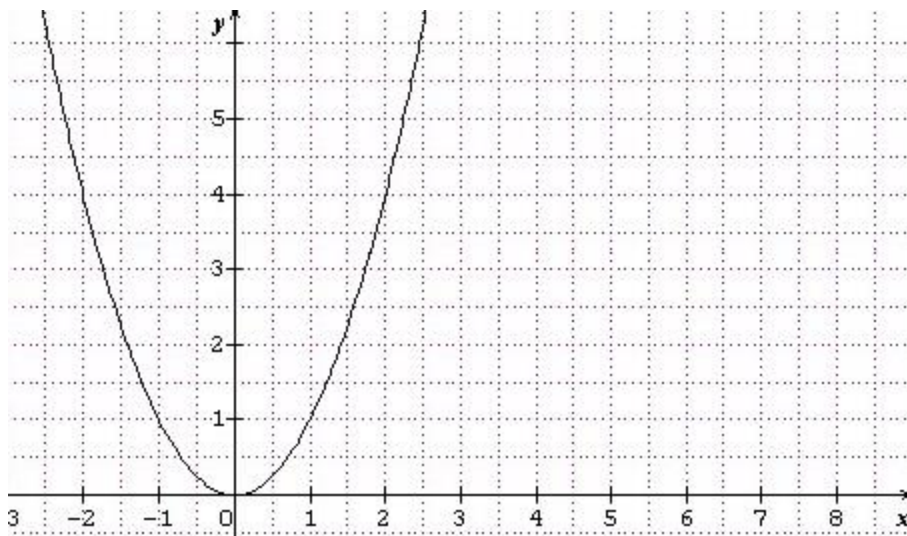
Déterminer son ensemble de définition, puis justifier que  $g$  est dérivable sur ce dernier, puis calculer  $g'(x)$ .

3) Dérivée de :  $f(x) = \frac{1}{3-4x}$  ;  $k(t) = \frac{2}{t^3}$  ;  $h(x) = \frac{2}{x^3}$  ;  $m(x) = -\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 2x + 1$  ;  
 $n(x) = (2x+1)\sqrt{x} - 3$

## VI – Applications de la dérivation

### A– Lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée

Exemple et conjecture : Prenons la fonction carrée définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2$ , voici son graphe :



Que peut-on dire du signe du coefficient directeur de chacune des tangentes à la parabole en un point d'abscisse située dans l'intervalle  $]-\infty ; 0]$  ?

Même question mais pour l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

Constat :

Sur cet exemple, il semblerait que lorsque le coefficient directeur de la tangente en chacun des points d'un intervalle est ....., la fonction....., et

que.....  
 .....  
 .....

Tracer à l'aide de votre calculatrice d'autres courbes. Le précédent constat semble-t-il toujours être vérifié ?

### **Théorème fondamental, appelé **théorème de Lagrange****

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- 1) Si pour tout réel  $x \in I$ , on a :  $f'(x) \geq 0$  , alors  $f$  est croissante sur l'intervalle  $I$ .
- 2) Si pour tout réel  $x \in I$ , on a :  $f'(x) \leq 0$  , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- 3) Si pour tout réel  $x \in I$  on a  $f'(x) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

*Remarque* : Ce théorème sera d'un usage quotidien pour la suite, alors mémorisez-le ! C'est le théorème d'analyse le plus important de l'année en première S.

Lorsqu'une fonction est dérivable sur un intervalle  $I$ , étudier son sens de variation sur  $I$  revient donc à .....  
 Ne perdez jamais cela de vue, c'est crucial.

#### Application 1 : Etude du sens de variation d'une fonction

*Exemple 1* : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + x + 1$ .

Calculer  $f'(x)$  et déterminer le sens de variation de  $f$ , et faire le tableau de variation de  $f$  où figurera conjointement le signe de  $f'(x)$  ainsi que le sens de variation de  $f$ .

Combien de tangentes horizontales la courbe représentative de  $f$  admet-elle sur  $\mathbb{R}$  ? Justifier.

*Exemple 2* : Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , et construire sommairement l'allure de son graphe où figureront le tracé des éventuelles tangentes horizontales.

Donner l'équation réduite de la tangente à  $C_g$  au point A d'abscisse 1 de  $C_g$ .

Exemple 3 : Soit  $h$  la fonction définie par :  $h(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

- a) Déterminer son ensemble de définition. On le notera  $D_h$ .  
 b) Etudier le sens de variation de  $h$  sur  $D_h$ , et dresser son tableau de variations.

Remarque cruciale : La phrase la fonction  $h$  décroît sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  a-t-elle un sens ? Pourquoi ?

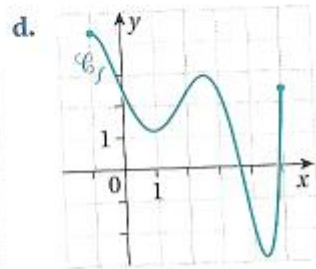
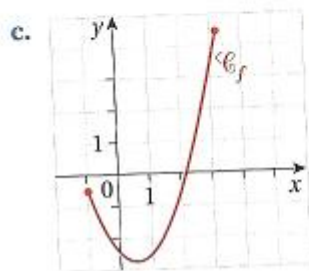
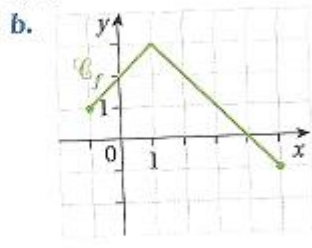
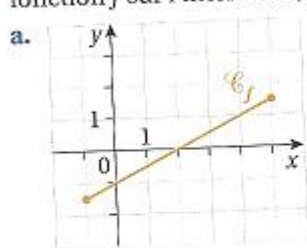
Cette remarque illustre le fait que lorsqu'on applique le théorème de Lagrange, il est nécessaire de se placer..... !!

**Propriété** (réciproque du théorème de Lagrange)

- a) Si  $f$  est croissante sur un intervalle  $I$ , et si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors, pour tout réel  $x \in I$ ,  $f'(x) \geq 0$ .  
 b) Si  $f$  est décroissante sur un intervalle  $I$ , et si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors, pour tout réel  $x \in I$ ,  $f'(x) \leq 0$ .

**15** Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[-1; 5]$  dont la représentation graphique est donnée.

Dans chaque cas, donner l'allure approximative de la courbe représentative de la fonction  $f'$ , dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-1; 5]$ .



Application : Associer à une courbe celle de sa fonction dérivée et vice-versa.

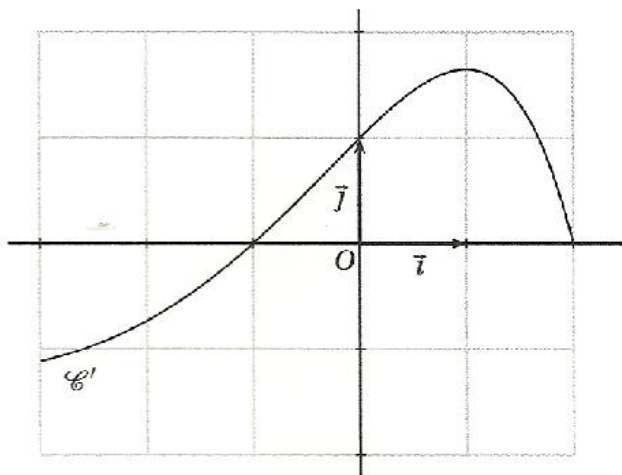
**Commun à tous les candidats**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $[-3, 2]$ .

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$ .
- la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet la courbe représentative  $\mathcal{C}'$  ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3, -1]$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1, 2]$ .
3. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3, 2]$ ,  $f(x) \geq -1$ .
4. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .  
La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées  $(1, 0)$ .

## II – D'autres applications du théorème de Lagrange

### A – Comparaison de fonctions, établir des inégalités

#### Exercice I

Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$ , on a :  $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Méthode :

Exercice 2

Etablir que pour tout réel  $x \in [0 ; 3]$ ,  $x^3 - x \geq -\frac{1}{2}$ .

Exercice 3

Démontrer que la fonction  $f$  définie sur  $[-10 ; 10]$  par :  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  : admet un maximum et un minimum sur  $[-10 ; 10]$  : Préciser la valeur de ces derniers, et pour quelles valeurs de  $x$  ils sont atteints.

Question

Est-il vrai que si une fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et s'il existe un réel  $a$  en lequel  $f'(a) = 0$ , alors la fonction  $f$  admet un extremum en  $a$  ?

Remarque et rappel : Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un même intervalle  $I$ .

- $C_f$  est AU DESSUS de  $C_g$  sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ , on a :  $f(x) \geq g(x)$ .
- $C_f$  est EN DESSOUS de  $C_g$  sur  $I$  si et seulement si pour tout  $x \in I$ , on a :  $f(x) \leq g(x)$ .

Exercice

Etude de la position relative d'une courbe par rapport à une de ses tangentes.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

a) Donner l'équation de la tangente  $T_A$  à  $C_f$  au point A d'abscisse  $a = 1$ .

b) Etudier la position relative de  $C_f$  et  $T_A$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

III – Problèmes d'optimisation

*L'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, permet entre autre, de déterminer d'éventuels extrema de cette fonction sur cet intervalle, et donc de répondre à des problèmes concrets d'optimisation. Optimiser vient du latin optimus, qui signifie rendre le meilleur possible.*

Exemple 1

On veut construire une cuve métallique à partir d'une plaque carrée de 3 m de côté. A chaque coin de cette plaque, on découpe un carré de côté  $x$  mètres. En pliant et en soudant, on obtient une cuve de volume  $V(x)$  en  $m^3$ .

0) Faire un dessin de la situation étudiée.

a) Dans quel intervalle  $I$ ,  $x$  est-il situé ?

b) Démontrer que  $V(x) = x(3 - 2x)^2$

c) Etudier les variations de la fonction  $V$  sur l'intervalle  $I$ .

d) Décrire la cuve qui aura le volume maximal.

Exemple 2

On se place dans un repère orthonormé  $(O ; ; )$  du plan et on considère l'hyperbole d'équation :  $y = \frac{1}{x}$ .

Déterminer le point de l'hyperbole le plus proche de l'origine du repère.

Trouver de nouveaux exemples

Exemple 3 : Parmi tous les cônes de génératrice mesurant 30 cm, déterminer le rayon et la hauteur du cône ayant un volume maximal.

#### Exemple 4 : un exemple probabiliste !!!

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge, blanc et vert. Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.

Si le secteur repéré est blanc, il perd 12 €.

Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :

– si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 €.

– s'il est blanc, il gagne 2 €.

– s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et  $n$  secteurs verts (où  $n \geq 1$ ).

Soit  $X_n$  la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X_n$ .

2. Calculer l'espérance mathématique de  $X_n$  en fonction de  $n$ .

3. Étudier le sens de variation de la fonction numérique  $f$  définie sur

$$[0; +\infty[ \text{ par } f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}.$$

4. En déduire pour quelle valeur de l'entier  $n$  l'espérance mathématique de  $X_n$  est maximale.

Quelle est la valeur correspondante de  $E(X_n)$  ?

oubli : tangente parallèle à une droite de direction donnée.

