« L'obstination est le chemin de la réussite. » Charlie Chaplin

Chapitre II Rappels sur les suites- Raisonnement par récurrence

I – Généralités et quelques rappels

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4;5;6;7;8;9;10;11.........\}$
Cet ensemble contient une infinité d'éléments.
Si n désigne un entier naturel, l'entier $n+1$ est appelé le successeur de n.
Enfin, on note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble formé par les entiers naturels non nuls : $\mathbb{N}^* = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;.......\}$.

1. Définition

- On appelle suite numérique, toute fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs réelles.

  Notant U une telle fonction, on a : $U : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto U(n). \end{array}$

  Par commodité, et surtout, pour la distinguer d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera U_n [lire u indice n] à la place de $U(n)$.

- On a donc, par convention d'écriture, $\boxed{U_n = U(n)}$.

- A présent, la suite $U : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto U_n \end{array}$ sera notée $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore, (U_n).

  Lorsqu'on note (U_n) on parle de la suite dans sa globalité, c'est-à-dire de l'ensemble de tous ses termes !

- Le nombre U_n est appelé le terme général de la suite.
- U_{n+1} est appelé le terme successeur à U_n. S'il existe, U_n est appelé le prédécesseur de U_{n+1}.

Bien faire attention, que si une suite est définie sur $\mathbb{N}$, son premier terme est u_0 et pas u_1 !

2. Mode de génération d'une suite

Pour définir une suite il existe plusieurs moyens :

- Il y a les ***suites définies explicitement***, c'est-à-dire que l'on connaît l'expression de U_n en fonction de n.

Par exemple, la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = n^2 - n + 1$ est définie explicitement.
La phrase (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = n^2 - n + 1$ signifie que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = n^2 - n + 1$.

Calculer les trois premiers termes de cette suite :

$u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$

$u_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

$u_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

L'avantage des suites définies explicitement, c'est que l'on peut calculer *directement* n'importe quel terme de cette dernière.

Par exemple, prenons la suite précédente (U_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $U_n = n^2 - n + 1$.

Fonction en *Python* pour calculer U_n dans le cas de cette suite :

```
def U(n):
    return n*n-n+1
```

- Il y a les ***suites définies par une relation de récurrence***, c'est-à-dire que l'énoncé donne une égalité entre chaque terme U_n et son (ses) successeur(s) U_{n+1}, pour tout entier naturel n.

Par exemple, les suites (U_n), (V_n) *et* (W_n) définie sur ℕ par :

$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2U_n - 4 \end{cases}$; $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = V_n - 3n + (-1)^n \end{cases}$; $\begin{cases} W_0 = 0 \text{ ; } W_1 = 1 \\ W_{n+2} = W_{n+1} + W_n \end{cases}$ sont trois exemples de suites définies par une relation de récurrence.

a) Déterminer les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n).

b) Déterminer les cinq premiers termes de la suite (W_n), appelée suite de Fibonacci.

a) $u_1 = 2u_0 - 4$

$u_1 = 2 \times 5 - 4 = 6$

$u_2 = 2 \times 6 - 4 = 8$

$v_0 = 2$

$v_1 = v_0 - 3 \times 0 + (-1)^0$

$v_1 = 2 + 1 = 3$

$v_2 = v_1 - 3 \times 1 + (-1)^1$

$v_2 = 3 - 3 - 1 = -1$

b) $w_0 = 0$

$w_1 = 1$

$w_{0+2} = w_{0+1} + w_0$

$w_2 = w_1 + w_0 = 0 + 1 = 1$

$w_3 = w_2 + w_1 = 1 + 1 = 2$

$w_4 = w_3 + w_2 = 2 + 1 = 3$

Remarque : pour des suites définies par une relation de récurrence, le calcul des termes de la suite se fait, *apriori*, de proche en proche, à partir du (des) premier(s) terme(s).

Dans l'exemple précédent, il serait très inconfortable de calculer U_{2023}. Pourquoi ?

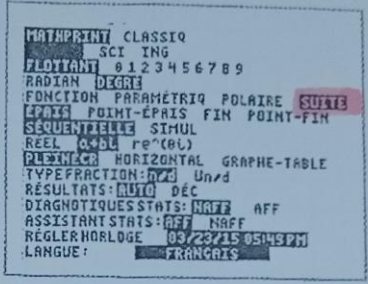
Nécessite de calculer : u_1 ; u_2 ; … ; u_{2022}

Utilisation des calculatrices concernant les suites : se référer au document ci-dessous.
Ceci doit impérativement être maîtrisé par chacun d'entre vous, cela sert souvent en exercice pour établir une conjecture par exemple.

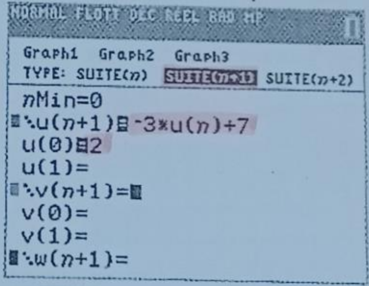
Calcul des termes d'une suite définie par une relation de récurrence :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n + 7 \end{cases}$ dont on veut déterminer les termes u_1 à u_{15}.

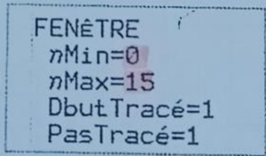
❶ Appuyer sur la touche **mode** pour accéder à l'écran ci-contre. À la quatrième ligne, sélectionner le mode **SUITE**. Taper **entrer**. Appuyer sur la touche **f(x)**.



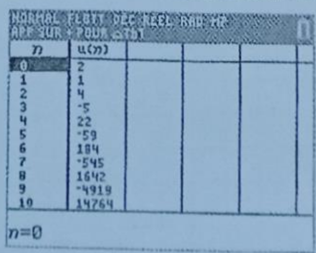
❷ Choisir le type **SUITE(n+1)**, en haut de l'écran, puis compléter l'écran.
$u(n)$ est obtenu en utilisant les touches **2nde** **7** **(** **X,T,θ,n** **)**.
nMin est l'indice de départ.
$u(n\text{Min})$ est la première valeur.



❸ Appuyer sur la touche **fenêtre**, puis renseigner l'indice du premier terme et celui du dernier terme à calculer, ici 15.
Appuyer sur les touches **2nde** **fenêtre** pour accéder à l'écran **CONFIG TABLE**, puis le compléter.



❹ Appuyer sur les touches **2nde** **graphe** pour obtenir le tableau des valeurs des termes de (u_n).



Ce tableau donné par la calculatrice, permet, par exemple, de constater que les valeurs prises par cette suite ne sont pas toutes de même signe, et même en alternance de signe, dès que $n \geq 2$.

☞ Essayez d'afficher à l'écran les termes de la suite (W_n) de Fibonacci précédemment décrite.

3- Monotonie d'une suite

Définition

- Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite *croissante* lorsque ***pour tout*** entier naturel n, on a : $U_{n+1} \geq U_n$
- Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite *décroissante* lorsque ***pour tout*** entier naturel n, on a : $U_{n+1} \leq U_n$
- Une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite constante (ou stationnaire) lorsque pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = U_n$ ou encore : $U_0 = U_n$

Remarque : On dira qu'une suite est ***monotone***, dès lors qu'elle est ***croissante ou bien décroissante.***

Ces définitions sont *adaptables* avec la nuance suivante : par exemple, une suite (U_n) est dite *croissante à partir du rang* 2, si *pour tout entier naturel* $n \geq 2$, on a : $U_{n+1} \geq U_n$.

Terminons les remarques en disant qu'écrire *: "$U_n \geq U_{n+1}$, donc la suite (U_n) décroît "* *n'a aucun sens !!!*

Le quantificateur : ***pour tout entier naturel n*** que l'on notera : $\forall n \in \mathbb{N}$, prend ici toute son importance : écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_{n+1}$ a un sens, et signifie très exactement que la suite (U_n) est décroissante !

Un autre quantificateur est aussi utilisé en mathématiques : *il existe (au moins) un entier naturel n que l'on notera :* $\exists n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, l'affirmation : $\exists n \in \mathbb{N}/U_n < 0$ signifie que la suite (U_n) a au moins un de ses termes qui est strictement négatif.
↳ tel que

Les deux affirmations : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 0$ et $\exists n \in \mathbb{N}/U_n < 0$ n'ont pas du tout le même sens : pourquoi ?
↳ ts les termes sont négatifs ↳ au moins 1 terme est négatif

On prendra bien garde à ne pas mélanger la rédaction en français et celle utilisant les quantificateurs.

Ecrire *: ∀ l'entier naturel n, ∃ un réel x tel que x >n* est un salmigondis qui n'a aucun sens !
Par-contre, écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, x > n$ est une phrase mathématiquement correcte qui signifie quoi au fait ? On peut tjs trouver un réel supérieur à nptq entier arbitrairement fixé.

Voici ***plusieurs méthodes*** qui permettent d'étudier le sens de variation d'une suite :

♥♥Méthode de la différence ♥♥ : (la plus utilisée en pratique pour le bac)

On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$:
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors (U_n) est croissante
$U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors (U_n) est décroissante

Exercice 1

Etudier le sens de variation (= la monotonie) des suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_n = n^2+4n+1$; $V_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$.

✂--

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = n^2 + 4n + 1$

Donc : $U_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) + 1$
$U_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 1$
$U_{n+1} = n^2 + 6n + 6$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2 + 6n + 6 - (n^2 + 4n + 1)$

$u_{n+1} - u_n = n^2 + 6n + 6 - n^2 - 4n - 1$

$u_{n+1} - u_n = 2n + 5$.

Or $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$, donc $2n \geqslant 0$, donc $2n + 5 \geqslant 5 \geqslant 0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Donc (u_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$

Donc : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n-3}{(n+3)(n+1)} = \frac{-2}{(n+3)(n+1)}$.

$-2 < 0$; $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geqslant 0$, $n+3 \geqslant 3 > 0$, $n+1 \geqslant 1 > 0$, donc $\frac{-2}{(n+3)(n+1)} < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, donc (v_n) décroit.

Cas particuliers des suites dont tous les termes sont strictement positifs

Méthode des quotients : ***ne concerne que les suites dont tous les termes sont strictement positifs.***

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors (u_n) croit.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors (u_n) décroit.

Exemple 1

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par : $u_n = 2 \times 0{,}4^n$.

Exemple 2 : (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{2^n}{n}$

a) Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n > 0$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$.

c) Comparer les entiers $2n$ et $n+1$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exemple 1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0{,}4^n$

$2 > 0$; $0{,}4 > 0$, donc $2 \times 0{,}4^n > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Preuve : Supposons par exemple que f est croissante sur $[0;+\infty[$

But : Mq (u_n) croît.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq n+1$.

Donc $f(0) \leq f(n) \leq f(n+1)$ car f croît sur $[0;+\infty[$.

Donc $u_n \leq u_{n+1}$.

Donc (u_n) est croissante.

Exemple 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = e^{4n^2} + n^3 + 3n^2 + 5n + 2023^2$.

a) Etablir que pour tout entier naturel n, $U_n = f(n)$, où f est une fonction que l'on précisera.

b) Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$, puis *en déduire* le sens de variation de la suite (U_n).

a) $u_n = f(n)$ où f est la fonc° définie sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x) = e^{4x^2} + x^3 + 3x^2 + 5x + 2023^2$.

b) f est dérivable car somme et composé de fonc° dérivables sur $[0;+\infty[$
et $\forall x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = 8xe^{4x^2} + 3x^2 + 6x + 5$.

Signe de $f'(x)$ avec $x \in [0;+\infty[$:

$x \geq 0$; $e^{4x^2} > 0$; $8 > 0$; $3 > 0$; $x^2 \geq 0$; $6 > 0$; $5 > 0$

Donc $f'(x) > 0$ car somme et produit d'expressions positives.

Donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Par propriété, (u_n) a m̂ monotonie que f.

Donc (u_n) est croissante.

Exemple 2

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = e^n - n$.

Etudier le sens de variation de la suite (V_n).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^n - n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$
par : $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$.

$x \geq 0$, donc $e^x \geq e^0$ car la fonc° expo. est croissante sur $[0;+\infty[$,
et $e^0 = 1$.

Donc $e^x - 1 \geq 0$

Donc $f'(x) \geq 0$, donc f croît sur $[0 ; +\infty[$.

Par propriété, (v_n) est croissante.

Remarque : Attention, la propriété précédente est ***fausse pour les suites définies par une relation de récurrence*** : si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_n) n'a pas nécessairement le même sens de variation que f sur $[0 \ ; \ +\infty[$.

En témoigne le contre-exemple suivant : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 4$.

Etablir que la suite (u_n) décroît, bien que : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante sur $[0 \ ; \ +\infty[$. Conclusion ?

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -4$ et $-4 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$, donc (u_n) est décroissante.

Et ici : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $[0 ; +\infty[$ où $f(x) = x - 4$.

f : fonction affine de coeff. directeur égal à 1 $(1 > 0)$.

Donc f croît sur $[0 ; +\infty[$.

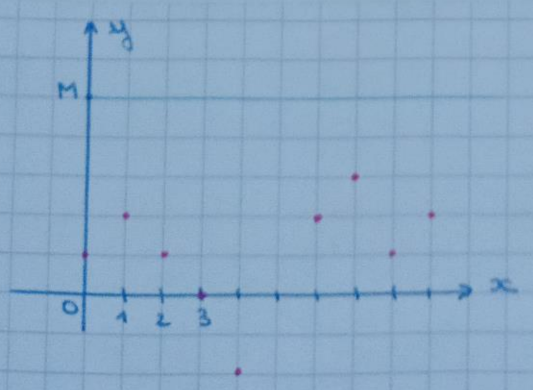
f et (u_n) n'ont pas la m̂ monotonie.

Terminons ce paragraphe par quelques définitions.

Définitions

- ♥♥Une suite (u_n) définie sur ℕ est dite ***majorée***, s'il existe un réel M, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$. On dit que M est <u>un</u> majorant de la suite (u_n).♥♥

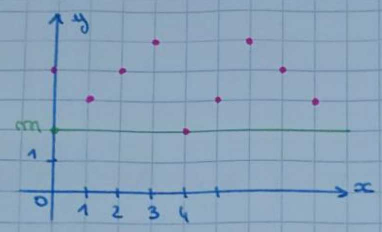
<u>Illustration graphique de suite majorée</u> :



Exemple de suite majorée :

- ♥♥Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***minorée***, s'il existe un réel m, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite (u_n).♥♥

Illustration graphique de suite minorée :

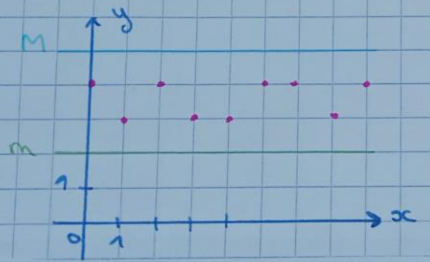


Exemple de suite minorée :

- Une suite est dite ***bornée*** si elle est à la fois ***minorée et majorée***.♥♥

$\exists (m;M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M.$

Illustration graphique de suite bornée :



ex : $u_n = (-1)^n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 1.$

Remarques : un majorant, un minorant, est une constante indépendante de n.

Ne pas dire : le majorant ou le minorant, pourquoi ?

Si tous les termes d'une suite sont positifs, alors cette suite est…minorée par 0***…………***

Si tous les termes d'une suite sont négatifs, alors cette suite est…majorée par 0***…………***

II – Le raisonnement par récurrence

Définition

Une propriété mathématique est une phrase écrite en français ou à l'aide de symboles mathématiques, qui est soit vraie soit fausse.

Lorsque cette propriété concerne un entier naturel n, on la notera $\mathcal{P}(n)$, ou encore $\mathcal{P}_n$.

n est appelé le rang, $\mathcal{P}(n)$ signifie la propriété au rang n.

Exemples

1) Soit n un entier naturel.

$\mathcal{P}(n)$ est la propriété : $2^n > n^2$. (Ici, $\mathcal{P}(n)$ est décrite à l'aide de symboles mathématiques).

Cette propriété est-elle vraie ou fausse au rang $n = 0$? Au rang $n = 1$? Au rang $n = 2$?

1) Si $n = 0$: $\mathcal{P}(0)$ est la propriété : $2^0 > 0^2$ càd $1 > 0$ ce qui est vrai !
Donc la propriété est vraie au rang 0 : on note $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Si $n = 1$: $\mathcal{P}(1)$ s'écrit : $2^1 > 1^2$ càd $2 > 1$: vrai. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Si $n = 2$: $\mathcal{P}(2)$ s'écrit : $2^2 > 2^2$ càd $4 > 4$: faux. Donc $\mathcal{P}(2)$ est fausse.

2) Soit n un entier naturel et $\mathcal{H}(n)$ la propriété : $4^n - 1$ est un multiple de 3.
(Ici, $\mathcal{H}(n)$ est décrite à l'aide d'une phrase en français).

a) Cette propriété est-elle vraie ou fausse au rang : $n = 0$? $n = 1$? $n = 2$? $n = 3$? $n = 4$?

b) Quelle conjecture a-t-on envie d'émettre ?

c) Que signifierait concrètement que la propriété $\mathcal{H}$ soit vraie au rang $n + 1$?

2)a) $H(n)$: " $4^n - 1$ est un multiple de 3 ".

Si $n = 0$: $H(0)$: " $4^0 - 1$ est un multiple de 3 " càd 0 est un multiple de 3 : vrai car $0 = 3 \times 0$.

Donc $H(0)$ est vraie.

Si $n = 1$: $H(0)$ est : $4^1 - 1$ est un multiple de 3.

Donc $H(1)$ est vraie.

Si $n = 2$: $H(2)$ est : $4^2 - 1$ est un multiple de 3, càd 15 est un multiple de 3 : vrai.

Donc $H(2)$ est vraie.

Si $n = 3$: $H(3)$: $4^3 - 1$ est un multiple de 3 càd $64 - 1 = 63$ est un multiple de 3 : vrai.

Donc $H(3)$ est vraie.

Si $n=4$: $H(4)$: 4^4-1 est un multiple de 3 càd $256-1=255$ est un multiple de 3.

Donc $H(4)$ est vraie.

b) Conjecture : Il semblerait que la propriété $H(n)$ soit vraie pour tout entier naturel n.

c) $H(n+1)$ est vraie signifie que : $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3.

Soit A un sous-ensemble (= une partie) de $\mathbb{N}$ tel que : $\begin{cases} 0 \in A \\ \forall a \in A, a+1 \in A \end{cases}$ c'est-à-dire que le nombre 0 appartient à l'ensemble A, et que, chaque fois qu'un entier a appartient à A, le successeur de l'entier a, à savoir $a+1$, appartient également à l'ensemble A.

Déterminer quel est l'ensemble A.

$A = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 \dots\}$. Donc $A = \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et que pour tout entier naturel n, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.

Que pouvez-vous dire concernant la propriété $\mathcal{P}(n)$? Pourquoi ?

On peut dire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pr n'importe quel entier naturel !

car $A = n \in \mathbb{N} / \mathcal{P}(n)$ est vraie $\}$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, donc $0 \in A$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, ($\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie) donc :

$\forall n \in A$, $n+1 \in A$.

Donc $A = \mathbb{N}$ càd $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Un principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n, et n_0 un entier naturel fixé.

Pour démontrer que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on procèdera en trois étapes :

1) Etape d'initialisation : On vérifie que la propriété est vraie pour l'entier n_0, c'est-à-dire on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

2) *Etape d'hérédité* : On suppose que la propriété est vraie à un certain rang n *arbitrairement fixé*, avec $n \geq n_0$, [c'est l'hypothèse de récurrence] et on démontre alors, sous cette hypothèse, que la propriété est également vraie au rang $n + 1$.

3) *Conclusion* : Lorsqu'on a démontré qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, alors on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0.

Remarques : 1) Le plus souvent, en terminale, $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$.

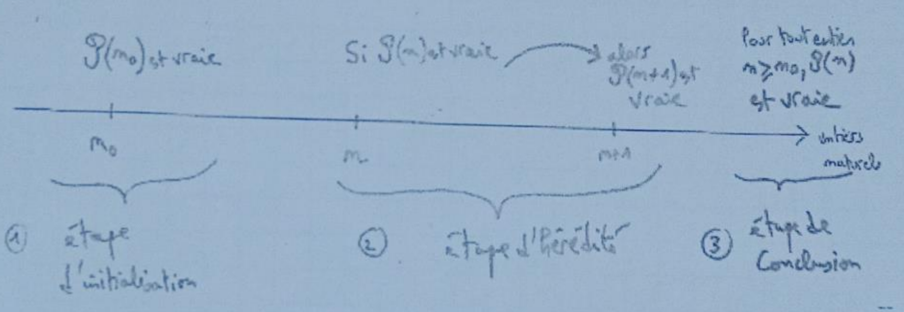
2) L'étape 2) traduit le fait que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire, c'est-à-dire que la véracité (= caractère vrai) de $\mathcal{P}(n)$ se transmet à $\mathcal{P}(n+1)$.

3) La pratique de ces deux étapes et de la conclusion s'appelle effectuer un raisonnement par récurrence.

4) Une propriété à démontrer par récurrence s'exprime à l'aide d'une phrase, ou à l'aide d'une égalité ou inégalité, ou encadrement….

5) Les anglais appellent ce raisonnement *« induction »*, c'est beaucoup plus parlant !

Schéma récapitulatif du principe du raisonnement par récurrence :



Le raisonnement par récurrence permet donc de démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tou entier naturel n supérieur ou égal à un rang n_0 donné par l'énoncé.

Voyons différents exemples d'utilisation du raisonnement par récurrence :

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$

1) En effectuant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n >$

2) En déduire le sens de variation de cette suite.

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$

1) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n > 0$.

*) Etape d'initialisa° :

Pour $n=0$: Il faut expliquer que $u_0>0$.

Or $u_0=2$ et $2>0$, donc $u_0>0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

**) Etape d'hérédité : Soit n un entier arbitrairement fixé.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pr cet entier là càd on suppose que : $u_n>0$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd mq. $u_{n+1}>0$.

Or d'après l'énoncé : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}$.

Par hypothèse de récurrence : $u_n>0$, donc $u_n+1>1>0$.

Donc : $\dfrac{u_n}{u_n+1}>0$, bref $u_{n+1}>0$, donc $P(n+1)$ est vraie.

***) Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie càd $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.

2) D'après 1), $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$: utilisons donc la méthode des quotients :

Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}$

$a=\dfrac{b}{c}$ $\div b$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{1}}$ $\iff$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{c}$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{u_n+1}$

Or $u_n>0$, donc $u_n+1>1$

donc $\dfrac{1}{u_n+1}<\dfrac{1}{1}$ car la f° inverse décroît sur $]0;+\infty[$.

Bref, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

Donc (u_n) est décroissante.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 4$ (*)

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\times5^n + 1$.

Modèle de rédaction :

Soit $\mathcal{P}(n)$ **la propriété :** $u_n = 2\times5^n + 1$, **où** $n \in \mathbb{N}$.

1re étape : ***Initialisation*** : on doit vérifier que $\mathcal{P}(0)$ est vraie c'est-à-dire que : $u_0 = 2\times5^0 + 1$.
Or, par donnée, $u_0 = 3$, et $2\times5^0 + 1 = 2\times1 + 1 = 3$, donc on a bien $u_0 = 2\times5^0 + 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

2e étape : ***hérédité*** :
Soit n un entier naturel donné, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire que : $\underbrace{u_n = 2\times5^n + 1}_{\text{hypothèse de récurrence}}$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ **est vraie, c'est-à-dire montrons que :** $u_{n+1} = 2\times5^{n+1} + 1$.

Or, $u_{n+1} = 5u_n - 4$ [d'après l'énoncé (*)], et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 2\times5^n + 1$.

Donc, on a : $u_{n+1} = 5(2\times5^n + 1) - 4 = 2\times5^{n+1} + 5 - 4 = 2\times5^{n+1} + 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ **est vraie.**

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 0$; de plus elle est héréditaire pour tout entier naturel n, donc d'après le principe de récurrence, on a bien pour tout entier naturel n, $u_n = 2\times5^n + 1$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

a) Calculer u_1, u_2 sous forme de fraction irréductible.

b) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$

c) Faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

d) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que cette conjecture est vraie pour tout entier naturel n.

a) $u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2-0}$

$u_1 = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2-u_1}$

$u_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

c) Il semblerait que pr tt entier naturel n on ait : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

d) $n \in \mathbb{N}$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Etape d'initialisa° : Pour $n=0$: mq que $\mathcal{P}(0)$ est vraie càd que $u_0 = \frac{0}{0+1}$.

Or $u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier naturel qql.

hyp. de récurrence

Supposons que pr cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ est vraie càd que : $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Mq alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie càd mq : $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.) But

Or d'après l'énoncé : $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Donc : $u_{n+1} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2}{1}-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)}{n+1}-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}}$

$u_{n+1} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie, et pr tt entier n, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 4 *(Un très grand classique de bac, à maîtriser parfaitement.)*

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ la suite définie par : $u_0 = 1000$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}4u_n + 480$.

1a) En raisonnant par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est minorée par 800.

1b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer directement, sans utiliser la question 1), que la suite (u_n) décroit.

1a) Rappel : Dire que (u_n) est minorée par 800, cela signifit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 800$.

$n \in \mathbb{N}$:

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n \geq 800$.

Etape d'initialisa° : Pour $n=0$, mq $\mathcal{P}(0)$ est vraie càd que $u_0 \geq 800$.

Or $u_0 = 1000$ et $1000 \geq 800$ est vrai.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier abitrairement fixé.

Supposons que pr cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ est vraie càd que $u_n \geq 800$.) h.r.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd mq : $u_{n+1} \geq 800$.) but

Or par hypothèse de récurrence : $u_n \geq 800$

Donc $0{,}4 \times u_n \geq 0{,}4 \times 800$

$0{,}4u_n \geq 320$

Donc $0{,}4u_n + 480 \geq 320 + 480$

$u_n + 1 \geq 800$: donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à tout ordre.
Donc d'après le pce de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 800$.

Donc (u_n) est minorée par 800.

1b) Méthode de la différence :

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = 0,4u_n + 480 - u_n$

$u_{n+1} - u_n = -0,6u_n + 480$

Or d'après la q. 1a), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 800$.

Donc $-0,6u_n \leq -0,6 \times 800$ car $-0,6 < 0$.

Donc $-0,6u_n + 480 \leq -0,6 \times 800 + 480$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc (u_n) est décroissante.

2) $u_0 = 1000$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,4u_n + 480$

Mq que (u_n) décroît à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

On doit mq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_{n+1} \leq u_n$

Etape d'initialisa° : Mq $\mathcal{P}(0)$ est vraie, càd mq $u_1 \leq u_0$.

Or $u_0 = 1000$ et $u_1 = 0,4u_0 + 480 = 0,4 \times 1000 + 480$
$u_1 = 880$.

$880 \leq 1000$, donc $u_1 \leq u_0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier arbitrairement fixé.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour cet entier là càd supposons que :
$u_{n+1} \leq u_n$.

Montrons alors que : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd mq $u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Or par hyp. de récurrence : $u_{n+1} \leq u_n$

Donc $0,4u_{n+1} \leq 0,4u_n$

$0,4u_{n+1} + 480 \leq 0,4u_n + 480$

$u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à tout ordre.

Donc d'après le pce de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

Donc (u_n) décroît.

Exercice 5

Démontrer que pour tout réel x et tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Faisons un raisonnement par récurrence :

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(e^x)^n = e^{nx}$

Etape d'initialisation :

Pour $n = 0$: Mq $\mathcal{P}(0)$ est vraie, à savoir que : $(e^x)^0 = e^0$.

Or $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0 \times x} = e^0 = 1$.

Donc $(e^x)^0 = e^{x \times 0}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier naturel arbitrairement fixé.

On suppose que pr cet entier là $\mathcal{P}(n)$ est vraie càd supposons que : $(e^x)^n = e^{nx}$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd mq : $(e^x)^{n+1} = e^{(n+1)x}$.

Or $(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times (e^x)^1$ et par h. r., $(e^x)^n = e^{xn}$.

Donc : $(e^x)^{n+1} = e^{xn} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le p^ce de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^x)^n = e^{xn}$.

Exercice 6

Montrer que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est un multiple de 3. (Vu en exemple d'introduction p.7).

$n \in \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $4^n - 1$ est un multiple de 3.

càd : il existe un entier k tel que : $4^n - 1 = 3k$.

Etape d'initialisa° : Pour $n = 0$:

Mq $4^0 - 1$ est un multiple de 3.

Or $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$: donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier naturel qql tel que $\mathcal{P}(n)$ est supposée vraie, càd que : $4^n - 1 = 3k$ avec k entier.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd justifions que : $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3 càd qu'il existe un entier l tel que : $4^{n+1} - 1 = 3l$.

Or H.R : $4^n - 1 = 3k$ avec k entier

Donc : $4^n = 3k + 1$

Donc : $4 \times 4^n = 4(3k+1)$

Donc : $4^{n+1} = 3 \times 4k + 4$

$4^{n+1} - 1 = 3 \times 4k + 4 - 1$

$4^{n+1} - 1 = 3 \times 4k + 3$

$4^{n+1} - 1 = 3(4k+1) = 3l$ avec $l = 4k+1$ (entier)

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et pr tt entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire

Donc d'après le p^{ce} de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est multiple de 3.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.

On procède en raisonnant par récurrence :

$n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$.

Etape d'initialisation :

Mq $\mathcal{P}(0)$ est vraie càd mq : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 7$.

Or $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{7u_0} = \sqrt{7 \times 2} = \sqrt{14}$, et $\sqrt{14} \approx 3{,}7$.

Donc on a bien : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 7$!

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier naturel qql :

Supposons que pr cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, càd supposons que :

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie càd montrons que :

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 7$.

Or par h.r : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$

$u_n \xrightarrow{\times 7} 7u_n \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{7u_n} = u_{n+1}$

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$

Donc : $7 \times 0 \leq 7u_n \leq 7u_{n+1} \leq 7 \times 7$

$0 \leq 7u_n \leq 7u_{n+1} \leq 49$

$\sqrt{0} \leq \sqrt{7u_n} \leq \sqrt{7u_{n+1}} \leq \sqrt{49}$ car la f° $\sqrt{\ }$ croît sur $[0 ; +\infty[$.

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 7$: donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 7$.

b) Grâce à q. a) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, donc (u_n) est croissante.

(u_n) est bornée (un minorant est 0, un majorant est 7).

Remarques

1) Il faut rester lucide avant de faire une récurrence : si on vous demande de justifier que pour tout entier naturel n, $(2n-1)^2 > 0$, il serait grotesque de procéder par récurrence ! Pourquoi ? carré tjs > 0.

2) D'aucuns peuvent se demander l'utilité de l'étape d'initialisation dans le raisonnement par récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : pour tout entier naturel n, $n = n + 1$.

Démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire, sans pour autant être vraie. Conclusion ? Si $n = n+1$, alors $n+1 = n+1+1$, donc $n+1 = n+2$, donc $\mathcal{P}(n+1)$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. ! $\mathcal{P}(n)$ est faux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⚠ Pas de raisonnement pr résoudre sans avoir fait l'étape d'initialisa°.

3) Dans les copies, on voit parfois fleurir l'étape d'hérédité rédigée comme suit :

« *Supposons que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie* ».

Que pensez-vous de ce mode de rédaction ?

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour <u>tout</u> entier naturel n, alors il n'y a plus rien
prouver : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Un exercice classique de baccalauréat

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0{,}4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a) A l'aide d'une calculatrice, émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n), et conjecturer un minorant et un majorant de la suite (u_n).

b) Déterminer une fonction f, telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

c) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; \frac{1}{2}]$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

e) Qu'en déduisez-vous concernant les conjectures effectuées à la question *a)* ?

---

a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	0,4	0,24	0,18	0,15	0,13	0,11	0,1	0,09	0,08	0,07

arrondi à 0,01 près

Il semblerait que la suite (u_n) soit décroissante et que (u_n) est majorée par 0,4 et minorée par 0.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$ où f est la f° définie par $f(x) = x - x^2$.

c) $x \in [0; \frac{1}{2}]$ et $f(x) = x - x^2 = -x^2 + x$

*) $f'(x) = -2x + 1$

**) Etude du signe de $f'(x)$ sur $[0; \frac{1}{2}]$:

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Donc :

x	0		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

f croît sur $[0; \frac{1}{2}]$.

$f(0) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

d) On résonne ici par récurrence :

$n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Etape d'initialisa* : Pour $n = 0$: mq : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$.

Or d'après 1a) : $u_0 = 0{,}4$ et $u_1 = 0{,}24$: $0 \leq 0{,}24 \leq 0{,}4 \leq 0{,}5$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit un entier naturel qql.

Supposons que pr cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie càd que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

Mq $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie càd : $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Par h.r : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

Donc $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(\frac{1}{2})$ car f croît sur $[0; \frac{1}{2}]$.

$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$.

Or $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$.

Donc on a : $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie càd : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

e) Cela signifie que : (u_n) décroît et qu'elle est minorée par 0 et majorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 8 (Inégalité de *Bernoulli* (sera utilisée dans la suite du cours)).

Soit x un réel positif ou nul. Démontrer que pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

→ Avant de commencer l'exercice 9, commençons par des rappels sur la notation $\sum$ et les sommes.

$\sum$ désigne la lettre S majuscule en Grec, et en mathématiques signifie la somme !

$\sum_{k=1}^{4} k^2$

Par exemple : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ se notera : $\sum_{k=1}^{4} k^2$: il faut comprendre qu'on donne à k (appelé l'indice de la somme, l'indice étant toujours un entier) successivement les valeurs 1,2,3 et 4 (k avance régulièrement de 1 en 1, en commençant à la valeur 1 et en terminant à la valeur 4) et qu'on ajoute entre-elles les carrés de ces valeurs.

Par exemple : $\sum_{k=0}^{5} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$ $(= 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364)$.

L'intérêt d'une telle notation est qu'elle condense les écritures et permet d'éviter les pointillés.

Dans l'absolu, la notation : $\frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \ldots + \frac{2}{5^{18}}$ est incorrecte, et se note rigoureusement : $\sum_{k=1}^{18} \frac{2}{5^k}$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a_{n+1} des réels.

Pour les exercices, il est fort utile d'avoir compris l'évidence (?) suivante :

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$: on ne fait qu'éclater en deux la première somme écrite, en sortant son dernier terme !!!

car : $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$.

Grâce aux rappels sur les sommes, vous pouvez aborder sereinement l'exercice 9 :

Ex 8

$x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

On procède par récurrence :

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Initialisa° : Pour $n = 0$: justifions que : $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$

Or $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0x = 1$, et $1 \geq 1$ est vraie.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel qql.

Supposons que pr cet entier là $\mathcal{P}(n)$ est vraie, càd que :

$(1+x)^n \geq 1 + nx$

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, à savoir que :

$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$

Or par h.r : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

Donc : $(1+x)\times(1+x)^n \geqslant (1+x)\times(1+nx)$

Donc : $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+nx+x+nx^2$

$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2$. Or $nx^2 \geqslant 0$ car $n \in \mathbb{N}$

Donc $1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pr tt entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le p^ce de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, càd :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;+\infty[$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

a) On procède par récurrence :

$n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}(n)$ est la propriété : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

. Etape d'initialisation :

Pour $n=1$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$

Et $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

. Etape d'hérédité : Soit n un entier non nul fixé pr lequel on suppose vraie $\mathcal{P}(n)$, càd que :

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, à savoir que :

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Or, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4} + (n+1)^3$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$: Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire

Donc d'après le p$^{\text{ce}}$ de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 9 question b)

$n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{S}(n)$ la propriété : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Raisonnons par récurrence pour établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(n)$ est vraie :

Initialisation : Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$ (car $1=1$!), donc $\mathcal{S}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé.

Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{S}(n)$ soit vraie, à savoir que : $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$

Montrons alors que $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie, c'est à dire

montrons que : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ (But).

Or (principe d'éclatement d'une somme) :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2} + (n+1)^2$$

et par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, de sorte qu'en remplaçant dans la ligne précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

on factorise !

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+ \ldots}{6}$$

Enfin (regardez ce à quoi on doit aboutir pour $\mathcal{S}(n+1)$!), en développant l'expression :

$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = \underline{2n^2 + 7n + 6}$

D'où $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{S}(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(n)$ est vraie, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 =$

III Calcul des termes d'une suite récurrente à l'aide d'un algorithme

Prenons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -3u_n + 7$.

But : On veut écrire un algorithme qui affiche en sortie la valeur de u_N pour un entier N du choix de l'utilisateur :

L'idée est de comprendre que l'on va répéter N fois un calcul similaire à partir de la valeur initiale u_0.

On stocke donc en mémoire dans une variable nommée U la valeur 2 qui correspond à u_0.

En pseudo code, cela est noté : $U \leftarrow 2$ (et signifie : affecter à la variable U la valeur 2, ou encore, plus simplement, U prend la valeur 2).
Puis on crée un compteur de boucle qui va compter le nombre de répétitions effectuées (*Boucle Pour*)

Voici le programme écrit en *pseudo code* :

```
Demander à l'utilisateur l'entier naturel N de son choix.
U←2
Pour K variant de 1 à N, faire :
  U←-3U + 7
Fin de pour
Afficher U en sortie
```

Il faut bien comprendre quand on dit que K varie de 1 à N, que K, qui est une variable muette (on aurait pu l'appeler L, I…), va ***successivement prendre les valeurs entières en commençant à la valeur* 1, *et en terminant à la valeur N***, et que pour chacune de ces valeurs, on remplace la valeur stockée dans la variable U par $-3U + 7$.

Comprenons comment fonctionne ce programme lorsque l'utilisateur choisit $N = 2$ par exemple :

Si $N = 2$:
$U = 2$
Pour K variant de 1 à 2 :
Pour $K = 1$: $U = -3 \times 2 + 7 = 1$
Pour $K = 2$: $U = -3 \times 1 + 7 = 4$

Affichage : $U = 4$.

Malheureusement, sur la calculatrice, on ne peut pas coder en pseudocode !
Il existe deux langages : le langage basic (désuet et peu pratique, dont on ne se servira pas) et *Python*.

Voici un programme en *Python* qui permet de réaliser l'algorithme voulu :

En *Python*, l'instruction : $u = 2$ signifie que la variable u prend la valeur 2.
L'instruction : *for k in range* (n) signifie que l'entier k *vérifie la condition* : $0 \leq k < n$, *et prend successivement les valeurs* 0 ; 1 ; ….. *et pour dernière valeur* $n - 1$.

Attention dans l'inégalité : $0 \leq k < n$, la valeur n est exclue !

```python
def u(n):
    u=2
    for k in range (n):
        u=-3*u+7
    return u
```

Vous téléchargerez Python sur : https://edupython.tuxfamily.org/

Python s'utilise bien sur un ordinateur ou tablette, mais c'est très moche sur calculatrice !

L'essentiel pour le bac est de comprendre une procédure (= un script) donnée, écrite en Python, ce n'est pas grave si au début ça bug pas mal quand vous programmez : (oubli récurrent des : , du signe multiplié * (à mettre obligatoirement) , indentation non respectée…).

Dans la console, si on veut calculer u_5 il suffira de taper : u(5) puis entrée le résultat s'affichera alors.
$u(5) = -59$

Combien vaut u_8 ? $u_8 = 1642$.

Remarques : on utilise fréquemment l'instruction : *for k in range (0, n)* qui signifie que l'entier k vérifie la double inégalité : $0 \leq k < n$.

Et si l'on tapait *: for k in range* **(1, n+1)**, le programme serait-il correct ?
↳ $1 \leq k < n+1$ donc k prend successivement pr valeurs : 1 ; 2 ; … n, càd en tt n valeurs. m̂ résultat

Comment afficher à l'écran tous les termes d'une suite jusqu'à un rang n choisi par l'utilisateur ? Cela peut être utile pour établir une conjecture.

Pour afficher ***tous les termes jusqu'à celui de rang n*** d'une suite, on utilise des listes :

Par exemple, considérons la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$.

L'algorithme ci-dessous, à retenir, génère en sortie les termes : $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$ où n est choisi par l'utilisateur.

En pseudo code :

$A \leftarrow 0$	..........> Initialement A prend la valeur 0 car $u_0 = 0$.
$L \leftarrow [A]$	..........> Au départ, la liste L contient seulement l'élément u_0.
Pour k variant de 1 à n	...........> On répète n fois une même instruction
$A \leftarrow A^2 - 5$	...........> On calcule un terme à partir du précédent contenu dans A
$L \leftarrow L + [A]$	............> Le terme calculé à l'étape précédente est inséré dans la liste L.
Fin de pour	
Retourner L	....> En fin du programme, L contient tous les termes de la suite, de u_0 à u_n .

En Python :

```
def termes_u(n):
    A=0
    L=[A]
    for k in range (n):
        A=A*A-5
        L=L+[A]
    return(L)
```

ou encore :

```
def termes_u(n):
    A=0
    L=[A]
    for k in range (1,n+1):
        A=A*A-5
        L=L+[A]
    return(L)
```

Exemple

$A \leftarrow -1$
$L \leftarrow [A]$
Pour k variant de 1 à n
  $A \leftarrow 2A+3$
  $L \leftarrow L + [A]$
Fin de pour
Retourner L

a) L'utilisateur choisit $n = 2$. Déterminer le contenu de la liste L en sortie de programme.
b) Quel est le rôle de cet algorithme vis-à-vis d'une suite à définir ?
c) Coder cet algorithme en Python.

a) $A = -1$
$L = [-1]$

Pour k allant de 1 à 2 :

$k = 1$: $A = 2 \times (-1) + 3 = 1$

$L = [-1 ; 1]$

$k = 2$: $A = 2 \times 1 + 3 = 5$

$L = [-1 ; 1 ; 5]$

b) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$

Cet algo affiche la liste $[u_0 ; u_1 ; \dots u_n]$ pour l'entier n du choix de l'utilisateur.

Voici deux questions indépendantes d'un même sujet de baccalauréat (2023) :
A-

On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste L de nombres en paramètre.

On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste L.

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

Ici len (L) = 10
L [i]
↳ n° de la posi°

$S = (1+9+9+5+0+3+6+12+0+5) \div 10$
$S = 50 \div 10$
$\underline{\underline{S = 5}}$

Affirmation : L'exécution de `mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])` renvoie 50.

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier. Faux !

B-

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

B-

1.a. $n \in \mathbb{N}$
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$

• Etape d'initialisation :

Pour $n = 0$, justifions que : $u_0 : 2 \times 0,9^0 - 3$

Or $u_0 = -1$ et $2 \times 1 - 3 = -1$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Etape d'hérédité : Soit un entier qql n :

Supposons que pr cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, càd : $u_n = 2 \times 0,9^n$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, càd mq : $u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$.

Or d'après l'énoncé : $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$

D'après l'h.r : $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$

$u_{n+1} = 0,9(2 \times 0,9^n - 3) - 0,3$

$u_{n+1} = 2 \times 0,9^{n+1} - 3$: Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Donc d'après le p^{ce} de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times 0,9^n - 3$.

b. $2 > 0$; $0,9 > 0$ donc $0,9^n > 0$, donc $2 \times 0,9^n > 0$, donc $2 \times 0,9^n - 3 > -3$

donc $u_n > -3$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0,9^n \leq 1$ car : $0 \leq 0,9 \leq 1$

$0^n \leq 0,9^n \leq 1^n$ car $x \to x^n$ croit sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $2 \times 0,9^n \leq 2$

Donc $2 \times 0,9^n - 3 \leq 2 - 3$

$u_n \leq -1$

Donc $-3 < u_n \leq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. Méthode de la différence :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n &= 2 \times 0,9^{n+1} - 3 - (2 \times 0,9^n - 3) \\ &= 2 \times 0,9^{n+1} - 3 - 2 \times 0,9^n + 3 \\ &= 2(0,9^{n+1} - 0,9^n) \\ &= 2 \times 0,9^n (0,9 - 1) \\ &= -0,2 \times 0,9^n\end{aligned}$$

$0,9^n > 0$ et $-0,2 < 0$ donc $-0,2 \times 0,9^n < 0$.

Donc la suite (u_n) décroit.