« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques. » Blaise Pascal

Chapitre III — **Limites de suites**

I - La notion de limite

(*) « la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ »

A- Limite infinie de suite

Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, cela signifie que les valeurs prises par cette suite ***finissent par dépasser, à partir d'un certain rang, n'importe quel nombre arbitrairement fixé, aussi grand soit-il.***

On notera : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, et on dira que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

En d'autre termes, tout intervalle ouvert de la forme : $]A\,;+\infty[$, où A est un réel quelconque contient tous les termes de la suite *à partir d'un certain rang.*

Illustration :

Aussi grand que soit le nombre réel A, on peut trouver un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A$.

En termes imagés « aussi haute que l'on place la barrière horizontale A, les termes u_n parviennent à passer définitivement au-dessus ».

Propriété *(limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)*

Les suites définies sur N par : $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$ et $z_n = \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$

On a donc : ♥♥♥♥ $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ / $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ / $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ / ♥♥♥♥ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Ces résultats, ***d'usage quotidien*** tout au long de l'année, sont à connaître impérativement et sans hésitation…

Prouvons par exemple que : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$: soit A un réel positif fixé : on cherche à partir de quel rang on a $\sqrt{n} \geq A$

$n \geq A^2$ ↓ la fct° carrée croît sur $[0,+\infty[$

$n \geq A^2$ et n est entier reviennent à dire que $n \geq n_0$ où $n_0 = E(A^2)+1$

où $E(A^2)$ désigne la partie entière de A^2.

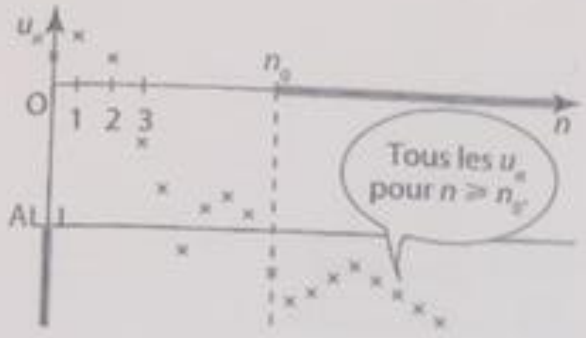
Cela prouve que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty}$

De la même manière, l'écriture $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme : $]-\infty\,;A[$, où A est un réel quelconque, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Δ $-\infty \notin \mathbb{R}$
$+\infty \notin \mathbb{R}$

Illustration :



Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur N par : $u_n = -n^2$.
Cette suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

B – Limite finie de suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) admet pour limite un nombre réel L signifie que tout intervalle ouvert centré en la valeur L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On notera $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, et on dira que la suite (u_n) converge vers L, ou encore, par abus de langage, que u_n tend vers L lorsque n tend vers $+\infty$.

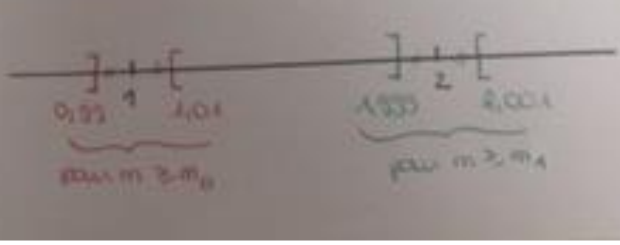
Illustration :

Ici pr $n \geq 5$,
$u_n \in]L-\varepsilon ; L+\varepsilon[$

A partir d'un certain rang, les termes de la suite *s'accumulent* autour de L.

Remarque : il y a unicité de la limite sous réserve d'existence.

Idée de la démonstration :



→ si $n \geq n_0$
et $n \geq n_1$
il n'appartient
pas aux 2
intervalles car elles
sont disjointes.

Propriété *(limites de suites de référence, d'usage quotidien pour la suite)* ⟶ Rr

♥♥ Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et ont pour limite 0

On a donc : ♥♥♥♥ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ / $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ / $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ♥♥♥♥

C - Suites n'admettant pas de limite

Il existe des suites n'admettant pas de limite (*ni finie, ni infinie*).

Exemple : Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : $u_n = (-1)^n$.

Illustration :

Les valeurs prises par cette suite, sont alternativement 1 et -1

$u_n = 1$ si n est pair
$u_n = -1$ si n est impair } (u_n) est bornée
↳ elle diverge grossièrement

Définition

Une suite qui *n'est pas convergente* est dite *divergente*.

Soit (u_n) une suite divergente :
On a donc plusieurs alternatives possibles : soit u_n tend vers $+\infty$, soit u_n tend vers $-\infty$, soit u_n ne se rapproche d'aucun nombre fixe.

Exemples de suites divergentes

1) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$ diverge vers $+\infty$.

2) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = -n$ diverge vers $-\infty$.

3) La suite (u_n) définie par, pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^n$ diverge (elle prend alternativement les valeurs 1 et −1).

II – Opérations sur les limites (☛ *ce paragraphe est le plus important du chapitre.*)

A- Limite d'une somme ⟶ Rs

Soit (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Soit L et L' deux réels.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Exemples

Soit (u_n) la suite définie sur $ℕ^*$ par : $u_n = \frac{1}{n} + n^2$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Par limite de référence

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n^3 + n^2 + 3$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Par lim de réf on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$

donc par limite de somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) : $u_n = n$ et $v_n = -2n$) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = n - 2n = -n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty}$

- autre ex

$u_n = n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$v_n = -n + 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n + v_n = n - n + 1 = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 1}$

II – Limite d'un produit → QP

Soit (u_n) et (v_n) deux suites admettant une limite (finie ou infinie). Soit L et L' deux réels.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indé

au cas par cas

Exemples → se faire apparaître le prdt en factorisant
Lorsqu'une forme indé apparaît on commence

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})(-n+4)$ b) $v_n = \frac{4}{n}$ c) $w_n = n^2 - 2022n$ d) $x_n = \sqrt{n} - 2n$

a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+4)$ produit de somme

par limite de réf • $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1}$

• $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (-n + 4) = -\infty}$

par limite de prdt $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

b) $v_n = \frac{4}{n} = 4 \times \frac{1}{n}$ par lim de réf $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc par lim de prdt $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

$\left(\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty}(-2022n) = -\infty\right) \to$ forme indét. de la somme

c) $w_n = n^2 - 2022n$ } factoriser

$w_n = n(n-2022)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-2022) = +\infty$

d'où par lp $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty}(n(n-2022)) = +\infty\right)$

d) $z_n = \sqrt{n} - 2n$ (avec comme on a vu en 1) $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$, $n = (\sqrt{n})^2$

factorisons • $z_n = \sqrt{n} - 2(\sqrt{n})^2 = \sqrt{n}(1-2\sqrt{n})$

ou $z_n = n\left(\frac{\sqrt{n}}{n} - 2\right) = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)$ car $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

• or par lp $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ et $-2<0$ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(-2\sqrt{n}) = -\infty}$

d'où par ls $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2\sqrt{n}) = -\infty}$

d'où par lim de produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}(1-2\sqrt{n}) = -\infty \to \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = -\infty}$

• $u_n = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
$v_n = n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ } $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times n = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = 1}$

• $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = n^2$ } $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ } $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times n^2 = n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = +\infty}$

Calculs

$2n^3 + 5n^2 + n + 1 = n^3\left(2 + \frac{5n^2}{n^3} + \frac{n}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right) = n^3\left(2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$

On retiendra donc que lorsqu'on est en présence d'une forme indéterminée, tenter une factorisation *permet fréquemment de lever l'indétermination.*

Donnons quelques exemples pour bien comprendre la dernière colonne du tableau (forme indéterminée) :

__C – Limite d'un quotient__

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	0	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	$-\infty$ ou $+\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	FI	FI

• $U_n = n \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

$V_n = 2n \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ $\Bigg\}$ $\frac{U_n}{V_n} = \frac{1}{2}$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{1}{2}}$

• $W_n = n^2$ $\quad \frac{U_n}{W_n} = \frac{1}{n}$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{W_n} = 0}$

• $U_n = \frac{1}{n}$ et $V_n = \frac{2}{n}$ $\quad \lim U_n = 0 \quad \lim V_n = 0$

$\frac{U_n}{V_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{2} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \frac{1}{2}}$

exemples

a) $U_n = \frac{2}{n^2 + n - 1}$ par le $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n - 1) = +\infty$

par so $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + n - 1) = +\infty}$

de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$

dc par lq $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n^2 + n + 1} = 0\right)$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

b)

Exemples

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{2}{n^2 + n - 1}$; *b)* $v_n = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$; *c)* $w_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$ *d)* $z_n = \dfrac{-2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 4}$

$V_n = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$ par le $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

dc par limite de sommes $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$

dc par lq $\lim \left(\dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}\right) = \frac{1}{2}$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \frac{1}{2}}$

c) $W_n = \dfrac{n+5}{n^2+1} \longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (n+5) = +\infty$ / $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$

dc : FI par le quotient

$$w_n = \frac{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

par ls $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

dc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$

par lq $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 1$ par lp $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 0$

ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$ la suite converge vers 0

d) $$z_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+n+4} = \frac{n^2\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}$$

par ls $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

dc par ls $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = -2$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right) = 3$

dc par lq $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (z_n) = \frac{-2}{3}}$

__Remarque__ : On retiendra donc qu'il existe, en terminale, ***4 types de formes indéterminées***, que l'on note ***abusivement*** :

$$"\infty-\infty" ; "0\times\infty" ; "\frac{\infty}{\infty}" ; "\frac{0}{0}"$$

On s'interdira d'utiliser ces abus dans la rédaction, __cela doit rester mental__ !

Contrairement à une idée faussement répandue, "$\frac{\infty}{0}$" n'est pas une forme indéterminée !

$$\left.\begin{matrix} L \to +\infty \\ 0 \end{matrix}\right\} +\infty.$$

__III– Limites obtenues par comparaison ou encadrement__

♥♥ *__Théorème de comparaison pour les limites infinies__* ♥♥

Soit (u_n) et (v_n) deux suites :

1) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) Si à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

En des termes imagés, ce théorème dit : ⊛

1) Soit A un réel arbitrairement fixé (aussi grand soit-il)

Preuve : Il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geq p$, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ donc il existe un rang q tel que pour tout entier $n \geq q$, $v_n \geq A$.

Exemple Par suite, pour tout entier n à la fois supérieur à p et à q on a $u_n \geq v_n \geq A$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Déterminer, en justifiant, la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 2n + (-1)^n$ *b)* $v_n = \cos(n) - n$

a) $u_n = 2n + (-1)^n$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1, 1\}$

donc $(-1)^n \geq -1$

donc $(-1)^n + 2n \geq -1 + 2n$

$$\boxed{u_n \geq 2n - 1}$$

or $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (2n - 1) = +\infty}$

donc d'après le théorème de comparaison on a

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

⊛ Si les valeurs prises par une suite sont supérieures à celles prises par une autre suite qui diverge vers $+\infty$, alors cette première suite diverge aussi vers $+\infty$

b) on admet que $(\cos(n))$ est une suite qui diverge grossièrement

Rappel : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

donc $-1 - n \leq \cos(n) - n \leq 1 - n$

$$\boxed{v_n \leq 1 - n}$$

or $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - n) = -\infty}$

donc par th de comp $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty}$

Exercice 3

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 4$, par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a) Ecrire l'expression de u_n à l'aide du symbole $\sum$

b) Justifiez que pour tout entier k, si $1 \leq k \leq n$, alors on a : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, puis en déduire que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $u_n \geq \sqrt{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

---

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

b) On sait que $1 \leq k \leq n$

donc $\sqrt{1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ car fct° $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[0, +\infty[$

$1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n}$

par suite $\frac{1}{1} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ car fct° inverse décroit sur $[1, +\infty[\subset]0, +\infty[$

donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$

écrivons la relat° $\frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $k = 1$ $1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

pour $k = 2$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $k = 3$ $\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

pour $k = n$ $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$

→ on additionne membre à membre les n inégalités du m sens

$$\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{u_n} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ terme}}$$

$$u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \times n$$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

donc $\boxed{u_n \geq \sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si $n \geq 4$

c) on a $U_n \geq \sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

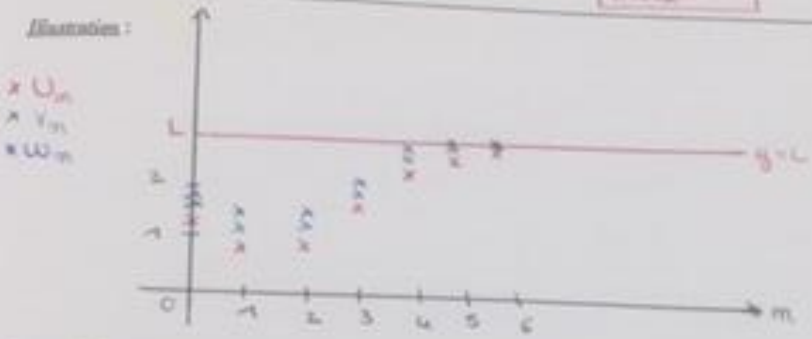
donc d'après le th de comp $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

♥♥♥♥ ***Théorème d'encadrement (communément appelé théorème des gendarmes)*** ♥♥♥♥

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.

Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la *MEME* limite L avec L réel, alors, (V_n) converge vers L aussi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = L}$

Illustration :



On retiendra bien qu'il faut que 3 conditions soient vérifiées pour pouvoir appliquer ce théorème :

1) avoir le double encadrement $u_n \leq V_n \leq W_n$

2) les suites (u_n) et (W_n) convergent

3) (U_n) et (W_n) ont la même limite.

Preuve du théorème sous forme d'exercice corrigé :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels définies sur $\mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe un entier p tel que pour tout entier naturel $n \geq p$, on ait : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

On suppose de plus que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel L.

Alors, la suite (w_n) converge également vers L.

Soit ε un réel strictement positif fixé.

- ✓ **Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, que l'on nommera q, on a : pour tout entier naturel $n \geq q$, $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$**
- ✓ **Expliquer pourquoi, à partir d'un certain rang, que l'on nommera r, on a : pour tout entier naturel $n \geq r$, $L - \varepsilon \leq w_n \leq L + \varepsilon$**
- ✓ **En déduire qu'il existe un entier naturel nommé s, que l'on exprimera en fonction de p, q et r, tel que pour tout entier naturel $n \geq s$, on ait : $L - \varepsilon \leq v_n \leq L + \varepsilon$**
- ✓ **Conclure alors quant à la démonstration du théorème des gendarmes.**

$w_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{2n}$

dc $\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ car $\sqrt{n} > 0$

dc $\boxed{\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant V_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

or par lim de ref $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) = 0$

Exemples fondamentaux

Déterminer les limites des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}^*$:

a) $v_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$; *b)* $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$; *c)* $w_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{2n}$

a) $v_m = \dfrac{\sin(m)}{\sqrt{m}}$ → $(\sin(m))_{m \in \mathbb{N}}$ diverge grossièrement.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(m) \leq 1$.

or $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(m) \leq 1$

dc $\dfrac{-1}{\sqrt{m}} \leq \dfrac{\sin(m)}{\sqrt{m}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{m}}$ car $\sqrt{m} > 0$

dc $\boxed{\dfrac{-1}{\sqrt{m}} \leq v_m \leq \dfrac{1}{\sqrt{m}}}$

or par lim de ref $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{\sqrt{m}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right) = 0$

dc d'ap le th des gendarmes

(v_m) converge vers 0 cad $\boxed{\lim\limits_{m \to +\infty} v_m = 0}$

b) $u_m = \dfrac{m + (-1)^m}{m}$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$ $-1 \leq (-1)^m \leq 1$

donc $m - 1 \leq m + (-1)^m \leq m + 1$

donc $\dfrac{m-1}{m} \leq \dfrac{m + (-1)^m}{m} \leq \dfrac{m+1}{m}$ car $m > 0$

$\boxed{\dfrac{m-1}{m} \leq u_m \leq \dfrac{m+1}{m}}$

$\dfrac{m}{m} - \dfrac{1}{m} \leq u_m \leq \dfrac{m}{m} + \dfrac{1}{m}$

dc $\boxed{1 - \dfrac{1}{m} \leq u_m \leq 1 + \dfrac{1}{m}}$

or par la $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc par la $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

d'après le th des gendarmes (U_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$

IV- Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un réel, et considérons la suite (q^n) définie sur $\mathbb{N}$. suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ (suite constante et égale à 1).
- Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge grossièrement

Moyen : ♥♥ une suite géométrique de raison q converge si et seulement si $-1 < q \leq 1$ ♥♥

Preuve dans le cas où $q > 1$: $q > 1$ donc $q = 1 + x$ avec $x > 0$
donc pour tout entier n, $q^n = (1+x)^n$
d'après l'inégalité de Bernoulli, on a comme $x > 0$:
$\underbrace{(1+x)^n}_{q^n} \geq 1 + nx$ (cf chap 2) donc
$q^n \geq 1 + nx$

or $x > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nx = +\infty$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + nx) = +\infty$
donc d'après le th de comparaison
$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$
la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exemples

1) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n}$

2) Soit $v_n = (-\frac{1}{2})^n$. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

---

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n$ ici $q = e \approx 2{,}718$ et $e > 1$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty}$

$e^{-2n} = (e^{-2})^n = q^n$ avec $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ $q \approx 0{,}135$

donc ici $-1 < q < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n} = 0}$

2) $V_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ suite géo de raison $q = -\frac{1}{2}$

or $-\frac{1}{2}$ $\quad -1 < \frac{-1}{2} < 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0}$

Exercice 2

Déterminer : *a)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2^n}{e^n}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,75^n - 4\times 0,3^n$; *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n+6^n}$

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1+2^n}{e^n}\right)$

$$\frac{1+2^n}{e^n} = \frac{1}{e^n} + \frac{2^n}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

or $\frac{1}{e} \approx 0,236$ et $\frac{2}{e} = \frac{1}{e} \times 2 \approx 0,472$

donc $-1 < \frac{1}{e} < 1$ et $-1 < \frac{2}{e} < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$

donc par lim de somme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1+2^n}{e^n}\right) = 0}$

b) $V_n = 1,75^n - 4 \times 0,4^n$

$1,75 > 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 1,75^n = +\infty}$

$-1 < 0,3 < 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3^n = 0}$

par lim de produit puis de sommes

$\lim\limits_{n \to +\infty} (1,75^n - 4 \times 0,3^n) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n + 6^n}$ FI ? car de type $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$Z_n = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{6^n\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1\right)} = \frac{3^n}{6^n} \times \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1\right)}$$

or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ dc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

de même $-1 < \frac{2}{3} < 1$ dc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

par ls $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right) = 1$

par lq puis lp $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0}$

Exercice 2

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 0,\underbrace{444...4}_{n \text{ fois}}$

Etudier la limite de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0,\underbrace{444...4}_{n \text{ fois}}$ Rq $u_1 = 0,4 = \frac{4}{10}$
$u_2 = 0,44 = \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$ ...

$u_{n+1} = u_n + \frac{4}{10^{n+1}}$

$u_n = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots \frac{4}{10^n}$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{10^k}$ or $\frac{1}{10^k} = 10^{-k}$ dc $u_n = \sum_{k=1}^{n} 4 \times 10^{-k} = \sum_{k=1}^{n} 4 \times (10^{-1})^k$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} 4 \times 0,1^k$ soit $q = 10^{-1} = 0,1$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} 4 \times q^k$

en factorisant par 4 : $u_n = 4 \times \sum_{k=1}^{n} q^k = 4 \times \sum_{k=1}^{n} 0,1^k$ somme des n premiers termes d'une suite géo de raison $q = 0,1$

Rappel si $q \neq 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} q^k = \underbrace{q}_{1^{er}\text{ terme}} \times \frac{1-q^n}{1-q}$ raison q, n nb de terme de la suite.

ici $u_n = 4 \times 0,1 \times \frac{1 - 0,1^n}{1 - 0,1} = \frac{0,4}{0,9}(1 - 0,1^n) = \boxed{\frac{4}{9}(1 - 0,1^n)}$

$-1 < 0,1 < 1$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1^n = 0}$

dc par ls et lp $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{4}{9}}$

On vient de démontrer que $0,444\ldots4 = \frac{4}{9}$

$$\begin{cases} a = 0,444\ldots4 \\ 10a - a = 4 \\ 9a = 4 \\ a = \frac{4}{9} \end{cases}$$

c) des exemples

$$w_n = \frac{n^2 + \cos(n)}{n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1$

donc $n^2 - 1 \leq n^2 + \cos(n) \leq 1 + n^2$

$$\frac{n^2-1}{n} \leq \frac{n^2+\cos(n)}{n} \leq \frac{n^2+1}{n} \quad \text{car } n > 0$$

$$\frac{n^2}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{n^2+\cos(n)}{n} \leq \frac{n^2}{n} + \frac{1}{n}$$

$$n - \frac{1}{n} \leq \underbrace{\frac{n^2+\cos(n)}{n}}_{w_n} \leq n + \frac{1}{n}$$

en particulier $w_n \geq n - \frac{1}{n}$ or par lc $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n} = 0$

donc par ls $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - \frac{1}{n}\right) = +\infty$

D'ap le Th de comp des limites $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty}$

⚠ le Th des gendarmes est un Th pour prouver la convergence d'une suite tandis que le Th de comparaison est lui un Th qui permet de prouver la divergence (vers $+\infty$ ou $-\infty$) d'une suite

Exercice 4

(u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{e^{2n}+n+1}$. En utilisant un théorème de comparaison, déterminer la limite de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sqrt{e^{2n}+n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $e^{2n}+n+1 \geq e^{2n}$

$\sqrt{e^{2n}+n+1} \geq \sqrt{e^{2n}}$ car la f° $\sqrt{\ }$ croît sur $[0,+\infty[$

donc $U_n \geq \sqrt{e^{2n}}$ donc $U_n \geq \sqrt{(e^n)^2}$ donc $U_n \geq e^n$ *

or $e > 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty}$ **

Donc * et ** permettent d'appliquer le th de comp

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

V- Algorithme sur les suites (boucle While)

Algorithme de détermination d'une valeur seuil

On considère une population de bactéries dont la population augmente de 40 % toutes les heures. On note u_n le nombre de milliers de bactéries après n heures, et on donne $u_0 = 1$ (quantité initiale de bactéries).

a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer le sens de variation de cette suite.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) En déduire qu'il existe un rang, noté n_0, à partir duquel $u_n \geq 10$.

e) On considère l'algorithme suivant écrit en langage naturel :

VARIABLES :	A, n nombres, A de type réel, n de type entier.
ENTREE :	*Demander la valeur de A.*
INITIALISATION :	Affecter à n la valeur 0. (On notera : $n \leftarrow 0$).
TRAITEMENT :	*Tant que* $1{,}4^n < A$ → condition | *Remplacer* n par $n+1$. (On notera : $n \leftarrow n+1$). → "instruction" *Fin du Tant que*
SORTIE :	*Afficher* n.

Que fait concrètement cet algorithme ?

f) Voici un script Python correspondant à cet algorithme de seuil :

```
def seuil(A):
    n=0
    while 1.4**n < A :
        n=n+1
    return n
```

Le coder, puis déterminer la valeur du plus petit entier n_0 à partir duquel $u_n \geq 10$. Même question avec $u_n \geq 100$.

seuil(10)
seuil(100)

a) Exprimons U_{n+1} en fct° de U_n pr tt entier nat n

$U_{n+1} = U_n + \frac{40}{100}U_n = U_n + 0,4U_n$

$U_{n+1} = 1,4U_n$

augmenter de 40% une valeur revient à multiplier cette valeur par $1 + \frac{40}{100} = 1,4$

→ donc (U_n) est géométrique de raison $q = 1,4$ et $U_0 = 1$

ici $U_n = 1 \times 1,4^n = \boxed{1,4^n}$

Si (U_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0

$\boxed{U_n = U_0 \times q^n}$ et $\boxed{U_n = U_p \times q^{n-p}}$

b) ici $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1,4U_n}{U_n} = \boxed{1,4} = q$ $1,4 > 1$

(U_n) croissante

c) $1,4 > 1$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} 1,4^n = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

d) $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ signifie que pour tout réel A, arbitrairement fixé, aussi grand soit-il, il existe un entier n_0 à partir duquel $U_n \geq A$ (si $n \geq n_0$)

ici on prend $A = 10$

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $U_n \geq 10$

e) on choisit $A = 2,1$

$n = 0$ au départ (avant d'entrer dans la boucle).

Test $1,4^0 < 2,1 \to 1 < 2,1$ vrai

on passe à $n = 1$

$1,4^1 < 2,1$ est vrai → on passe à $n = 2$

$1,4^2 < 2,1 \to 1,96 < 2,1$ vrai

on passe à $n = 3$

$1,4^3 \leq 2,1 \iff 2,744 \leq 2,1$: Faux

La condit° n'est plus vérifiée → on sort de la boucle

Sortie $n = 3$ (affiché)

→ Le programme avec la boucle while tourne en boucle tant que la condit° « $1,4^n < A$ » est vraie et il s'arrête lorsque la condit° « $1,4^n < A$ » n'est plus vérifiée, ie qd $1,4^n \geq A$.

Rôle de l'algo : Il détermine la + petite valeur de n pr laquelle $1,4^n \geq A$, ie le premier entier n pr lequel la quantité $1,4^n$ devient supérieure ou égale au seuil A fixé

f) si $A = 10$ $n = 7$ au bout de 7 ans le nb de bactéries devient supérieur ou égal à 10 millions

si $A = 100$ $n = 14$

Cet algorithme revient quasiment tout le temps au baccalauréat, alors prenez le temps de bien le comprendre !

VI-Convergence des suites monotones

Rappel-Définitions

- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***majorée***, s'il existe un réel M, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$. On dit que M est un majorant de la suite (u_n). ♥♥
- Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite ***minorée***, s'il existe un réel m, tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de la suite (u_n). ♥♥
- Une suite est dite ***bornée*** si elle est à la fois ***minorée et majorée***. ♥♥

Remarque fondamentale

- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- Toute suite croissante est minorée par son " " ".

Voici un théorème fondamental qui tombe systématiquement au baccalauréat :

♥♥♥♥ ***Théorème de convergence des suites monotones*** ♥♥♥♥

1) Si une suite est croissante ET majorée, alors elle converge

2) Si une suite est décroissante ET minorée, alors elle converge

On admet ce théorème de la *convergence monotone*, conformément au programme.

Remarque : Ce théorème est un théorème *existentiel* : il permet de démontrer la convergence d'une telle suite, mais ne précise en aucun cas la valeur de la limite de cette suite.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3 + \dfrac{2}{n+1}$

a) Etablir que cette suite est minorée par 0, et qu'elle est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) converge. Déterminer la limite de cette suite.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 > 0$ dc $\dfrac{2}{n+1} > 0$ donc $3 + \dfrac{2}{n+1} > 3 > 0$

dc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$ dc (U_n) minorée par 0.

b) $U_n = 3 + \dfrac{2}{n+1} = f(n)$ où f est déf sur $[0, +\infty[$

par $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x+1}$ ((u_n) = suite explicite)

étude du sens de variat° de f sur $[0, +\infty[$

$f'(x) = 2 \times \dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-u'}{u^2}$ où $u = x+1$ et $u' = 1$

$= \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ dc $f'(x) < 0$ sur $[0, +\infty[$ dc $f \searrow$ sur $[0, +\infty[$

et par suite $(U_n) \searrow$ aussi

(U_n) décroît et est minorée par 0 dc d'ap le th de convergence des suites monotones, (U_n) converge

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 = 3$

Dc par ds $\lim \left(3 + \dfrac{2}{n+1}\right) = 3$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3}$

Attention **à la grosse erreur**, souvent commise par les élèves au bac :

« La suite (u_n) est décroissante, et elle est minorée par 0, donc elle converge vers 0. »

Si vous ne voyez pas l'erreur dans ce raisonnement, relisez (une ou plusieurs fois) l'exemple précédent !!

Remarque utile : si une suite (u_n) converge vers L, alors on a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}$?

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$

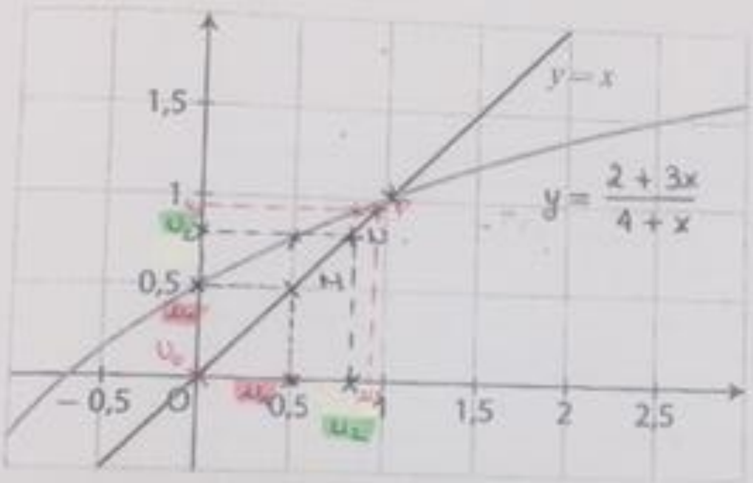
Exercice 5 *(fondamental, le classique du bac)*

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ par : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

1) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur N par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $\overbrace{u_{n+1} = f(u_n)}^{\text{suite récurrente}}$.

a) On donne dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f sur $[0\ ;\ 3]$, ainsi que la droite d'équation : $y = x$.



$u_1 = f(u_0) = f(0)$
$u_2 = f(u_1) = f(0,5)$
$u_3 = f(u_2) =$

Placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en s'aidant de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$, construire géométriquement sur l'axe des abscisses u_1, u_2 et u_3.

b) Quelles conjectures faites-vous concernant : le sens de variation de (u_n) ? La convergence de (u_n) ?

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

d) En déduire que la suite (u_n) converge, et calculer sa limite L.

1) $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ avec $x \in [0,3]$ $\quad 0 \le x \le 3$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 3x+2$ donc $u'(x) = 3$
$\qquad\qquad\qquad\quad v(x) = x+4$ donc $v'(x) = 1$

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2}$

$f'(x) = \boxed{\frac{10}{(x+4)^2}}$ $\quad 10 > 0$ et $\forall x \in [0,3]$, $(x+4)^2 > 0$

donc $f'(x) > 0$ sur $[0,3]$

donc f croît sur $[0,3]$

2b) D'après le graphique $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

→ Il semblerait de que (u_n) soit croissante et que la suite (u_n) converge vers 1 càd

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$

2c) Par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $P(n)$ la prop « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ »

- Initialisat° p. $n = 0$ montrons que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$

on $u_0 = 0$ (énoncé) et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

et $0 \leq 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ est vraie donc $P(0)$ est vraie

- Hérédité Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ est vraie $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Prouvons que $P(n+1)$ est vraie càd que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

par hyp de réc $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

or comme f croît sur $[0, 1]$ on a

$$f(0) \leq \underbrace{f(u_n)} \leq \underbrace{f(u_{n+1})} \leq f(1)$$

$f(1) = \frac{5}{5} = 1$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

et $\frac{1}{2} \geq 0$

donc $P(n+1)$ = vraie

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

Conclu : $P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$ d'ap principe de réc.

2d) Grâce à 2c) (u_n) est croissante et majorée par 1

Donc d'ap le th de convergence monotone (u_n) converge

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$ Soit $\boxed{L = \lim_{n \to +\infty} u_n}$

en particulier $\underbrace{\lim_{n \to +\infty} u_{n+1}} = \lim \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

$$L = \frac{3L + 2}{L + 4} \quad \text{car } \lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

$L = \dfrac{3L+2}{L+4}$ Résolvons cette équation

par produit en croix $L(L+4) = 3L+2$

$L^2 + 4L - 3L - 2 = 0$

$L^2 - L - 2 = 0$

Solutions évidentes $L = 1$ et $L = -2$

or $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $L_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-2}{1} = -2$

$\forall n$ (B), $0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq L \leq 1$

donc $L = 1$ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$

__*Exercice 6 (issu de baccalauréat)*__

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comprait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}6 \\ u_{n+1} & = & 0{,}75u_n(1-0{,}15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous :

```
def menace()
  u = 0,6
  n = 0
  while u > 0,02
      u = 0,75*u*(1-0,15*u)
      n = n+1
  return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$(0,6 \times 1000 = 600)$

1) u_1 = nb d'ind au début de l'an $2020 + 1 = 2021$

$u_1 = 0,75 u_0 (1 - 0,15 u_0) = 0,75 \times 0,6 (1 - 0,15 \times 0,6)$

$u_1 = 0,45 \times (1 - 0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$

ici u_n est un nb d'ind de $u_1 \approx 410$ ind.
Il y avait selon le modèle 410 ind en l'an 2021

de même u_2 = nb ind en 2022

$u_2 = 0,75 u_1 (1 - 0,15 u_1) = 0,75 \times 0,4095 (1 - 0,15 \times 0,4095)$

$u_2 \approx 0,2883$ soit 288 ind en 2022.

2) $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$

~~$f'(x) = u'v + uv' = 0,75(1 - 0,15x) + (-0,15)(0,75x)$~~

~~$f'(x) = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x$~~

$f(x) = 0,75x - 0,75 \times 0,15x^2 = -0,1125x^2 + 0,75x$

$f'(x) = -0,1125 \times 2x + 0,75 = \boxed{-0,225x + 0,75}$

Étude du signe de $f'(x)$ sur $[0, 1]$

$f'(x) \geq 0 \iff -0,225x + 0,75 \geq 0$

$x \leq \frac{-0,75}{-0,225}$ car $-0,225 < 0$

$x \leq \frac{750}{225}$

$x \leq \frac{10}{3}$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,6375$

car $\frac{10}{3} > 1$

$f(0) = 0$

$f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$

3) $f(x) = x$

$\iff -0,1125x^2 + 0,75x = x$

$\iff -0,1125x^2 + 0,75x - x = 0$

$\iff -0,1125x^2 - 0,25x = 0$

$\iff x(-0,1125x - 0,25) = 0$

$\iff x = 0$ ou $-0,1125x - 0,25 = 0$

$x = \frac{-0,25}{0,1125} = \frac{-20}{9}$ $\quad S = \left\{0 ; \frac{-20}{9}\right\}$

4a) voir exo 5 déjà fait

4b) d'ap 4a) on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$

$\hookrightarrow (u_n) \searrow$ + minorée par 0

donc (u_n) converge d'ap le th de convergence monotone

4c) Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

dc $n \to +\infty$ $\ell = f(\ell)$, ℓ est solution de l'éq $x = f(x)$

D'ap 3) on a $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{-20}{9}$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ dc $\ell \geq 0$ donc on rejette $\frac{-20}{9}$ dc $\ell = 0$

Conclu (u_n) converge vers 0.

5a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ signifie qu'à très long terme le nb d'indiv de l'île va se stabiliser à 0 il y aura extinct° de l'espèce.

5b)

u	0,6	0,4035
n	0	1
$u > 0,02$	$0,6 > 0,02$	$0,6 > 0,4035$
	non	

n	u_n
1	
10	0,0249
11	$0,0186 \leq 0,02$

Renvoie $n = 11$.

en l'an 2031, la pop° comptera au plus 20 ind.

Exercice 7 *(issu de baccalauréat)*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a. Calculer u_1 et v_1.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.
   d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

$|r - \sqrt{2}| > 10^{-4}$

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

$u_0 = 1$
$v_0 = 1$
$u_{n+1} = u_n + v_n$
$v_{n+1} = 2u_n + v_n$

1a) pour $n = 0$ $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$

$v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$

1b) <u>Méthode de la diff</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $2 > 0$ donc $2u_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$ donc (v_n) est strictement croissante

→ (v_n) est croissante et minorée par son premier terme

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq v_0$ et $v_0 = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 1$.

1c) $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ la propriété $u_n \geq n + 1$

- <u>initialisat°</u> pr $n = 0$ $u_0 = 1$ et $1 \geq 0 + 1$ donc $P(0)$ est vraie
- <u>Hérédité</u> Soit n un entier naturel arbitrairement fixé tel que $P(n)$ est vraie on suppose que $u_n \geq n + 1$.
Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie càd $u_{n+1} \geq n + 2$.

on (énoncé) $u_{n+1} = u_n + v_n$

par hyp de réc $u_n \geq n + 1$

$\underbrace{u_n + v_n} \geq n + 1 + v_n$

$u_{n+1} \geq n + 1 + v_n$

d'ap la quest 1b $v_n \geq 1$ de sorte que $u_{n+1} \geq n + 2$) $P(n+1)$ est vraie

<u>conclusion</u> $P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.
Par principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \geq n + 1}$

1d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

d'ap le th de comparaison : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{v_n}{u_n}$ on admet $\forall n \in \mathbb{N}$ $R_n^2 = \dfrac{2 + (-1)^{n+1}}{u_n^2}$

$u_n > 0$

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^{n+1} \in \{-1; 1\}$

$$-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$$

donc $\dfrac{-1}{u_n^2} \leq \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \dfrac{1}{u_n^2}$ car $u_n^2 > 0$

b) D'ap quest 1d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

dc par lim de prdt $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^2 = +\infty$

dc par lim de quotien $\lim \dfrac{1}{u_n^2} = 0$

de m̃ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{u_n^2} = 0$

enfin on a $\dfrac{-1}{u_n^2} \leq \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \dfrac{1}{u_n^2}$

dc d'aps le th des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$

dc par lim de somme

$\lim x_n^2 = 2$

or $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ avec $u_n > 0$ et $v_n > 0$ dc $x_n > 0$

dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \sqrt{2}}$ (et pas $-\sqrt{2}$).

2a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$ par def de la suite (x_n)

$$x_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{\cancel{u_n}\left(2 + \frac{v_n}{u_n}\right)}{\cancel{u_n}\left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)} = \boxed{\frac{2 + x_n}{1 + x_n}}$$

b) cet algo traite de la suite (x_n)

et $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 1}$ (quest 2a) de plus (x_n) converge vers $\sqrt{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{2}$

Le programme s'arrête dès que $|R-\sqrt{2}| < 10^{-4}$

car $|x_n - \sqrt{2}| \le 10^{-4}$

dc à partir du rang $n=5$ $(n \ge 5)$ $|x_n - \sqrt{2}| \le 10^{-4}$

dc x_5 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près

$\sqrt{2}-10^{-4}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}+10^{-4}$

x_n

Exercice 8 (issu de baccalauréat)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de ce médicament dans le sang diminue avec le temps.

Une machine est programmée de telle façon que :

- à l'instant $t = 0$ (en heure), elle injecte 10 mL de médicament ; on admet que l'effet est instantané ;
- chaque heure suivante, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % de la quantité de médicament présente dans le sang est éliminée chaque heure.

a) Pour tout entier naturel n, on note q_n la quantité de médicament (en mL) présente dans le sang du patient au bout de n heures.

Justifier que pour tout entier naturel n :

$$q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1.$$

c) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = q_n - 5$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison.

d) Exprimer v_n, puis q_n en fonction de n.

e) Quand elle sera stabilisée, quelle sera la quantité de médicament (en mL) présente dans le sang du patient ?

f) Déterminer le rôle de l'algorithme suivant :

```
def absorbtion():
    q=10
    n=0
    while q>=6:
        n=n+1
        q=0.8*q+1
    return n
```

a) q_n = quantité (en mL) de prdt ds le sang au bout de n heures

$q_0 = 10$

→ quantité diminue de 20% à chaque heure dc est multipliée par $CM = 1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$

De + la machine injecte 1 mL chaque heure

dc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{q_{n+1} = 0{,}8 q_n + 1}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = q_n - 5$

Rappel (V_n) est une suite géométrique s'il existe un réel Q tel que $V_{n+1} = Q \times V_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = q_{n+1} - 5 = 0{,}8 q_n + 1 - 5$

$V_{n+1} = 0{,}8 q_n - 4$ $\quad V_n = q_n - 5$ donc $q_n = V_n + 5$

$V_{n+1} = 0{,}8(V_n + 5) - 4 = 0{,}8 V_n + 4 - 4 = \boxed{0{,}8 V_n}$

dc (V_n) est une suite géo de raison $\boxed{Q = 0{,}8}$

son premier terme $V_0 = q_0 - 5 = 10 - 5 = \boxed{5}$

d) (V_n) géométrique $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times Q^n$

$\boxed{V_n = 5 \times 0{,}8^n}$

$q_n = V_n + 5$ donc $\boxed{q_n = 5 \times 0{,}8^n + 5}$

$-1 < 0{,}8 < 1$ dc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0}$

e) Cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$

par lim de prdt puis de somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 5}$

À très long terme la quantité de médicament ds le sang du patient se stabilisera à 5 mL

f) Ce programme détermine la valeur de n à partir de laquelle la quantité de médicament dans le sang devient inférieure (strictement) à 6 mg (pr la première fois)

lorsque non $(q \ge 6)$ dc $\boxed{q < 6\,!}$

Exercice 3 (Sujet du baccalauréat, métropole 2022)

Dans le cadre d'un essai clinique on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie. L'objectif de cet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$f(t) = 3te^{-0,5t+1},$$

où t désigne le temps, exprimé en heures, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0 ; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
   c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ?
   Quelle est alors cette quantité maximale ?

1a)
$f(t) = 3te^{-0,5t+1}$ où $0 \leq t \leq 10$ ($f(t)$ en mg, t en h)

$f(t) = u(t) \times v(t)$

$u'(t) = 3$ et $v'(t) = -0,5e^{-0,5t+1}$

$f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$

$f'(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t(-0,5e^{-0,5t+1})$

$f'(t) = 3e^{-0,5t+1}(1 - 0,5t)$

$f'(t) = 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1}$

1b) Étude du signe de la dérivée $f'(t)$ sur $[0, 10]$

$3>0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5t+1} > 0$ donc $f'(t)$ a le même signe que $-0,5t+1$

et $f'(t) \geq 0 \iff -0,5t+1 \geq 0 \iff t \leq \frac{1}{0,5}$ $\boxed{t \leq 2}$ $(-0,5<0)$.

t	0		2		10
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	6	↘	$30e^{-4}$

$f(0) = 0$
$f(2) = 6e^{0} = 6$
$f(10) = 30e^{-4}$

1c) f admet son maximum sur $[0, 10]$ atteint lorsque $t = 2$. Or, f modélise la quantité de médicament dans le sang. Donc au bout de 2h, la quantité de médicament présente est maximale et vaut 6 mg.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ième heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1, de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
   b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

$u_0 = 2$ (quantité initiale) et u_n = quantité qui reste dans le sang en heures après l'injection

1) $u_1 = 2 - \frac{30}{100} \times 2 + 1,8$ / $u_1 = u_0 \times 0,7 + 1,8$
$u_1 = 2 - 0,6 + 1,8 = \boxed{3,2 \text{ mg}}$ / $u_1 = 2 \times 0,7 + 1,8$

2) $u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100} u_n + \underbrace{1,8}$ → la réinjecté
q à la n-ième heure ... à n-ième heure

dc $\boxed{u_{n+1} = 0,7 u_n + 1,8}$

3a) $n \in \mathbb{N}$, Soit $P(n)$ la propriété $u_n \leq u_{n+1} < 6$

• Initialisation : $n = 0$ $u_0 \leq u_1 < 6$
$u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$ or $2 \leq 3,2 < 6$ est vraie donc $P(0)$ est vraie

• Hérédité : Soit n un entier arbitrairement fixé tel que $P(n)$ soit vraie, on suppose que $u_n \leq u_{n+1} < 6$. Montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$

or par hypothèse de récurrence $u_n \leq u_{n+1} < 6$
donc $0,7 u_n \leq 0,7 u_{n+1} < 0,7 \times 6$ car $0,7 > 0$
et $0,7 u_n + 1,8 \leq 0,7 u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8$
et $\underbrace{0,7 u_n + 1,8}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{0,7 u_{n+1} + 1,8}_{u_{n+2}} < 6$ → $P(n+1)$ est vraie

conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ héréditaire $\forall n \in \mathbb{N}$ dc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{u_n \leq u_{n+1} < 6}$

3b) Grâce à : $u_n \leq u_{n+1} < 6$ → (u_n) ↗ et (u_n) majorée par 6
Dc d'ap le th de convergence des suites monotones (u_n) converge

Soit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$

3c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,7 u_n + 1,8$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

$\underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}}_{\ell} = \underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} (0,7 u_n + 1,8)}_{0,7\ell + 1,8}$ (lim de somme et prod)
$0,3 \ell = 1,8$
$\ell = \frac{1,8}{0,3}$ $(0,3 > 0)$
$\ell = 6$ $S = \{6\}$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6}$

À très long terme la q de médicament dans le sang va se stabiliser à 6mg

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 6 - u_n$ dc $u_n = 6 - v_n$
a) $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0,7 u_n + 1,8) = 6 - 0,7 u_n - 1,8 = -0,7 u_n + 4,2$
$v_{n+1} = 0,7 \underbrace{(6 - u_n)}_{v_n} = \boxed{0,7 v_n}$ (autre méthode)

(v_n) suite géométrique $\begin{cases} q = 0,7 \\ v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = \boxed{4} \end{cases}$

b) (v_n) géométrique $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{4 \times 0{,}7^n}$

par suite $u_n = 6 - v_n = \boxed{6 - 4 \times 0{,}7^n}$

Exercice [illegible]

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7 p_n^2.$$

$P_0 = 0{,}3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7 P_n^2$

P_n = proba d'obtenir au plus n descendances

a) pr $n = 0$ $\quad P_1 = 0{,}3 + 0{,}7\, P_0^2 = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3^2 = \boxed{0{,}363}$

pr $n = 1$ $\quad P_2 = 0{,}3 + 0{,}7 \times P_1^2 = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}363^2 = \boxed{0{,}3922383}$

b) On cherche ici $1 - P_{10} \approx 0{,}573$

Au moins 11 descendances est le contraire de l'évènement au plus 10 descendants.

c) Il semblerait que (u_n) soit croissante et semble converger vers ℓ avec $\ell \approx 0{,}4285$.

2a) Ici $P(n)$ $\quad 0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq 0{,}5$

• Initialisation pr $n = 0$, $P_0 = 0{,}3$ et $P_1 = 0{,}363$

or $0 \leq 0{,}3 \leq 0{,}363 \leq 0{,}5$ est vrai donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ est vraie, on suppose donc que $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq 0{,}5$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que $0 \leq P_{n+1} \leq P_{n+2} \leq 0{,}5$.

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = 0{,}3 + P_n^2 = f(P_n)$ où $f(x) = 0{,}3 + 0{,}7x^2$.

suite exo 10 :

2a) suite

$P(n+1) = f(P_n)$ avec f définie sur $[0,1]$ par :
$f(x) = 0{,}3 + 0{,}7x^2$.

par HR, on sait que $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq 0{,}5$.
de par croissance de la fct° carré sur $[0;0{,}5]$ on a :

$$0^2 \leq P_n^2 \leq P_{n+1}^2 \leq 0{,}5^2$$

$$0{,}7 \times 0 \leq 0{,}7P_n^2 \leq 0{,}7P_{n+1}^2 \leq 0{,}7 \times 0{,}25 \quad \text{car } 0{,}7 > 0.$$

$$0 + 0{,}3 \leq \underbrace{0{,}7P_n^2 + 0{,}3} \leq \underbrace{0{,}7P_{n+1}^2 + 0{,}3} \leq 0{,}7 \times 0{,}25 + 0{,}3$$

$$0{,}3 \leq P_{n+1} \leq P_{n+2} \leq 0{,}475.$$

Par suite : $0 \leq 0{,}3$ et $0{,}475 \leq 0{,}5$
dc par suite d'inég : $0 \leq P_{n+1} \leq P_{n+2} \leq 0{,}5$ $P(n+1)$ est vraie

conclu : $P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est héréditaire.
D'ap le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P_n \leq P_{n+1} \leq 0{,}5$.

2b) On a prouvé que
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \leq P_{n+1}$ dc $(P_n) \nearrow$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \leq 0{,}5$ dc (P_n) est majorée
dc d'ap le th de convergence des suites monotones (P_n) converge.

3) a) Soit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7u_n^2$
Faisons tendre n vers $+\infty$

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} u_{n+1}} = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} (0{,}3 + 0{,}7u_n^2)} \quad \text{par Lp des lim}$$

$$L = 0{,}3 + 0{,}7L^2$$

Ce qui s'écrit encore $0{,}7L^2 - L + 0{,}3 = 0$.

Signifie que L est solution de l'équat° $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$

3b) Résolvons l'éq. $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$ ou Δ

solut° évidente : $x_1 = 1$

et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ donc $x_2 = \frac{0,3}{0,7} = \boxed{\frac{3}{7}}$

$S = \left\{ 1 ; \frac{3}{7} \right\}$

enfin $0 \leq P_n \leq 0,5$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $0 \leq L \leq 0,5$

donc $L = \frac{3}{7}$ (on exclut la valeur 1).

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{7}}$$

c)

```
def suite(n)
    p = 0,3          suite
    s = [p]          1 ≤ i < n+1 et i entier
    for i in range(1, n+1) :
        p = 0.3 + 0.7 * p ** 2
        s.append(p)  → rajoute à la liste s la dernière
    return(s)          valeur calculée de p
```

VII Compléments sur les suites

Propriété

Si une suite est croissante et non majorée, alors elle ...diverge vers + ∞...........

Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle ...diverge vers − ∞......

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

   a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

   b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type?

   c. Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

2. a. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

   b. Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

   a. Justifier que L est solution de l'équation

$$0,7x^2 - x + 0,3 = 0$$

   b. Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

6. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

6. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1 def suite(n) :
2     p= ...
3     s=[p]
4     for i in range (...) :
5         p=...
6         s.append(p)
7     return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction suite (n) retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

preuve propriété :

(u_n) majorée signifie qu'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ et (u_n) n'est pas majorée signifie que $\forall M$ réel M, il existe $m \in \mathbb{N}$, $u_m > M$.

Or, (u_n) croît pour tout entier $p \geq m$, on a $u_p \geq u_m > M$.

Ainsi les valeurs prises par une suite deviennent aussi grandes que l'on veut. Donc $\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$

Exercice A

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n^2$.

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b) Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$

a) $u_{n+1} - u_n = u_n + n^2 - u_n = n^2 \geq 0$ car $n \in \mathbb{N}$.

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0 \rightarrow (u_n)$ croît

b) Raisonnons par l'absurde en supposant que (u_n) est majorée. D'ap la quest a), (u_n) croît dc (u_n) serait convergente d'ap le th de convergence des suites monotones.

Dc il existerait un réel L, tel que $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$

Faisons $n \longrightarrow +\infty$

$$\underbrace{\lim u_{n+1}}_{L} = \lim (u_n + n^2)$$
$$= +\infty \text{ en contradiction avec } L \in \mathbb{R}$$

Par suite on déduit que (u_n) n'est pas majorée.

c) (u_n) croît et n'est pas majorée dc (u_n) diverge vers $+\infty$

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice B

1) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

Démontrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

2) Soit (v_n) une suite croissante dont le premier terme v_0 est strictement positif.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$