## *Chapitre 2* *Les équations*

### I- Rappels sur les égalités

Une égalité est une entité contenant le signe égal qui est noté $=$ !

Une égalité est soit vraie (ou vérifiée) soit fausse !

Par exemple, l'égalité $a = 2$ n'est vraie que si l'on donne au réel $a$ la valeur 2.

L'égalité $x^2 = 2x$ est fausse lorsque $x = 5$ car : ……………………………………………………………..

Rappelons des règles sur les égalités, qui seront à la base de la résolution des équations :

**Règles fondamentales sur les égalités**

Soient $a$, $b$ et $c$ des réels quelconques.

*i)* On peut ajouter à chacun des deux membres d'une égalité le même nombre, on obtient une égalité équivalente, c'est-à-dire de même nature (vraie ou fausse).

$a = b$ équivaut à …………………….., ce que l'on notera : ……………………………………………………..

💣 Le symbole $\Leftrightarrow$ n'a pas la même signification que le signe $=$ ! Ne pas confondre les deux.

On pourra mettre le symbole $\Leftrightarrow$ entre deux égalités de même nature.

*ii)* On peut soustraire à chacun des deux membres d'une égalité le même nombre :

$a = b$ équivaut à……………………….., ce que l'on notera :

*iii)* On peut multiplier (respectivement diviser) chacun des deux membres d'une égalité par le même nombre NON NUL, c'est-à-dire différent de 0 !

Pour tout réel $d$ non nul, $a = b$ équivaut à ……………………, ce que l'on notera : …..……………………..

Pour tout réel $d$ non nul, $a = b$ équivaut à……….………………., ce que l'on notera……….………..…..

Grâce à ces règles, on va facilement réussir à isoler une variable, ce que l'on fait classiquement en résolvant des équations.

***Exercice 1*** En utilisant les règles sur les égalités, isoler dans chacune des expressions suivantes la variable demandée :

1) Isoler $a$ dans l'expression : $a + 7 = 2{,}5$

2) Isoler $b$ dans l'expression : $3b = 5$.

3) Isoler $c$ dans l'expression : $3c + 5 = c + 11$.

Pour les exemples suivants, toutes les variables sont différentes de zéro (non nulles).

4) $d = Vt$ : isoler $t$ ; 5) $V = xyz$ : isoler $y$ ; 6) $PV = nRT$ : isoler $R$ ; 7) $S = \pi R^2 H$ : isoler $R$ sachant que $S$, $R$ et $H$ sont positives ; 8) $ax + by = c$ : isoler $y$.

✂-----------------------------------------------------------------------------------------

## ***II- Les équations du premier degré à une inconnue***

Voici quelques équations simples rencontrées au collège : $3x + 1 = 4$ ; $2x - 5 = x + 4$.

Définitions

Une équation d'inconnue $x$ est une égalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de $x$, et fausse pour d'autres.

***Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x, c'est déterminer, si elles existent, toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité de l'énoncé est vraie.***

Ces éventuels nombres forment l'ensemble des solutions de l'équation.

Deux ***équations*** sont ***équivalentes*** lorsqu'elles ont ***même ensemble de solution.***

*Méthode de résolution* : Pour résoudre une équation, on raisonne par équivalence, c'est-à-dire qu'on transforme, ***à l'aide des règles sur les égalités*** vues précédemment, l'équation initiale en une *équation plus simple* qui a le même ensemble de solution que l'équation initiale, dans ***le but de se ramener à une équation triviale de la forme : x =*** ....

Lorsqu'on a abouti à cette dernière écriture, on a résolu l'équation initiale, il ne reste plus qu'à conclure, en mentionnant l'ensemble des solutions de l'équation, que l'on notera : $\mathcal{S} =$

✍ ***On retiendra donc que lorsqu'on demande de résoudre une équation, il faut isoler, si cela est possible, l'inconnue.***

***Exercice 2***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

*a)* $2x - 7 = 0$ ; *b)* $3x + 4 = 11$ ; *c)* $2x = 11$ ; *d)* $\frac{x}{3} - 5 = 2$ ; *e)* $4x + 1 = 2x + 7$

*f)* $5(2x - 1) = 6 - (2x - 1)$ ; *g)* $2(x + 4) + 1 - 5x = 3(1 - x) + 7$ ; *h)* $3(2x + 4) - 2x = 14 - 2(1 - 2x)$.

✂-------------------------------------------------------------------------------------------

Les équations sont un outil puissant pour résoudre des problèmes en mathématiques !

***Exercice 3***

Si on augmente la longueur de chacun des côtés d'un carré de 3 mètres, son aire augmente de 45,6 $m^2$. Quelle est la longueur des côtés du carré initial ? Justifier.

✂-------------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 4***

Un groupe d'amis va déjeuner dans un bistrot. Chacun choisit la formule du jour à 11,90 €.

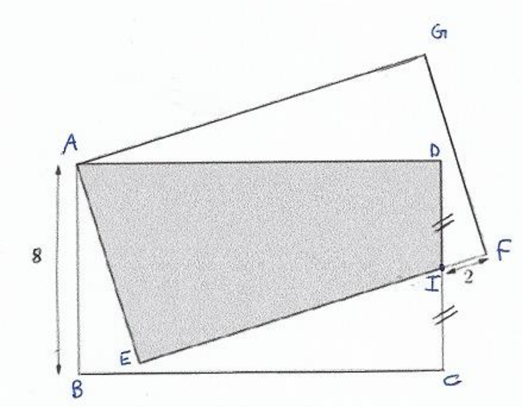
Au moment de payer, deux personnes ont oublié leur portefeuille : les autres doivent alors payer 1,70€ de plus chacun pour régler la note.

Combien y avait-il d'amis dans ce groupe lors de ce déjeuner ?

✂-------------------------------------------------------------------------------------------

**Exercice 5**

Les deux rectangles *ABCD* et *AEFG* ont les mêmes dimensions et ont le sommet *A* en commun.
*AEFG* recouvre partiellement *ABCD*, et la figure ci-dessous est codée avec quelques informations :




On se propose de déterminer l'aire de la zone de recouvrement grisée sur la figure.
En posant $x = AD$, déterminer, à l'aide d'une mise en équation, la longueur *AD*.
En déduire l'aire grisée, c'est-à-dire l'aire du quadrilatère *AEID*.

✂------------------------------------------------------------------------------------------

## III- D'autres types d'équations

### A-Equation avec fractions

Nous allons faire quelques rappels sur les fractions au préalable :

***Révisions : règles et opérations algébriques sur les fractions***

☝ *Fondamental et d'usage fréquent tout au long de l'année !*

***Pour tout entier a, et tout entier b, c et k non nuls on a les règles suivantes concernant le calcul fractionnaire :***

*i)* $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}}$ ; *ii)* $\boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}}$ ; *iii)* $\boxed{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}}$

En français :

*i) Règle d'invariance des fractions :*

*On ne change pas la valeur d'une fraction en ……………………. son numérateur et son dénominateur par le même nombre non nul.*

*ii) et iii) Pour additionner (respectivement soustraire) deux fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner (respectivement soustraire les numérateurs entre eux, et de conserver le même dénominateur.*

#### 1. Addition de fractions

Pour additionner deux fractions, il est nécessaire de les réduire à un même dénominateur, appelé dénominateur commun. On utilise ensuite les règles *ii)* et *iii)* après s'être ramené à un même dénominateur, vu que les deux fractions ont alors le même dénominateur !

Comme dénominateur commun, on prend fréquemment le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs, et on utilise la règle *i)* rappelée en amont.

Exemple : Exprimer, sous forme de fraction irréductible :

$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} =$ ; $\frac{15}{8} - \frac{11}{12} =$

$\frac{8}{3} + \frac{7}{18} - \frac{4}{9} =$

$\frac{1}{209} - \frac{1}{210} =$

Dans le dernier exemple, et *en dernier recours*, on pourra ***toujours*** choisir comme dénominateur commun le ……………………………………………………………………………………………………….

**2. *Multiplication de fractions***

*Règle* : pour multiplier deux fractions, on multiplie respectivement les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous entiers $a$, $b$, $c$ et $d$, avec $b$ et $d$ *non nuls*, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =$ ……….. *En particulier :* $a \times \frac{c}{d} =$……..

On essaiera, avant de se lancer dans les multiplications, de trouver si on peut simplifier, c'est-à-dire en divisant par un diviseur commun, un numérateur et un dénominateur.

Exemples *:* Calculer sous forme de fraction irréductible :

$\frac{3}{4} \times \frac{7}{9} =$

$\frac{3}{8} \times \frac{7}{6} \times \frac{4}{9} =$

$-\frac{7}{4} \times \frac{5}{-8} \times 6 =$

**3. *Division de fractions***

*Rappel* : soit $a$ et $b$ deux entiers non nuls.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction qui multipliée par $\frac{a}{b}$ donne 1 comme produit :

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est donc égal à …..

<u>*Règle*</u> : pour tous entiers $a$, $b$, c et $d$ non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$ ..............

ce qui se note encore : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} =$ ............................

Le trait de la division effectuée ( = division principale) est de taille plus grande que celui de chacune des fractions, et doit toujours être situé au même niveau que le signe = !

**Pour diviser une première fraction par une seconde, il suffit donc de multiplier la première fraction par ................................ de la seconde fraction.**

Ainsi, la division n'est rien d'autre qu'une multiplication !

<u>Exemples</u> *:* Calculer sous forme de fraction irréductible :

$\frac{17}{25} \div \frac{34}{27} =$

$\dfrac{\frac{13}{3}}{\frac{26}{9}} =$

**4. *Règles de priorité entre opérations***

Rappelons ***qu'en l'absence de parenthèses***, **la *Multiplication*** est **prioritaire sur l'*Addition*** : on effectue d'abord Les multiplications, et ensuite les additions.

<u>Exemples</u> :

$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} =$

$2 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} =$

***En présence de parenthèses***, on effectue ***prioritairement les opérations situées à l'intérieur de ces dernières***, en respectant la précédente règle une fois à l'intérieur de ces dernières !

<u>Exemples</u> : Calculer sous forme de fraction irréductible :

$(-\frac{7}{6} + \frac{3}{5}) \times \frac{1}{4} =$

*Terminons les rappels par une règle fondamentale en mathématiques, la règle des produits en croix, qui dit que* ***deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix sont égaux.***

♥♥♥ <u>***Règle des produits en croix***</u> ♥♥♥

Pour tous entiers $a$, $b$, $c$ et $d$, avec $b$ et $d$ non nuls,

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ **si et seulement si** (= équivaut à dire que) ................................

<u>Remarque</u> : d'où vient ce terme étrange "produits en croix" ?

<u>*Preuve de la propriété des produits en croix :*</u>

<u>***Exercice 6***</u>

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

*a)* $\dfrac{2x}{3} = \dfrac{3}{7}$ ; *b)* $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{1-5x}{3}$ ; *c)* $\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{5}$ ; *d)* $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{3(x-2)}{4} = \dfrac{-7x+2}{12} + 2$

✂-----------------------------------------------------------------------------------------

<u>***Exercice 7***</u> (introduction au raisonnement par l'absurde).

Les fractions : $\dfrac{109}{108}$ et $\dfrac{107}{106}$ sont-elles égales ? Justifier.

✂-----------------------------------------------------------------------------------------

## <u>*B- Equations produit nul*</u>

<u>***Rappel important : le théorème du produit nul***</u>

**$A(x) \times B(x) = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des expressions équivaut à : $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.**

**En français, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.**

<u>*Exemple*</u> : Résoudre dans ℝ les équations : $(2x+5)(-3x+7) = 0$ ; $(2x+5)+(-3x+7) = 0$.

$(3x+1)^2 - 4(3x+1) = 0$ ; $4(x-3)(x+2) - (x^2 - 9) = 0$

✂-----------------------------------------------------------------------------------------

<u>***Exercice 8***</u>

Résoudre dans ℝ l'équation : $(2x-5)^2 = 36$.

<u>*Méthode*</u> : Lorsqu'on doit résoudre une équation où figurent des $x^2$ *(non simplifiables)*, on procédera, à ce stade de l'année, en deux étapes :

<u>*Etape 1*</u>.........................................................................................................

<u>*Etape 2*</u>.........................................................................................................

## C-Equations quotient nul

Rappelons que la division par 0 n'existe pas !

*Définition*

Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Pour que l'écriture fractionnaire $\frac{A(x)}{B(x)}$ soit calculable il faut que son dénominateur $B(x)$ soit différent de 0.

Toute valeur $x$ telle que $B(x) = 0$ est appelée une ……………………………………….. pour l'écriture fractionnaire $\frac{A(x)}{B(x)}$.

**_En mathématiques, dès qu'on est en présence d'un dénominateur, il faudra toujours se poser la question : ce dernier est-il différent de 0 ?_**

Exemple

Déterminer la valeur interdite de l'expression $\frac{2x-1}{4x+1}$, puis toutes les valeurs de $x$ pour lesquelles il est licite de calculer cette expression.

**_Propriété_ _(appelée propriété du quotient nul)._**

**Soit $A(x)$ et $B(x)$ des expressions, où $x$ désigne la variable.**

**$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à dire que : [$A(x)$ …. et $B(x)$ …..].**

En français, un quotient est nul si et seulement si son numérateur est …... et que son dénominateur n'est pas ……, ce qui assure l'existence du quotient.

**_Exercice 9_**

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

*a)* $\frac{2x-5}{x+1} = 0$ ; *b)* $\frac{3x}{x-1} + 2 = 0$ ; *c)* $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$

✂-------------------------------------------------------------------------------------------

**_Exercice 10_**

Résoudre dans ℝ, de deux façons différents, l'équation suivante :

$$\frac{4x-3}{x+1} = \frac{3}{2}$$

Moralité : toujours se ramener à ce que l'on sait faire !

***Remarque*** **: La technique des …………………………….. reste valable, mais il faut au préalable chercher les valeurs interdites pour les quotients, et exclure éventuellement toute solution de l'équation qui serait une valeur interdite.**

***Exercice 11***

Résoudre dans ℝ l'équation : $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+1}$

✂-----------------------------------------------------------------------------------

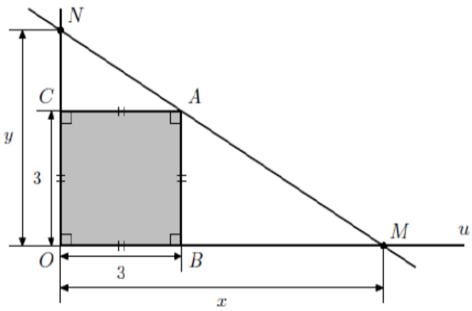
***Exercice 12***

Est-il possible, en ajoutant le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{9}$, d'obtenir comme résultat la fraction $\frac{25}{26}$ ? Justifier.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 13***

*Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.*
Sur la figure ci-dessous, $OBAC$ est un carré de côté 3, $M$ un point mobile sur la demi-droite $[Bu)$ et distinct de $B$, et $N$ le point d'intersection des droites $(AM)$ et $(OC)$.




**1.** On pose $OM = x$ et $ON = y$. Montrer que $y = \frac{3x}{x-3}$.

**2.** Est-il possible que le triangle $OMN$ soit isocèle ?
Si oui, préciser dans quel(s) cas.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

## *IV- Egalité de deux expressions algébriques*

Nous allons voir, sur deux exemples différents, des méthodes permettant de prouver efficacement l'égalité entre deux expressions algébriques.

*Exemple 1*

Démontrer que $\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 4 \times \frac{2}{3} - 3$

***Méthode 1***

***Exemple 2***

Démontrer que pour tout réel $x$, $x^2 + 8x + 5 = (x + 4)^2 - 11$.

***Méthode 2***

***Exercice 14***

Démontrer, que pour tout réel $x$ différent de $-1$, on a : $\frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$

✂-----------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 15***

On pose : $f(x) = x^2+x-12$ pour tout nombre réel $x$.

1) Démontrer que $f(x) = (x-3)(x+4)$

2) Utiliser la forme la plus adaptée de $f(x)$ pour résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

*a)* $f(x) = 0$

*b)* $f(x) = x^2$

*c)* $f(x) = -12$

✂-----------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 16***

1) Etablir que pour tout réels $a$ et $b$, on a l'identité suivante : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2) En déduire une factorisation de $x^3 - 8$.