Chapitre II Probabilités conditionnelles-Variables aléatoires

I – Rappels du vocabulaire de probabilité

Une expérience aléatoire est une épreuve dont le résultat (= issue) est le fruit du hasard.

Exemples

Lancer un dé à 6 faces sur une piste de jeu.
Lancer une pièce de monnaie.
Distribuer 5 cartes à un joueur avec un jeu de 32 cartes.
Poser une question à un lycéen choisi au hasard.

L'univers des possibles noté Ω, est l'ensemble formé par toutes les issues d'une expérience aléatoire.
Un événement est un sous-ensemble (= une partie) de l'univers des possibles.
Il est dit événement élémentaire s'il ne contient qu'une issue.

Exemples

Il y a 6 issues possibles pour un dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
Il y a 2 issues possibles pour une pièce de monnaie : $\Omega = \{F;P\}$

Au jeu de dé, soit A l'événement :
A : « Obtenir un nombre pair avec un dé. » d'où $A = \{2,4,6\}$
L'événement B suivant est un événement élémentaire :
B : « Obtenir "face" avec une pièce. » d'où $B = \{F\}$

On appelle ***événement impossible*** un événement qui ne peut pas être réalisé lors d'une expérience aléatoire donnée.

Exemple : Obtenir 7 au jeu de dé précédent est un événement impossible.

Un ***événement*** *A* est dit ***certain*** *si* $A = \Omega$ ***: la réalisation de A est une certitude !***

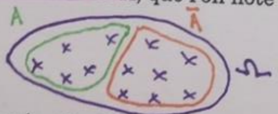
Exemple : Obtenir un résultat inférieur ou égal à 6 au jeu de dé est un événement certain !

Définition 1 ***(événement contraire)***

Soit A un événement d'un univers Ω.

L'événement contraire de A, que l'on note $\bar{A}$, est formé des issues non favorables à la réalisation de A.

Illustration



Par exemple, au jeu de dé, l'événement contraire de : A = "Obtenir un résultat pair au lancé d'un dé non truqué" est $\bar{A}$ = "Obtenir un résultat impair"

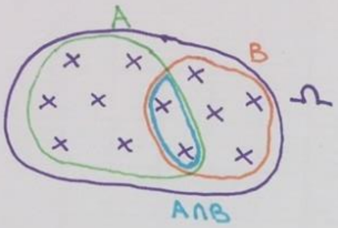
Donc $\bar{A} = \{1;3;5\}$

***Définition 2** (intersection)*

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$ (lire A inter B), est l'événement formé des issues qui ***réalisent à la fois l'événement A et l'événement B.***

Illustration



Exemple

Une urne contient dix billes respectivement numérotées de 1 à 10. On extrait au hasard une bille de l'urne.

Soit A l'événement : *"Obtenir un numéro de bille qui est un multiple de 3"*.

Soit B l'événement : *"Obtenir un numéro de bille au maximum égal à 4"*.

a) Décrire A, B, puis déterminer l'événement $A \cap B$.

b) Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, $A \cap B$.

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ Se note : $[\![1;10]\!]$ (les valeurs entières de l'intervalle $[1;10]$.)

Donc : $\Omega = [\![1;10]\!]$

a) A = " Obtenir un multiple de 3" (Etre dans la table de 3)

$A = \{3;6;9\}$

B = " Le n° est au max égal à 4"

$B = \{1;2;3;4\} = [\![1;4]\!]$.

$A \cap B$ = " Le n° est un multiple de 3 ET le n° est au max égal à 4".

$A \cap B = \{3\}$.

b) $p(A) = \frac{3}{10}$.

$p(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

$p(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

Définition 3 (réunion)

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

La ***réunion*** des événements A et B, notée $A \cup B$ (lire A union B), est l'événement formé des issues qui réalisent ***au moins un*** des deux événements A ou B.

Illustration

Attention, en mathématiques, le OU n'a pas le même sens que dans le langage quotidien !

Dans le langage quotidien, la phrase *"aller ou cinéma ou aller jouer au tennis"* désigne un OU exclusif et est comprise par : soit on va au cinéma, soit on va jouer au tennis. En mathématiques, la précédente phrase signifie faire *au moins une* des deux activités. Le OU est inclusif en mathématiques.

On veillera enfin à ne pas confondre les symboles $\cup$ et $\cap$.

Exemple

Déterminer $A \cup B$ dans l'exemple précédent (urne avec billes).

$A = \{3; 6; 9\}$

$B = \{1; 2; 3; 4\}$

$A \cup B$ = " Obtenir un multiple de 3 ou un max égal à 4".

Donc $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9\}$

Rq : $p(A \cup B) = \frac{6}{10}$

Définition 4

$\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n\}$ désigne l'univers des possibles d'une expérience aléatoire donnée.

Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chacune des issues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels notés $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que :

- Pour tout entier i compris entre 1 et n, $0 \leq p_i \leq 1$
- $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Le réel p_i est appelé la probabilité de l'issue x_i.

En pratique, quand on demande de ***donner une loi de probabilité*** associée à une expérience aléatoire, on ***consigne les résultats dans un tableau à double entrée***, l'une consignant les différentes issues possibles, l'autre les probabilités associées à chacune de ces issues.

On s'assurera que la somme des probabilités associées aux différentes issues possibles d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1. Cela constituera un critère de vérification dans les exercices que nous verrons plus loin.

Exemple

Donner la loi de probabilité associée au jet d'un dé cubique non truqué, et on lit le numéro obtenu sur la face supérieure du dé.

La probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{6}$

La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1.

Définition 5

On considère une expérience aléatoire ayant n issues possibles, avec n entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'on est en ***situation d'équiprobabilité*** si et seulement si ***chacune des issues*** possibles de cette expérience aléatoire ***a la même probabilité de réalisation*** égale à $\frac{1}{n}$

C'est le cas dans l'exemple précédent !

Bien souvent, l'énoncé indique implicitement les situations d'équiprobabilité : dé non truqué,.......

Dans le cas d'une situation d'équiprobabilité, si A désigne un événement de l'univers des possibles Ω, on a :

♥♥ $p(A) = \dfrac{\text{Nb d'issues favorables à la réalisa° de A}}{\text{Nb total d'issues}} = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ ♥♥

card (A) = nb d'éléments de A

Ω = univers des possibles

Formulaire bien utile en probabilité

- Pour tout événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- Pour tout événement A, et B d'un même univers Ω, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Dans le cas où A et B sont **incompatibles**, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \varnothing$ on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

$$\boxed{\text{En général, } p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)}.$$

Exemple

obtenir un nb premier

Au lancer d'un dé cubique non truqué, $A = \{2;4;6\}$, $B = \{2;3;5\}$ $P(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{2\}$ donc $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ et $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Donc : $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ car $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$.

Un des objectifs du chapitre, est de trouver, à quelles conditions, il est possible d'avoir que $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$.

II – Probabilités conditionnelles

Un exemple d'introduction : Dans une entreprise de 160 personnes, on compte 67 femmes. Parmi les personnes de cette entreprise, il y a 32 cadres dont 15 femmes.

1) Compléter le tableau à double entrée ci-dessous :

	Femmes	Hommes	Total
Cadres	15	17	32
Autres employés	52	76	128
Total	67	93	160

2) On choisit au hasard, une personne parmi les 160 personnes de cette entreprise.

On considère les événements suivants :

F : "La personne choisie est une femme" et *C : "la personne choisie est un cadre".*

a) Définir par une phrase chacun des événements suivants : $\bar{C}$; $F \cap C$; $F \cap \bar{C}$.

b) Calculer les probabilités : $p(F)$, $p(C)$, $p(\bar{C})$, $p(F \cap C)$, $p(F \cap \bar{C})$ et enfin $p(F \cup \bar{C})$.

3a) On sait que la personne choisie est un cadre de l'entreprise.
Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

On notera $p_C(F)$ cette probabilité, nommée probabilité conditionnelle de l'événement F sachant que l'événement C est réalisé, ou plus simplement, probabilité conditionnelle de F sachant C.

3b) Calculer $\dfrac{p(F \cap C)}{p(C)}$. Que peut-on constater ?

En déduire une relation entre $p_C(F)$, $p(C)$ et $p(F \cap C)$?

2a) $\overline{C}$ = "La personne choisie n'est pas cadre".

$F \cap C$ = "La pers. choisie est une femme qui est cadre".

$F \cap \overline{C}$ = "La pers. choisie est une femme qui n'est pas cadre".

b) $p(\overline{C}) = \frac{128}{160} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$. ou $p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

$p(F) = \frac{67}{160}$

$p(C) = \frac{32}{160} = \frac{16}{80} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$.

$p(F \cap C) = \frac{15}{160} = \frac{3}{32}$

$p(F \cap \overline{C}) = \frac{52}{160} = \frac{26}{80} = \frac{13}{40}$.

$p(F \cup \overline{C}) = p(F) + p(\overline{C}) - p(F \cap \overline{C})$

$p(F \cup \overline{C}) = \frac{67}{160} + \frac{128}{160} - \frac{52}{160}$

$p(F \cup \overline{F}) = \frac{143}{160}$.

3a) Elle vaut $\frac{15}{32}$.

Notation : $\underbrace{p_C(F)}$ $= \frac{15}{32}$

Probabilité d'être une femme
sachant qu'on interroge un cadre
(sachant que l'événement C est réalisé).

3b) $\frac{p(F \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{15}{160}}{\frac{32}{160}} = \frac{15}{\cancel{160}} \times \frac{\cancel{160}}{32} = \frac{15}{32}$.

Constat : $p_C(F) = \dfrac{p(F \cap C)}{p(C)}$

Donc $p(F \cap C) = p_C(F) \times p(C)$

4) Que représentent, en termes de probabilités, les quotients suivants : $\dfrac{15}{67}$? $\dfrac{52}{128}$?

$\dfrac{15}{67}$: $p_F(C)$

$\dfrac{52}{128}$: $p_{\bar{C}}(F)$

Définition 6

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, et A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B, sachant que A est réalisé, est notée $p_A(B)$, avec, par définition :

$$♥♥\ p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}\ ♥♥$$

Remarques : cette relation des probabilités conditionnelles, donne un moyen de calculer la probabilité de l'intersection de deux événements :

Si $p(A) \neq 0$, on a : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$

Remarque : Dans les exercices, on détecte la présence de probabilités conditionnelles grâce aux termes suivants : ***sachant que, parmi, si*** ......ou tout simplement quand l'énoncé donne une information de conditionnement : par exemple : "...on choisit une personne malade. Quelle est la probabilité qu'elle soit vaccinée ? ..." Ici la personne choisie l'est ***parmi*** les personnes malades !

Exemple 1

Dans une population donnée, 94 % des personnes possèdent un téléphone portable et 75 % des personnes possèdent un ordinateur.
De plus, 60 % des personnes de cette population déclarent posséder les deux. On rencontre au hasard une personne de cette population.

On considère les évènements :

T : ***" la personne rencontrée possède un téléphone portable".***

O : ***" la personne rencontrée possède un ordinateur".***

a) Déterminer la probabilité de rencontrer une personne qui a un ordinateur sachant que cette dernière possède un téléphone portable.

↳ condi°

b) Déterminer la probabilité que la personne rencontrée possède un téléphone portable sachant qu'elle a un ordinateur.

Traduction des données chiffrées :

$p(T) = \frac{94}{100} = 0,94.$

$p(O) = \frac{75}{100} = 0,75.$

$p(T \cap O) = \frac{60}{100} = 0,6.$

a) On cherche ici la valeur de $p_T(O)$.

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$p_T(O) = \frac{p(T \cap O)}{p(T)} = \frac{0,6}{0,94} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{94}{100}} = \frac{60}{94} = \frac{30}{47}$

$p_T(O) \approx 0,638$ $\underbrace{\text{au millième}}_{10^{-3}}$ près.

b) $p_O(T) = \frac{p(T \cap O)}{p(O)} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{75}{100}} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5} = 0,8.$

Exemple 2

Lors d'une enquête auprès d'une population, on a constaté que 85 % des personnes interrogées sont des femmes, et que, parmi ces femmes, 62 % travaillent à temps partiel.
On interroge au hasard une personne de la population.
On considère les événements suivants :

F : *" la personne interrogée est une femme".*
T : *" la personne interrogée travaille à temps partiel".*

a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé.
b) Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme travaillant à temps partiel.
c) Définir à l'aide d'une phrase l'événement : $\bar{F} \cap T$.

a) $p(F) = \frac{85}{100} = 0,85.$ et $p_F(T) = \frac{62}{100} = 0,62.$

b) On cherche ici la valeur de : $p(F \cap T)$

Or $p_F(T) = \dfrac{p(T \cap F)}{p(F)}$ donc $p(F \cap T) = p_F(T) \times p(F) = 0,62 \times 0,85$

$p(F \cap T) = 0,527$

c) $\bar{F} \cap T$: " Etre un homme et travailler à tps partiel".

Remarque

Un tableau à double entrée permet également de calculer des probabilités conditionnelles, même s'il n'en contient aucune à l'intérieur de ses cases :

La probabilité de l'événement $A \cap B$ se situe à l'intersection de la ligne A et de la colonne B. La dernière colonne et la dernière ligne du tableau contiennent les probabilités de chaque événement A, $\overline{A}$, B et $\overline{B}$.

	B		$\overline{B}$		Total
A	$P(A \cap B)$	+	$P(A \cap \overline{B})$	=	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	+	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	=	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	+	$P(\overline{B})$	=	1

$P_A(B)$ est alors le quotient des valeurs de $P(A \cap B)$ et de $P(A)$ lues dans le tableau.

Exemple 3

		Jeux payants $\overline{G}$	Jeux gratuits G	Total
A	Jeux d'action	1 728	1 104	2 832
$\overline{A}$	Autres jeux	3 456	3 312	6 768
	Total	5 184	4 416	9 600

On choisit au hasard un des jeux proposés par la plateforme.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « le jeu choisi est un jeu d'action ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement G : « le jeu choisi est un jeu gratuit ».
3. Déterminer la probabilité que le jeu choisi soit un jeu d'action payant.
4. Sachant que le jeu choisi est un jeu gratuit, déterminer la probabilité que ne soit pas un jeu d'action.
5. Le jeu choisi n'étant pas un jeu d'action, déterminer la probabilité que ce soit un jeu payant.

1. $p(A) = \dfrac{2832}{9600}$

$p(A) = 0,295$

2. $p(G) = \dfrac{4416}{9600} = 0,46$

3. $p(A \cap \bar{G}) = \frac{1728}{9600}$ $\bar{G}$: " être payant ".

4. On cherche ici la valeur de : $p_G(\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{3312}{9600}}{\frac{4416}{9600}}$

$p_G(\bar{A}) = \frac{0,345}{0,46} = 0,75.$

Propriété

A et B deux événements de Ω tels que $p(A) \neq 0$.

p_A est une probabilité définie sur Ω : en particulier, pour tout événement B :

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$
- $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

5. On cherche ici : $p_{\bar{A}}(\bar{G})$.

$p_{\bar{A}}(\bar{G}) = \frac{p(\bar{G} \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{3456}{6768}$

$p_{\bar{A}}(\bar{G}) \approx 0,511$ à 10^{-3} près.

Exemple 4

A la montagne, 80 % des vacanciers font du ski alpin et les autres vacanciers font de la randonnée en raquettes.

48 % des skieurs et 55 % des marcheurs à raquette sont des femmes.
On choisit un vacancier au hasard, et on note :

S l'événement : *" Le vacancier choisi fait du ski alpin"*.
F l'événement : *" Le vacancier choisi est une femme"*.

a) Traduire les données chiffrées de l'énoncé par des probabilités.
b) Déterminer la probabilité de choisir un vacancier faisant du ski et qui est une femme.
c) Trouver la probabilité que le vacancier choisi soit un homme sachant qu'il fait de la randonnée en raquettes.

a) $p(S) = \frac{80}{100} = 0{,}8.$ (au passage $p(\bar{S}) = \frac{20}{100} = 0{,}2.$)

$p_S(F) = \frac{48}{100} = 0{,}48.$

$p_{\bar{S}}(F) = \frac{55}{100} = 0{,}55.$

b) On cherche ici la valeur de : $p(F \cap S)$.

Or $p_S(F) = \frac{p(F\cap S)}{p(S)}$ donc $p(F \cap S) = p_S(F) \times p(S) = 0{,}48 \times 0{,}8 = 0{,}384.$

c) On cherche ici $p_{\bar{S}}(\bar{F})$.

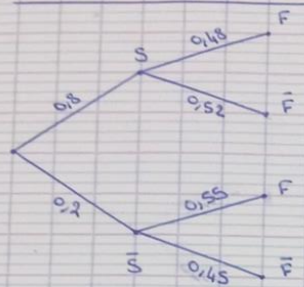
Or : $p_{\bar{S}}(\bar{F}) = \frac{p(\bar{S}\cap\bar{F})}{p(\bar{S})}$

avec : $p(\bar{S}) = 0{,}2$

	F	$\bar{F}$	Totaux
S	0,384		0,8
$\bar{S}$		?	0,2
Total			1

⚠ On ne lit ds un tableau que des probabilité d'intersection d'évenement.

Faisons ici un arbre de probabilité



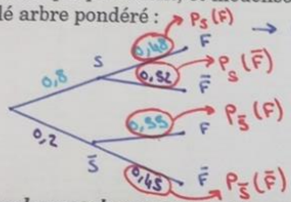
↳ ceci est $P_{\bar{S}}(\bar{F})$!!!

Donc $P_{\bar{S}}(\bar{F}) = 0{,}45$!

III- Arbre pondéré, et probabilités conditionnelles

Reprenons l'exemple précédent, et modélisons l'expérience aléatoire par un arbre de probabilités, encore appelé arbre pondéré :

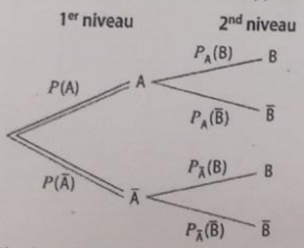
$\rightarrow p(S \cap F) = p(S) \times P_S(F)$.



Remarques fondamentales concernant les arbres pondérés (à deux niveaux):

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est appelée la racine de l'arbre.
- Les branches (= segments) partant de la racine sont appelées branches primaires de l'arbre.
- Ces dernières mènent à des nœuds où est écrit un événement avec une lettre majuscule.
- Les branches partant de nœuds sont appelées branches secondaires.
- *Sur chaque branche secondaire, figure des* ....CONDITIONNELLES................

Illustration : On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par **arbre pondéré**. Pour cela, on envisage deux niveaux de branches : le premier qui indique la probabilité de l'événement A et celle de $\bar{A}$ et le second qui permet d'indiquer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement B.



événement	probabilité
$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$A \cap \bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
$\bar{A} \cap B$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
$\bar{A} \cap \bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

Une branche relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante. Par exemple, la probabilité de la branche reliant A à B est $P_A(B)$.

Remarque : Il est tout à fait possible d'avoir plus de deux branches à certains niveaux comme nous le verrons en exercice ultérieurement !

- On appelle chemin, toute succession de branches et branches secondaires partant de la racine de l'arbre, et aboutissant à un nœud de l'arbre. Un chemin représente donc une intersection d'événements figurant sur ce dernier.

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.

- La probabilité associée à un chemin est égale au produit des probabilités figurant sur les branches de ce chemin.

  Par exemple, $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$: ce n'est rien d'autre qu'une réécriture de la formule des probabilités conditionnelles !!!!!!

- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités associées à chacun des chemins réalisant cet événement.

Exemple 5

Une urne est constituée de 25 boules dont 15 blanches, et 10 noires. L'expérience aléatoire consiste à tirer une première boule de l'urne, puis sans la remettre, d'en tirer une seconde de l'urne.

On note B_i l'événement tirer une boule blanche au $i^{ème}$ tirage, et N_i tirer une boule noire au $i^{ème}$ tirage.

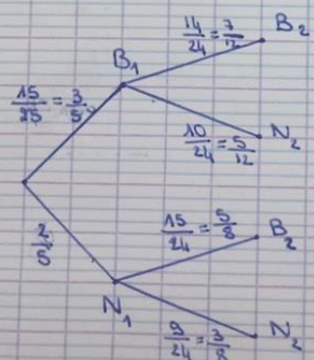
1) Faire un arbre de probabilités modélisant cette situation.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : " Les deux boules tirées sont blanches".
F : " La première boule tirée est noire, et la seconde est blanche".
G : " Le tirage est bicolore".

1)

⚠ penser à simplifier les fractions



2) $p(E) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{21}{60} = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

$p(F) = p(N_1 \cap B_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

$G = \underbrace{(B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)}_{\text{évènements incompatibles}}$

Donc $p(G) = p(B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap B_2)$

$p(G) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{12} + p(F)$

$p(G) = \frac{3}{12} + 0{,}25$

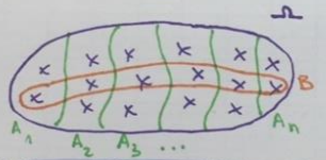
$p(G) = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$.

IV-Formule des probabilités totales

Définition : Soit $A_1, A_2, \ldots A_n$ une famille d'événements ***non impossibles*** et ***deux à deux incompatibles*** d'un même univers Ω.

Lorsque ***la réunion de $A_1, A_2, \ldots A_n$ est égale à Ω***, on dit que $A_1, A_2, \ldots A_n$ ***forment une partition de l'univers Ω.***

Illustration :



Propriété (appelée la ***formule des probabilités totales***)

Soit $A_1, A_2, \ldots A_n$ une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B de Ω, on a :

$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots\ldots\ldots + p(A_n \cap B)$.

$B = \underbrace{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)}_{\text{2 à 2 incompatibles}}$

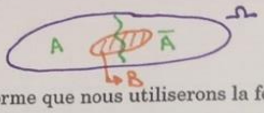
Donc $p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B)$

__Remarque__ : Cela n'est que la traduction mathématique du dernier point concernant les arbres !

Dans les exercices, cette dernière sera le plus fréquemment utilisée avec $n = 2$ ou $n = 3$.

Si A et $\bar{A}$ sont des événements de probabilité non nulle, ils forment une partition de Ω, et donc, pour tout événement B, on a :

$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$



C'est essentiellement sous cette forme que nous utiliserons la formule des probabilités totales.

__*Exercice 1*__

Dans une population, 80 % des personnes sont vaccinées contre une maladie.

Parmi les personnes vaccinées, 10 % tombent malades, et parmi les personnes non vaccinées, 40 % tombent malades. On note V l'événement être vacciné, et M l'événement être malade.

On s'intéresse à l'état de santé d'une personne choisie au hasard dans la population.

a) Faire un arbre de probabilité de la situation.

b) Déterminer $p_V(M)$.

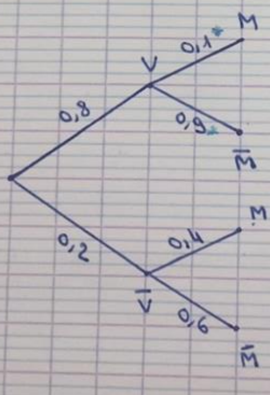
c) Déterminer la probabilité d'être vacciné et d'être malade.

d) En déduire $p(M)$.

e) Déterminer la probabilité d'être vacciné sachant qu'on est malade, puis la probabilité de ne pas être vacciné bien qu'on soit malade.

✂ - - - - - - - - - - - - - - - -

a)



⚠ pas de pourcentages sur les branches !

Donc : $\frac{80}{100} = 0,8$

$\frac{10}{100} = 0,1$

$\frac{40}{100} = 0,4$

$0,1 = p_V(M)$

$0,9 = p_V(\bar{M})$

b) D'après l'énoncé : $p_V(M) = 0,1$.

c) On cherche ici la valeur de $p(V \cap M)$

$p(V \cap M) = p_V(M) \times p(V) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.

d) D'après la formule des probabilités totales :

$p(M) = p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M)$

$p(M) = 0,08 + 0,2 \times 0,4 = 0,08 + 0,08 = 0,16$.

e) • On cherche ici la valeur de : $p_M(V)$.

D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$p_M(V) = \frac{p(V \cap M)}{p(M)} \overset{\text{q. c et d}}{=} \frac{0,08}{0,16}$$

$p_M(V) = 0,5$.

• On cherche ici la valeur de : $p_M(\overline{V})$.

Or $p_M(\overline{V}) = 1 - p_M(V) = 1 - 0,5 = 0,5$.

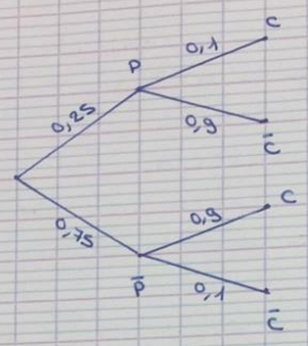
Exercice 2

QCM issu de bac : Déterminer la bonne réponse en expliquant votre démarche.

Dans ma région, il pleut un soir sur quatre. S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à 0,1.
S'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à 0,9.

Ce soir, je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas ce soir-là est égale à :

a. 0,9 ***b.*** $\frac{27}{40}$ ***c.*** 0,75 ***d.*** $\frac{27}{28}$



P = "Il pleut"
C = "Je sors mon chien"

On cherche ici la valeur de : $p_C(\bar{P})$

Donc $p_C(\bar{P}) = \dfrac{p(\bar{P} \cap C)}{p(C)}$

Grâce à l'arbre : $p(\bar{P} \cap C) = p(\bar{P}) \times p_{\bar{P}}(C) = 0{,}75 \times 0{,}9 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{27}{40}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$p(C) = p(P \cap C) + p(\bar{P} \cap C) = 0{,}25 \times 0{,}1 + \dfrac{27}{40} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{27}{40} = \dfrac{28}{40}$.

Donc $p_C(\bar{P}) = \dfrac{p(\bar{P} \cap C)}{p(C)} = \dfrac{\frac{27}{40}}{\frac{28}{40}} = \dfrac{27}{40} \times \dfrac{40}{28} = \dfrac{27}{28}$. $\Rightarrow$ réponse d.

Exercice 3 *(issu de bac, métropole 2022)*

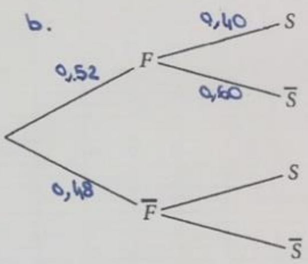
Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.
   On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :
   - F : « le salarié interrogé est une femme »,
   - S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

   $\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.

a. Donner la probabilité de l'évènement S.
b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.
c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.
d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme?
e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.

b.



1\. a. $p(S) = \frac{25}{100} = 0,25.$

c. $p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,52 \times 0,4 = 0,208.$

d. $p_S(F) = \frac{p(F\cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832.$

d'après a.c.

e. Le boss affirme que : $p_{\overline{F}}(S) \leqslant 0,1.$

Or $p_{\overline{F}}(S) = \frac{p(S\cap\overline{F})}{p(\overline{F})} = \frac{p(S\cap\overline{F})}{0,48}$

D'après la formule des probabilités totales :

$p(S) = p(F\cap S) + p(\overline{F}\cap S)$
$0,25 = 0,208 + p(\overline{F}\cap S)$
$p(\overline{F}\cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$

Donc par suite : $p_{\bar{F}}(S) = \dfrac{p(S \cap \bar{F})}{p(S)} = \dfrac{0,042}{0,48} = 0,0875.$

Enfin $0,0875 \leq 0,1$ donc l'affirma° du boss est vraie !

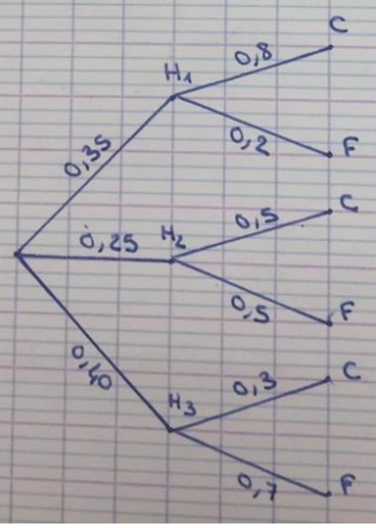
Exercice 4

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
   On envisage les événements suivants :
   — H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   — H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   — H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   — C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   — F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
   b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
   c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.
   d. L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

1. a.



b. On cherche ici la valeur de : $p(C \cap H_3)$

$p(C \cap H_3) = p(H_3) \times p_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$

c. $p(C) = p(C \cap H_1) + p(C \cap H_2) + p(C \cap H_3)$

$p(C) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,12$

$p(C) = 0,28 + 0,125 + 0,12$

$p(C) = 0,525$

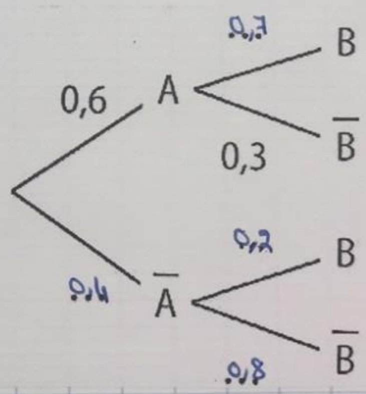
d. $p_C(H_1) = \dfrac{p(C \cap H_1)}{p(C)} = \dfrac{0,28}{0,525}$

$p_C(H_1) \approx 0,533$ à 10^{-3} près.

1

Exercice 5

Voici un arbre de pondéré.
On donne $p(B) = 0,5$.
Compléter cet arbre, en justifiant :



$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$

$0,5 = 0,6 \times 0,7 + p(\overline{A} \cap B)$

$p(\overline{A} \cap B) = 0,5 - 0,42 = 0,08$

Or $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$

$0,08 = 0,4 \times p_{\overline{A}}(B)$

$p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{0,08}{0,4} = 0,2$

Exercice 6

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

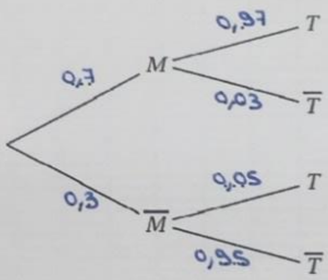
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. a. Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

2. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,7 \times 0,97 = 0,679$

3. $p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = 0,679 + 0,3 \times 0,05 = 0,694$

4. $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,679}{0,694}$

$p_T(M) \approx 0,978$ à 10^{-3} près

5. a. La valeur prédictive du test est : $p_{\overline{T}}(\overline{M})$.

$$p_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{p(\overline{M} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \frac{0,3 \times 0,95}{1 - p(T)} = \frac{0,3 \times 0,95}{1 - 0,694} = \frac{0,285}{0,306}$$

$p_{\overline{T}}(\overline{M}) \approx 0,931$.

b. Ici on a : $p_T(M) > p_{\overline{T}}(\overline{M})$ car $0,978 > 0,931$.

La valeur prédictive positive du test est donc + fiable que la valeur prédictive négative du test.

Exercice 7

Romane se déplace à vélo ou en transports en commun. Lorsque la journée est ensoleillée, elle se déplace en vélo 9 fois sur 10. Sinon, elle ne se déplace en vélo que 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p. Pour une journée donnée, on note :

– E l'événement « La journée est ensoleillée » ;

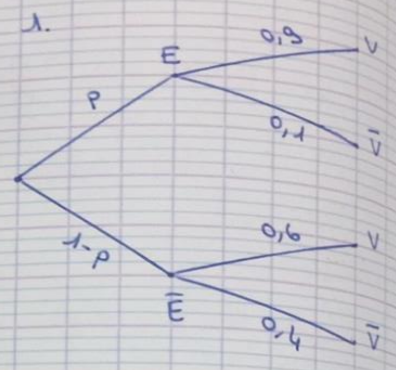
– V l'événement « Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est $P(V) = 0{,}3p + 0{,}6$.
3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

a. Calculer la valeur de p.

b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

1.



2. $p(V) \overset{\text{F.P. totales}}{=} p(E \cap V) + p(\bar{E} \cap V)$

$p(V) = p(E) \times p_E(V) + p(\bar{E}) \times p_{\bar{E}}(V)$

$p(V) = p \times 0{,}9 + (1-p) \times 0{,}6$

$p(V) = 0{,}9p + 0{,}6 - 0{,}6p$

$p(V) = 0{,}3p + 0{,}6$

3. a. On a ici que : $p(V) = \frac{67{,}5}{100} = 0{,}675$.

Or d'après q. 2. : $p(V) = 0{,}3p + 0{,}6$.

Donc : $0{,}3p + 0{,}6 = 0{,}675$

$0{,}3p = 0{,}075$

$p = \frac{0{,}075}{3}$

b. On cherche ici la valeur : $p_V(E)$.

Or $p_V(E) = \frac{p(E \cap V)}{p(V)} = \frac{0{,}9p}{0{,}3p + 0{,}6} = \frac{0{,}25 \times 0{,}9}{0{,}3 \times 0{,}25 + 0{,}6} = \frac{0{,}225}{0{,}675} = \frac{1}{3}$.

V – Indépendance

Définition : Deux événements A et B d'un même univers Ω sont dits **indépendants** pour la probabilité p, lorsque la réalisation (ou non réalisation) de A n'influence pas la réalisation (ou non réalisation) de B.

Nous allons "mathématiser" cette définition :

♥♥♥ *Dire que A et B sont des événements indépendants signifie que :* $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ ♥♥♥

Propriété

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants équivaut à dire que :

a) $p_A(B) = p(B)$

ou encore :

b) $p_{\bar{A}}(B) = p(B)$

ou encore :

c) $p_B(A) = p(A)$

Preuve : a) $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$.

↳ F.D.P. conditionnelles

↳ A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

La propriété fait donc le lien entre événements indépendants et probabilités conditionnelles.

Attention : indépendants et incompatibles, ce n'est pas du tout la même chose !

Exercice 7

On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On considère les événements suivants :

– A : « le nombre obtenu est pair » ;

– B : « le nombre obtenu est un multiple de trois » ;

– C : « le nombre obtenu est inférieur ou égal à trois ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Répondre à la même question pour les événements A et C, puis pour les événements B et C.

1. $A = \{2; 4; 6\}$ donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$B = \{3; 6\}$ donc $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Donc $A \cap B = \{6\}$ donc $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Or $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, donc A et B st indépendants.

2. • $C = \{1; 2; 3\}$ donc $p(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$A \cap C = \{2\}$ donc $p(A \cap C) = \frac{1}{6}$.

Or $p(A) \times p(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Or $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{6}$ donc $p(A \cap C) \neq p(A) \times p(C)$.

Donc A et C ne st pas indépendants.

• $B \cap C = \{3\}$, donc $p(B \cap C) = \frac{1}{6}$.

et $p(B) \times p(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Donc B et C st indépendants.

Remarque : en général, établir l'indépendance de deux événements n'est pas toujours aussi simple que l'on pense. Dans bon nombre de situations, l'énoncé la mentionnera explicitement.

Propriété (indépendance et évènements contraires)

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les évènements $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Preuve : A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Pour prouver que $\bar{A}$ et B sont indépendants, justifions que :
$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B)$.

Or $B = \underbrace{(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)}_{\text{incompatibles}}$

Donc $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

Donc $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$

$p(\bar{A} \cap B) = p(B) - \underbrace{p(A) \times p(B)}$ indépendance de A et B.

$p(\bar{A} \cap B) = p(B) \times (1 - p(A)$

$p(\bar{A} \cap B) = p(B) \times p(\bar{A})$

Exercice 8

Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers tels que : $p(A) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,65$.
Déterminer, en justifiant, la probabilité de l'événement B.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0,65 = 0,3 + p(B) - p(A) \times p(B)$ car A et B indépendants

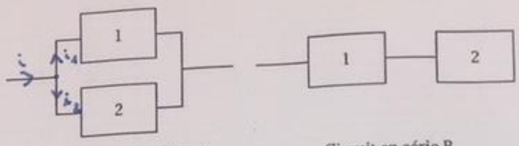
$0,65 = 0,3 + p(B) - 0,3 \times p(B)$

$0,65 = 0,3 + 0,7\,p(B)$

$0,7\,p(B) = 0,65 - 0,3 = 0,35$

$p(B) = \dfrac{0,35}{0,7} = 0,5$

Exercice 9 Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.*

1. A = "Le circuit A est défaillant".

$p(A) = p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p(D_2)$ car D_1 et D_2 indépendants

$p(A) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.

2. B = "Le circuit B est défaillant".

$p(B) = p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - \underbrace{p(D_1 \cap D_2)}_{= p(A)}$

$p(B) = 0,39 + 0,39 - 0,1521$

$p(B) = 0,78 - 0,1521 = 0,6279$.

Remarque : lorsqu'on a une succession d'épreuves aléatoires indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire que l'issue de l'une quelconque d'entre-elles n'influe pas sur l'issue des autres, la probabilité associée à un événement constitué d'une succession d'issues est égale au produit des probabilités de chacune de ces issues.

Par exemple le lancer deux fois consécutives d'un même dé constitue deux épreuves aléatoires indépendantes (mais identiques).

La probabilité d'obtenir deux fois six d'affilée est donc égale à : $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

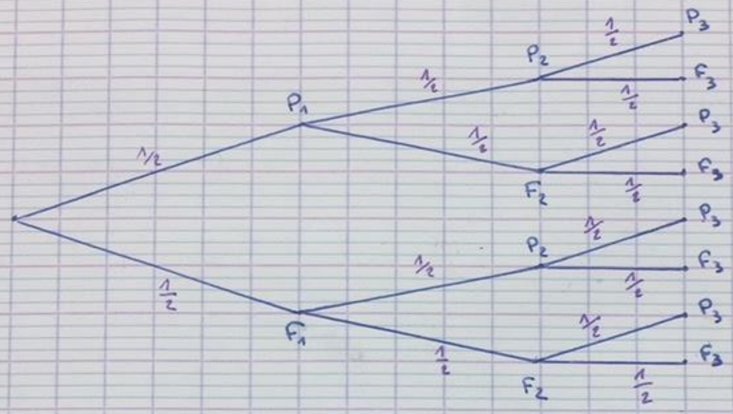
Exercice 10

On lance trois fois d'affilée une même pièce de monnaie non truquée.
Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « *Obtenir* trois piles ».
B : « *Obtenir* au moins un face ».
C : « *Obtenir* exactement deux piles ».

$p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$p(B) = 1 - \underset{\underset{p(\bar{A})}{\shortparallel}}{p(A)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. $\quad B = \bar{A}$!!!



$p(C) = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ car ici cf arbre : 3 chemins sur les 8 qui st de m̂ probabilité $\frac{1}{2}$ réalisent C.

Exercice 11

Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible est de 0,8. Il lance une volée de trois flèches et on suppose les tirs indépendants. Quelle est la probabilité :

1) que toutes les flèches ratent la cible ? 2) qu'au moins une flèche soit dans la cible ?

Lo évenement contraire de rater 3× la cible.

1) $0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,2^3 = 0,008$

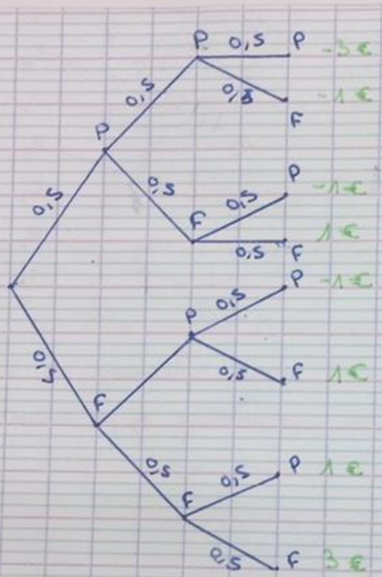
2) $1 - 0,008 = 0,992$.

VI – Variables aléatoires

Un exemple d'introduction

On lance trois fois d'affilée une pièce non truquée, et on note après chaque lancer, si le côté pile noté P est apparu ou si le côté face noté F est apparu.

Soit Ω l'univers des possibles. Décrire Ω. On commencera par faire un arbre de probabilité modélisant l'expérience aléatoire ici décrite.



$\Omega = \{PPP ; PPF ; PFP ; PFP ; FPP ; FPF ; FFP ; FF$

On définit un jeu, qui consiste à gagner 1€ à chaque fois que face apparaît, et à perdre 1€ à chaque fois que pile apparaît.

Ainsi, à chaque résultat de l'univers des possibles, on peut associer un nombre réel égal au gain relatif du joueur (ce dernier est positif ou négatif, selon que le joueur gagne/perde à ce jeu).

Par exemple, au résultat FFF est associé un gain de 3€

Rq : À l'issue "PFP" est associé le gain de $-1+1-1=-1$ €

Définition

Lorsqu'on associe à chaque éventualité d'un univers Ω d'une expérience aléatoire un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire sur Ω.**

Une variable aléatoire est donc une fonction qui à chacune des éventualités de Ω associe un nombre réel.

Remarques : l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X se note : $X(\Omega)$ (lire X de Ω).

Si une variable aléatoire X prend pour valeurs : x_1 ; x_2 ; … ; x_n alors : $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$

L'événement : " X prend la valeur x_i " est noté : $(X = x_i)$

L'événement : " X prend des valeurs supérieures ou égales à x_i " est noté : $(X \geq x_i)$

Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction, qui à chaque valeur x_i prise par X associe la probabilité de l'événement $(X=x_i)$.

On dressera systématiquement un tableau de la forme :

Valeur x_i prise par X (noté : $X = x_i$)	x_1	x_2	………	x_n
Probabilité $p(X=x_i)$	p_1	p_2	…………	p_n

Remarque : on aura toujours : ♥ $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i) = 1$ ♥.

$$p(X=x_1) + p(X=x_2) + \dots + p(X=x_n) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(X=x_n) = 1$$

Exemple 0

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique associé à la précédente expérience aléatoire : quelles sont les différentes valeurs prises par X ? -3 ; -1 ; 1 et 3.

Décrire l'événement $(X = 1)$: obtenir deux faces et un pile lors des trois lancers.

$X(\Omega) = \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}$

et, $p(X = -3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$; $p(X = -1) = 3 \times 0{,}5^3 = 0{,}375$ $p(X = 1) = 0{,}375$ et $p(X = 3) = 0{,}125$

On dresse le tableau suivant (appelé ***la loi de probabilité*** de l'expérience aléatoire).

Valeurs x_i prises par X	-3	-1	1	3
$p(X = x_i)$	$0{,}125$	$0{,}375$	$0{,}375$	$0{,}125$

$= 1$

Exemple 1

On lance successivement deux dés cubiques non truqués. On note les deux chiffres obtenus.

a) Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.

b) Soit X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des deux chiffres obtenus.

Donner la loi de probabilité de X. En particulier, décrire l'événement : $(X=0)$.

c) Déterminer $p(X=6)$.

d) Déterminer $p(X<2)$, puis $p(2 \leqslant X < 5)$, puis $p(X \geq 4)$.

a) $\Omega = \{(x;y)$ avec $x \in [\![1;6]\!]$ et $y \in [\![1;6]\!]\}$

↳ nbs entiers de l'intervalle $[1;6]$.

Rq: Ω est composé de 36 issues.

b) Ex : Dé 1 : 5 ; Dé 2 : 3 → (5 ; 3)

Dans ce cas, X = distance séparant les nbs 5 et 3.

$X = 2$.

Dé 1 : 2 ; Dé 2 : 6

Ds ce cas, $X = 4$

Dé 1 : 4 ; Dé 2 : 4.

Ds ce cas, $X = 0$.

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

→ distance entre 2 et 6

$|2-6| = |-4| = 4$

Grâce à ce tableau : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} = [\![0;5]\!]$.

↳ valeurs prises par X

__Loi de probabilité de X__

Valeurs $X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$= 1$.

$(X=0)$ est l'évenement : obtenir deux chiffres identiques sur les dés !

c) $p(X=6)=0$ car $(X=6)$ est un évenement impossible.

d) $p(X<2)=p(X=0)+p(X=1)=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}=\frac{16}{36}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

$p(2\leqslant X<5)=p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

$p(X\geqslant 4)=p(X=4)+p(X=5)=\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Exemple 2

Un sac contient 3 boules noires, 2 boules rouges et 1 boule jaune. L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard, successivement et sans remise, 2 boules dans le sac.

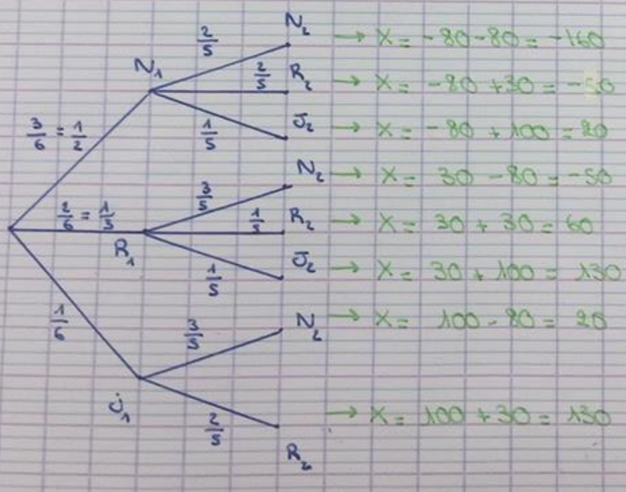
Le joueur gagne 100€ par boule jaune, 30€ par boule rouge, et perd 80€ par boule noire tirée.

On définit la variable aléatoire, notée X, donnant le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire :

N_1 : noir en premier...



Donc $X(\Omega)=\{-160;-50;20;60;130\}$

$p(X=-160) = p(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

$p(X=-50) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

$p(X=20) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$p(X=130) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15} + \frac{2}{30} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$.

$p(X=60) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

D'où la loi de probabilité de X :

$(X=x_i)$	-160	-50	20	60	130	
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$=1$

VII – Paramètres d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

Valeur x_i prise par X.	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

- L'espérance mathématique de la variable aléatoire X, notée $E(X)$ est le nombre réel défini par :

♥♥♥ $E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \times p_k$ ♥♥♥

Concrètement, $E(X)$ n'est autre que la moyenne pondérée des valeurs x_i prises par X, pondérées par les probabilités p_i.

Concrètement, $E(X)$ peut être interprétée comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.

Exemple

Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X de l'exemple 2 précédent, et interprétez ce résultat.

Rq : $\dfrac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = x_1 \times p_1 + \dots + x_n \times p_n = E(X)$

Exemple précédent

$E(X) = -160 \times \frac{1}{5} + (-50) \times \frac{2}{5} + 20 \times \frac{1}{5} + 130 \times \frac{2}{15}$

$E(X) = -32 - 20 + 4 + 4 + \frac{52}{3}$

$E(X) = -44 + \frac{52}{3} = \frac{-44 \times 3}{3} + \frac{52}{3} = \frac{-132 + 52}{3} = -\frac{80}{3}$

$E(X) \approx -26{,}67$

En moyenne, à chaque fois que je joue à ce jeu, je perds environ 26,67 € !!

- La variance de X, notée $V(X)$, est la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne : → espérance

$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k \times (x_k - E(X))^2$

- L'écart type de X, noté $\sigma(X)$ est définit par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

↳ sigma minuscule

Comme en statistique, toutes ces valeurs peuvent (doivent) être calculées à l'aide d'une calculatrice.

Remarques importantes

L'écart type est exprimé dans la même unité que l'espérance. Il mesure la ***dispersion des valeurs prises par l'expérience aléatoire autour de son espérance.***

Au plus l'écart type est élevé, au plus on a une variable aléatoire prenant des valeurs dispersées autour de son espérance.

Enfin, concernant les jeux d'argent :

- **Un jeu est qualifié d'équitable lorsque $E(X) = 0$.**
- **Si $E(X) < 0$, le jeu est défavorable pour le joueur.**
- **Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable pour le joueur.**

Exercice 12

On lance un dé cubique non truqué. On gagne 6€ lorsque le 6 apparaît, on gagne 5€ lorsque le chiffre 5 apparaît, et on perd 3€ dans tous les autres cas.

Soit X la variable aléatoire associée au gain obtenu.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer $E(X)$. Interprétez ce résultat.
3) Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

1) Ici $X(\Omega) = \{-3 ; 5 ; 6\}$

Donc on a :

$(X = x_i)$	-3	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) $E(X) = -3 \times \frac{4}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$

$E(X) = \frac{-12}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{-1}{6}$

En moyenne, on perd $\frac{1}{6}$ € par partie effectuée.

Rq : ce jeu est donc défavorable au joueur car $E(X) < 0$.

3) $V(X) = \frac{4}{6} \times \left(-3 - \left(\frac{-1}{6}\right)\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(5 - \left(\frac{-1}{6}\right)\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(6 - \left(\frac{-1}{6}\right)\right)^2$

$V(X) = \frac{4}{6} \times \left(\frac{-17}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(\frac{31}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(\frac{37}{6}\right)^2$

$V(X) = \frac{581}{36}$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{581}{36}}$

$\sigma(X) \approx 4$ arrondi à l'unité près.

Exercice 13

Une urne contient dix boules : cinq vertes, trois rouges et deux noires. Un joueur tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. S'il obtient deux boules vertes, il gagne 4€. Sinon, il perd 2€ pour deux boules rouges, 5€ pour deux boules noires, et 1€ pour deux boules de couleurs différentes.

On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.

1) Donner la loi de probabilité de G.
2) Calculez $E(G)$. Le jeu est-il équitable ?
3) Calculer $\sigma(G)$ à 10^{-2} près.
4) Reprendre toutes ces questions dans le cas d'un tirage successif de deux boules sans remise. Comparer les espérances et les écarts types obtenus. Conclusion ?

1) V = "obtenir une boule verte".
N = "obtenir une boule noire".
R = "obtenir une boule rouge".

Ici $G(\Omega) = \{-5 ; -2 ; -1 ; 4\}$

$p(G = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$p(G = -2) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0{,}09$

$p(G = -5) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

Par suite $p(G=-1) = 1 - (0{,}25 + 0{,}09 + 0{,}04)$

$p(G=-1) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$

Donc la loi de probabilité de G est :

$G = g_i$	-5	-2	-1	-4
$p(G=g_i)$	0,04	0,09	0,62	0,25

2) $E(G) = -5 \times 0{,}04 + (-2) \times 0{,}09 + (-1) \times 0{,}62 + (-4) \times 0{,}25$

$E(G) = 0$

Ce jeu est donc équitable.

3) $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{0{,}04 \times (-5-0)^2 + 0{,}09 \times (-2-0)^2 + 0{,}62 \times (-1-0)^2 + 0{,}25 \times}$

$\sigma(G) = \sqrt{0{,}04 \times (-5)^2 + 0{,}09 \times (-2)^2 + 0{,}62 \times (-1)^2 + 0{,}25 \times 4^2}$

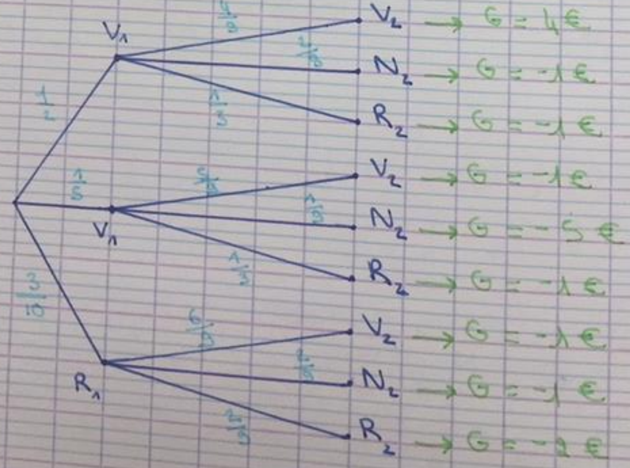
$\sigma(G) \approx 2{,}45$

4) 5V ; 3R ; 2N. Tirage successif sans remise de deux boules.

$G = 4€$ si 2b. V. $\quad$ $G = -5€$ si 2b. N

$G = -2€$ si 2b. R. $\quad$ $G = -1€$ si 2b $\neq$

1)



$G(\Omega) = \{-5 ; -2 ; -1 ; 4\}$

$p(G=4) = p(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

$p(G=-5) = p(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

$p(G=-2) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{3 \times 2}{10 \times 3 \times 3} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$

$p(G=-1) = 1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{45} + \frac{1}{15}\right) = 1 - \left(\frac{10}{45} + \frac{1}{45} + \frac{3}{45}\right) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}.$

D'où la loi de probabilité de G :

$(G=g_i)$	-5	-2	-1	4
$p(G=g_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{31}{45}$	$\frac{2}{9}$

2) $E(G) = -5 \times \frac{1}{45} + (-2) \times \frac{1}{15} + (-1) \times \frac{31}{45} + 4 \times \frac{2}{9}$

$E(G) = -\frac{5}{45} - \frac{2}{15} - \frac{31}{45} + \frac{8}{9}$

$E(G) = \frac{-2}{45}$

Ici, $E(G) < 0$: le jeu n'est pas équitable et il est défavorable au joueur.

3) $V(G) = \frac{1}{45} \times \left(-5 - \left(\frac{-2}{45}\right)\right)^2 + \frac{1}{15} \times \left(-2 - \frac{-2}{45}\right)\right)^2 + \frac{31}{45} \times \left(-1 - \left(\frac{-2}{45}\right)\right)^2 + \frac{2}{9}\left(4 - \left(\frac{-2}{45}\right)\right)^2$

$V(G)$

$\sigma(G) \approx 2{,}25$ (avec calculatrice)

Rq : Par rapport à un tirage avec remise σ a diminué ($\sigma'(G) \approx 2{,}45$)

Donc les valeurs sont légèrement moins dispersées autour de $E(G)$.

Exercice 14

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros, et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

1. Démontrer que :

$$P(X=-1)=\frac{20n}{(n+10)(n+9)}.$$

2. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable aléatoire X.
3. Vérifier que l'espérance de la variable aléatoire X vaut :

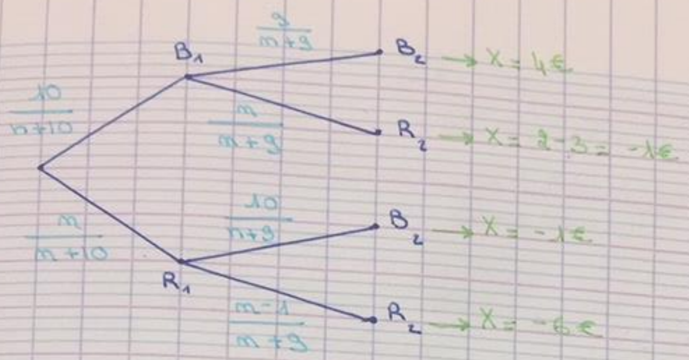
$$E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$$

4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance est strictement positive.
5. Ce jeu peut-il être équitable ?

1. 2€ par b. B tirée
   −3€ par b. R tirée
   2 tirages successifs sans remise
   X = gain du joueur
   10 bl ; $n \geqslant 2$ rouges

Arbre

B_i = blanche au $i^{ème}$ tirage
R_i = rouge au $i^{ème}$ tirage



$p(X=-1) = p(B_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2)$

$$p(X=-1) = \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+9} + \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9}$$

$$p(X=-1) = \frac{10n}{(n+10)(n+9)} + \frac{10n}{(n+10)(n+9)}$$

$$p(X=-1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$$

2. $p(X=4) = p(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}$

$p(X=-6) = p(R_1 \cap R_2) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$

D' où la loi de probabilité de X :

$(X = x_i)$	-6	-1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$	$\frac{20n}{(n+10)(n+9)}$	$\frac{90}{(n+10)(n+9)}$

3. $E(X) = \frac{-6 \times n(n-1)}{(n+10)(n+9)} + \frac{(-1) \times 20n}{(n+10)(n+9)} + \frac{4 \times 90}{(n+10)(n+9)}$

$$E(X) = \frac{-6n(n-1) - 20n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

$$E(X) = \frac{-6n^2 + 6n - 20n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$$

4. $E(X) > 0$ cdd : $\frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)} > 0$

Or $n \geq 2$, donc $(n+10)(n+9) > 0$.

Donc $-6n^2 - 14n + 360 > 0$

$2(-3n^2 - 7n + 180) > 0$

Donc $-3n^2 - 7n + 180 > 0$

Ici : $a = -3$; $b = -7$ et $c = 180$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times (-3) \times 180 = 49 + 12 \times 180 = 2209 = 47^2$.

$\Delta > 0$ donc ce trinôme a deux racines :

$$\begin{cases} n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 47}{-6} = \frac{-40}{-6} = \frac{20}{3} \\ n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 47}{-6} = \frac{54}{-6} = -9. \end{cases}$$

$a < 0$ donc :

n	$-\infty$		$\frac{20}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3n^2 - 7n + 180$		$+$	0	$-$	

Or si n est un entier, dc $E(X) > 0$ ssi $n \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

car $\frac{20}{3} \approx 6,67$

Ce jeu est favorable pour 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6 boules rouges dans l'urne.

5. Jeu équitable : $E(X) = 0$

Or $E(X) = 0 \iff n = \frac{20}{3}$

Or $\frac{20}{3} \notin \mathbb{N}$, dc ce jeu n'est jamais équitable !!!