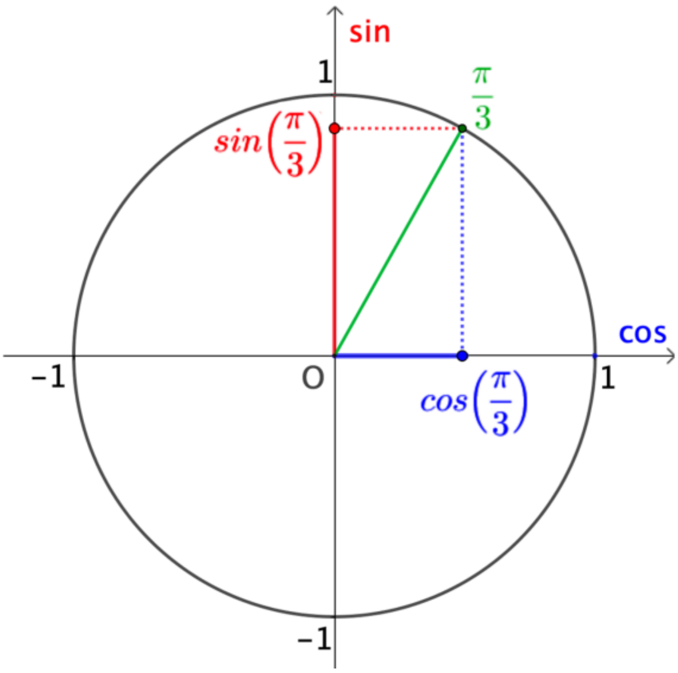
Intégralité du cours avec corrigé **:** 20TrigoT (maths-et-tiques.fr)

Partie 1 : Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

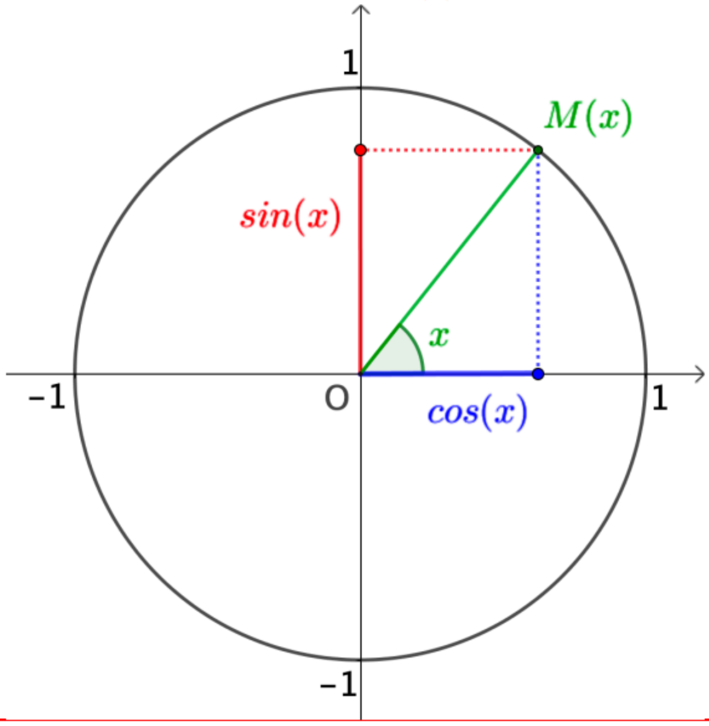
1) Définitions et propriétés

Exemple :

A l'aide du cercle trigonométrique, il est possible de lire le cosinus et le sinus d'un nombre.
Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées.



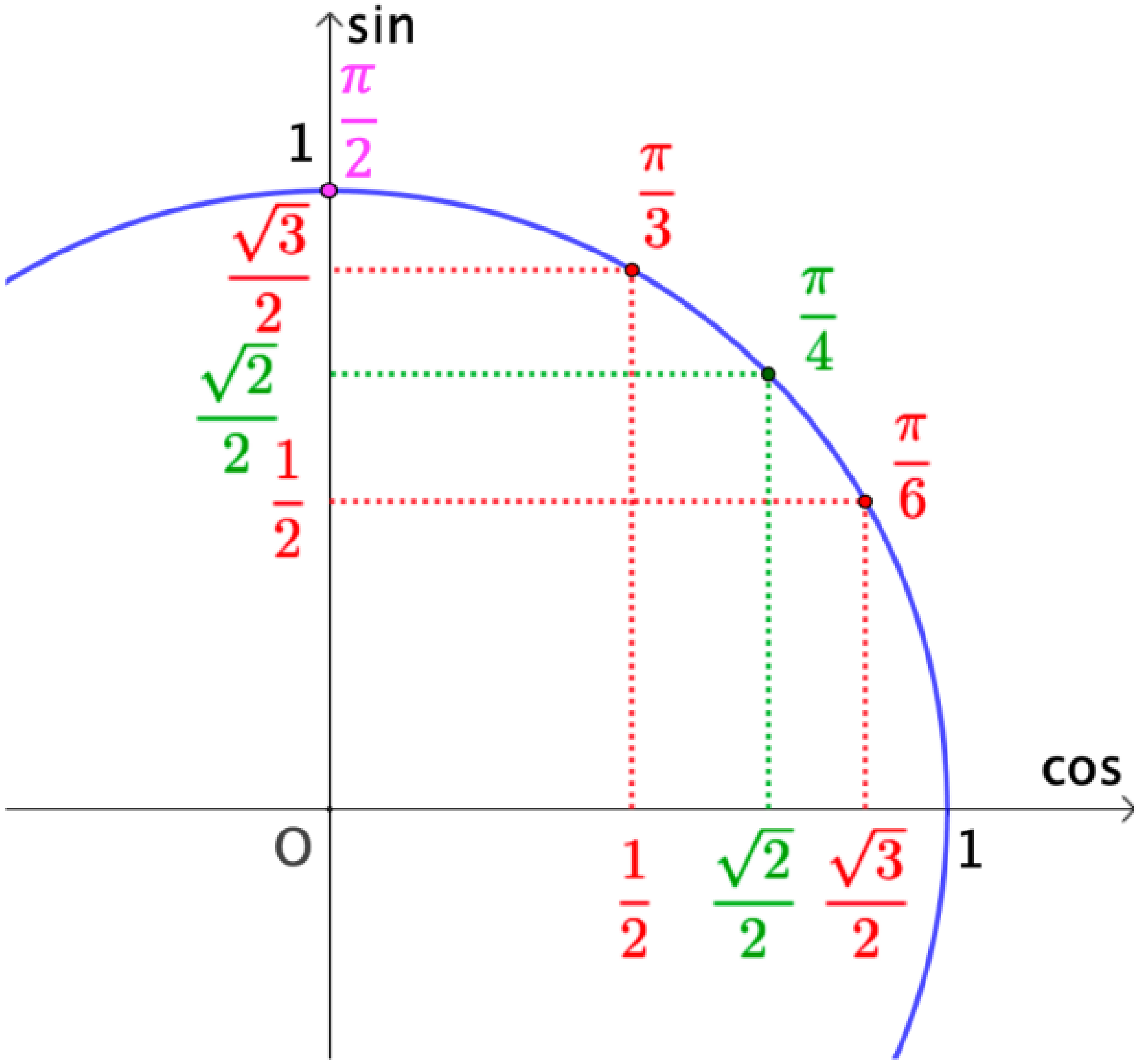
Définitions : Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).
- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on note $\mathbf{cos}(x)$.
- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on note $\mathbf{sin}\,(x)$.



Propriétés :
1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

3) Valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Méthode : Résoudre une équation et une inéquation trigonométrique

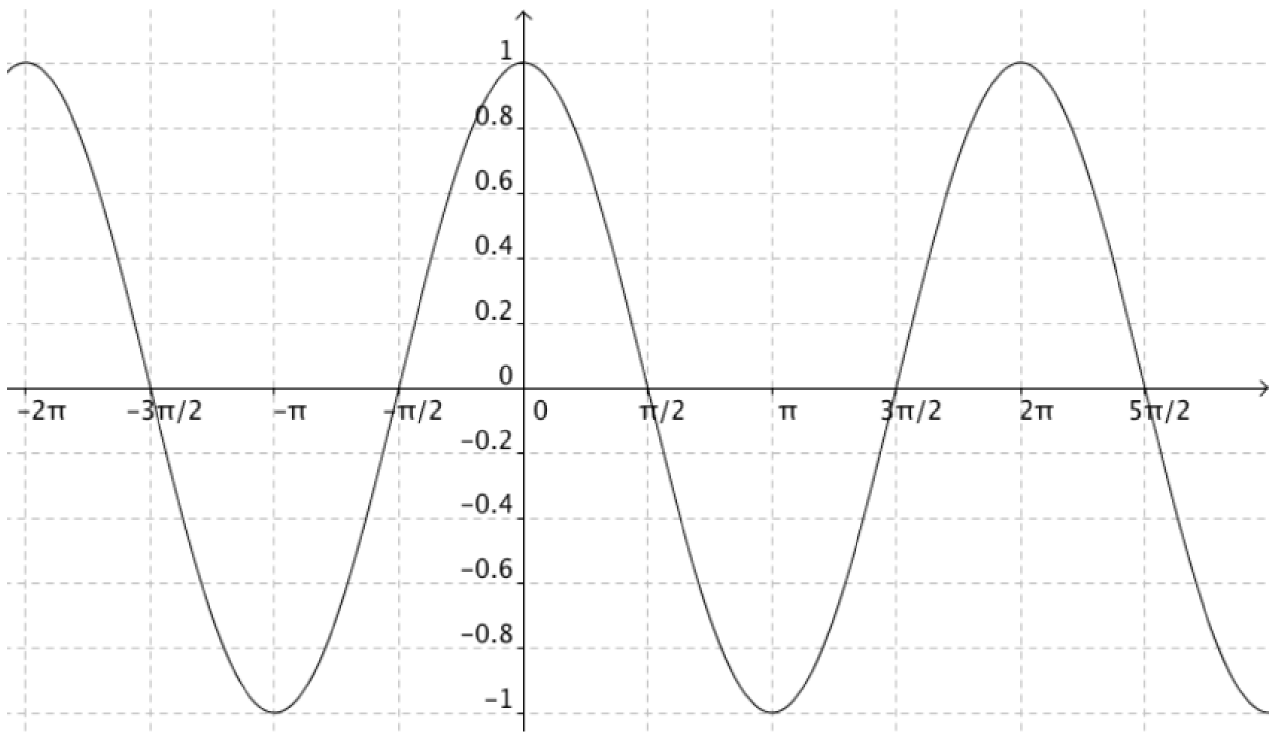
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.

2) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation : $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

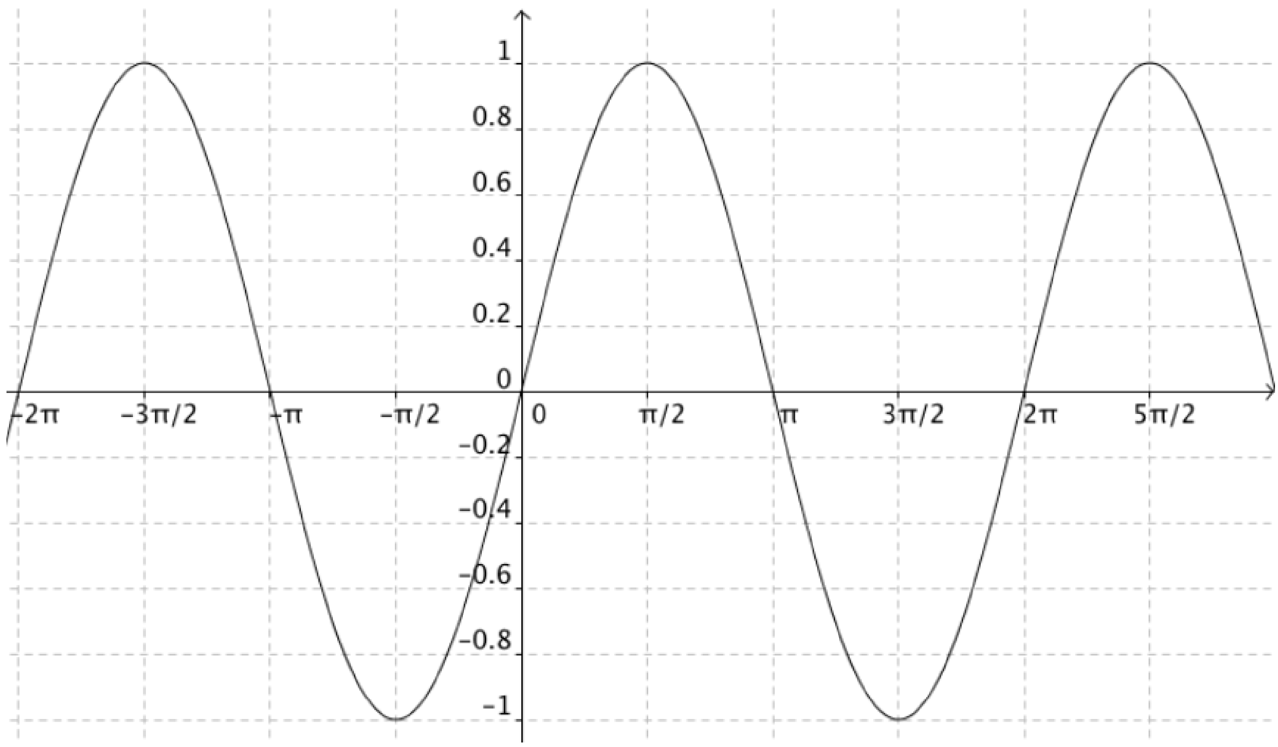
Partie 2 : Propriétés des fonctions cosinus et sinus

1) Définitions

Définitions :
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



Fonction cosinus



Fonction sinus

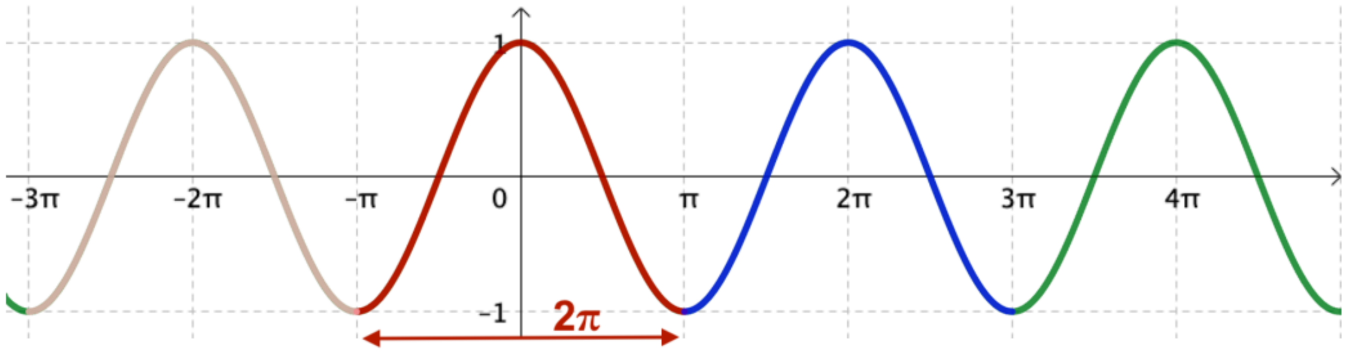
2) Périodicité

Propriétés : 1) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
2) $\sin(x) = \sin\,(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

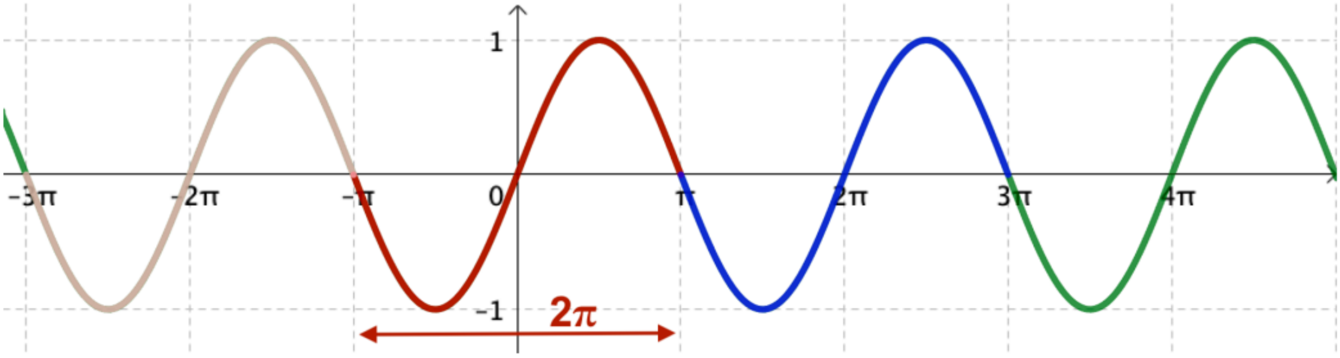
Démonstration : Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque :
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π**.
Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.

Fonction cosinus



Fonction sinus



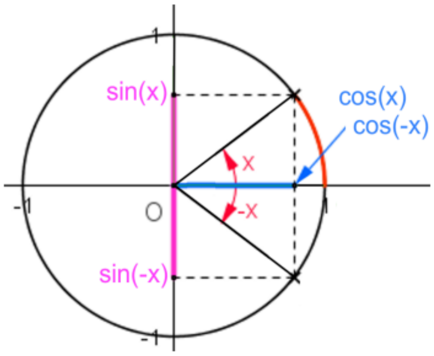
3) Parité

Définitions : - Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarques :
- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.
Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés :
- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration :
Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



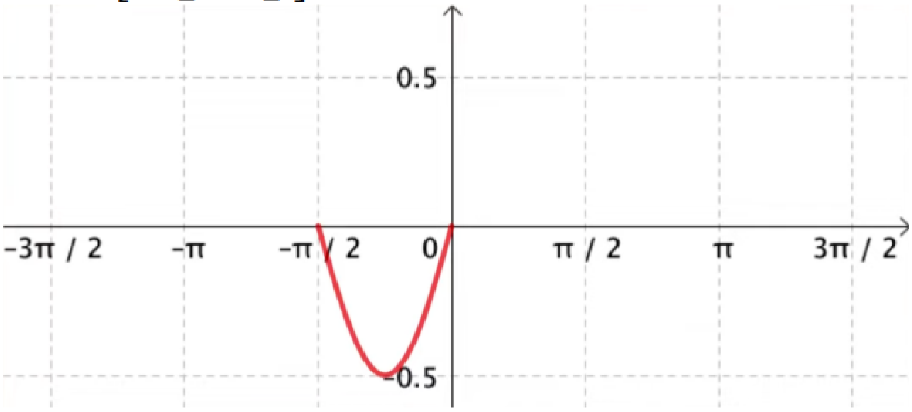
Remarques :
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

Méthode : Compléter un graphique par parité et périodicité

Soit f une fonction impaire et périodique de période π. Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right]$.



Partie 3 : Variations des fonctions cosinus et sinus

1) Dérivées

Fonction	Dérivée
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(ax+b)$ a et b réels	$-a\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$ a et b réels	$a\cos(ax+b)$

2) Tableaux de variations

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) Représentations graphiques

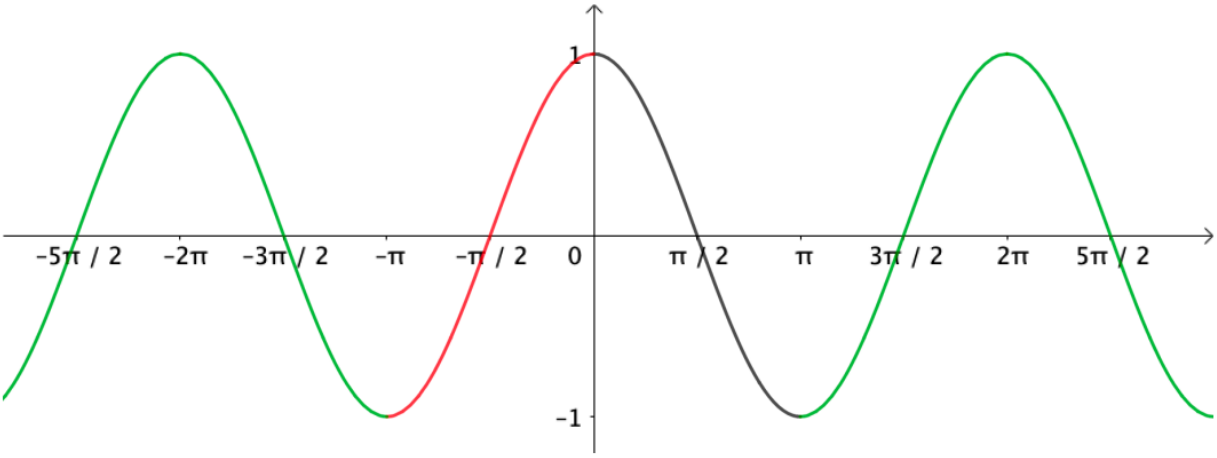
● On retrouve la représentation graphique de cosinus en complétant les données du tableau de variations :

- par symétrie avec l'axe des ordonnées (cosinus est paire),
- par translation (cosinus est périodique de période 2π).

3) Représentations graphiques

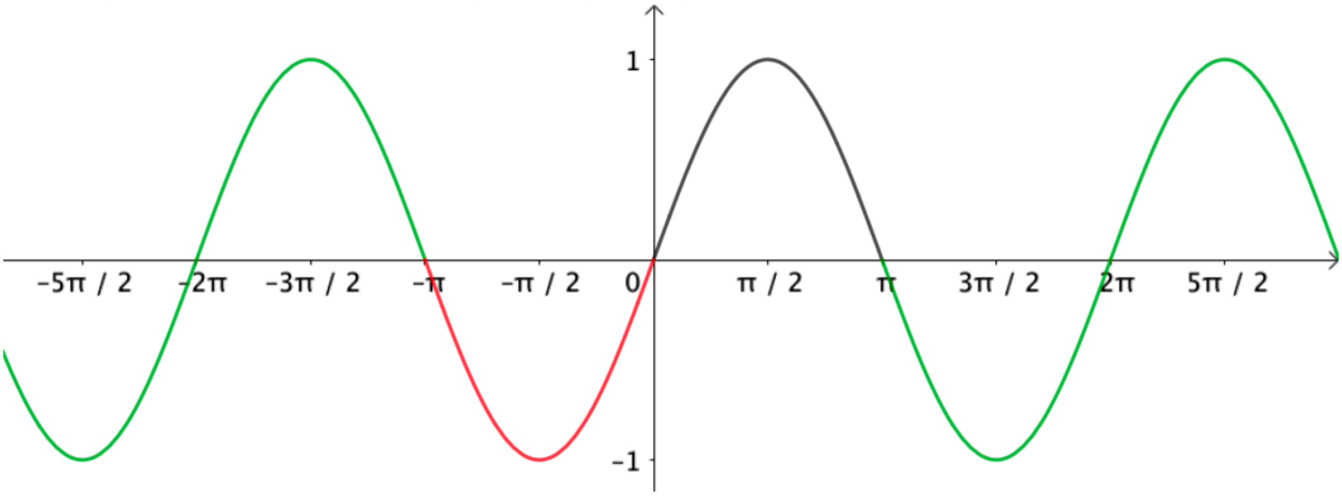
● On retrouve la représentation graphique de cosinus en complétant les données du tableau de variations :

- par symétrie avec l'axe des ordonnées (cosinus est paire),
- par translation (cosinus est périodique de période 2π).



● On retrouve la représentation graphique de sinus en complétant les données du tableau de variations :

- par symétrie avec l'origine du repère (sinus est impaire),
- par translation (sinus est périodique de période 2π).



Méthode : Étudier une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

a) Étudier la parité de f.

b) Démontrer que la fonction f est périodique de période π.

c) Étudier les variations de f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et par translation.

Sujet 0 du bac

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

1. Sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$, l'équation

$$\sin(x) = 0,1$$

admet :

a. zéro solution **b.** une solution
c. deux solutions **d.** quatre solutions

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = x + \sin(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable.

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$

b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$

c. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ un unique point d'inflexion

d. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ exactement deux points d'inflexion

Chapitre XIV *Fonctions trigonométriques (version intégrale et pour le post bac)*

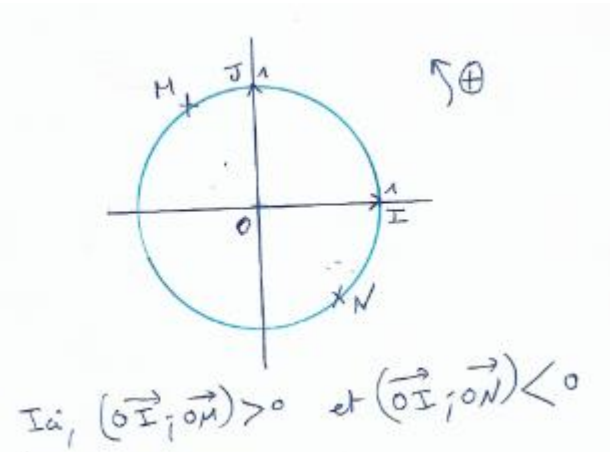
I – Rappels et compléments

Prenons le temps de bien comprendre le fonctionnement du cercle trigonométrique qui est à la base de bon nombre de propriétés en trigonométrie.

Soit (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) un repère orthonormé direct du plan : direct signifie que ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) $= \frac{\pi}{2}$ en mesure principale.

Tout d'abord on appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 que l'on a orienté avec la convention suivante : lorsqu'un point M appartient à $\mathcal{C}$, si en tournant sur $\mathcal{C}$ pour rabattre le point I sur le point M, par le plus court chemin, on tourne dans le sens direct (= sens contraire aux aiguilles d'une montre), on comptera positive la mesure principale de l'angle orientée ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OM}$).

Sinon cette dernière sera négative.



Enfin la longueur du petit arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ est appelé la mesure en radian de l'angle ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OM}$).

Si M est diamétralement opposé à I, alors :

$\overset{\frown}{IM}$ = demi-périmètre du cercle trigonométrique $= 0{,}5 \times 2\pi \times 1 = \pi$. (Rappel : $p = 2\pi R$ est le périmètre d'un cercle de rayon R).

et ($\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OM}$) $= 180$ °.

Ainsi, à un angle de mesure 180° correspond une mesure en radian de 180°

Il y a de plus proportionnalité entre la mesure d'un angle exprimée en degré et celle exprimée en radian : ceci permet de passer aisément des degrés aux radians et inversement.

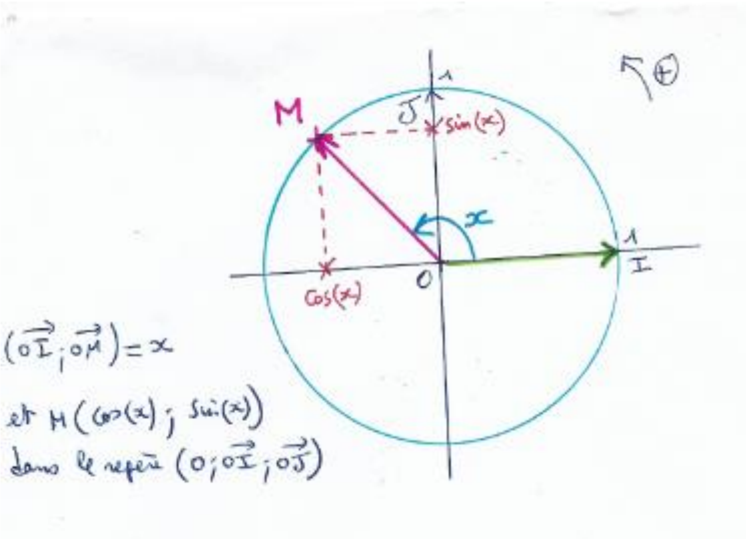
Mesure en degré	180	a
Mesure en radian	π	$a \times \frac{\pi}{180}$

Correspondance entre degré et radian : ♥♥♥ **180 ° = π *rad*** ♥♥♥

Définition

La fonction qui a tout réel x fait correspondre ***l'abscisse du point M*** dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ est appelée la fonction ***cosinus***.

La fonction qui à tout nombre réel x fait correspondre ***l'ordonnée du point M*** dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ est appelée la fonction ***sinus***.

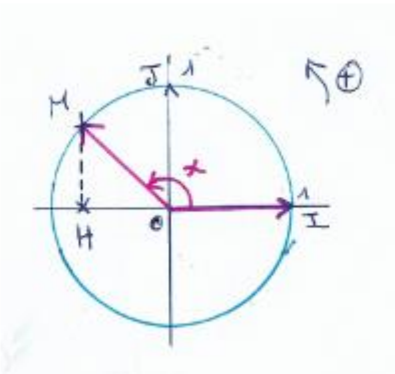


Propriétés immédiates (découlant de la définition)

i) Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

ii) Pour tout réel x, on a (relation de Pythagore trigonométrique) : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$.

Preuve : *i)* M appartient au cercle trigonométrique, donc son abscisse et son ordonnée sont comprises entre -1 et 1 !



ii) Appelons H le point de l'axe des abscisses ayant la même abscisse que M et appliquer Pythagore au triangle rectangle OHM (il est rectangle car le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ est orthonormé !) en tenant compte du fait que $OM = 1$ car on est sur un cercle trigonométrique et que $OH = |\cos(x)|$ et $HM = |\sin(x)|$ (attention une longueur est positive, ceci explique les valeurs absolues) et on rappelle enfin que pour tout réel a, $|a|^2 = a^2$.

Ainsi : $OH^2 + HM^2 = OM^2$ équivaut à : $|\cos(x)|^2 + |\sin(x)|^2 = 1^2$ donc : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

Remarque : lorsque cela ne prête pas à confusion, on notera $\cos x$ au lieu de $\cos(x)$, même s'il s'agit d'un abus d'écriture.

Valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus ***(à savoir par cœur, vous verrez l'an prochain l'importance qu'occupe la trigonométrie en mathématiques et en sciences).***

Pour la énième fois, ***mémorisez par cœur ce tableau***, ***dans les deux sens*** : je vous renvoie à vos cours de première pour la preuve de ces valeurs remarquables :

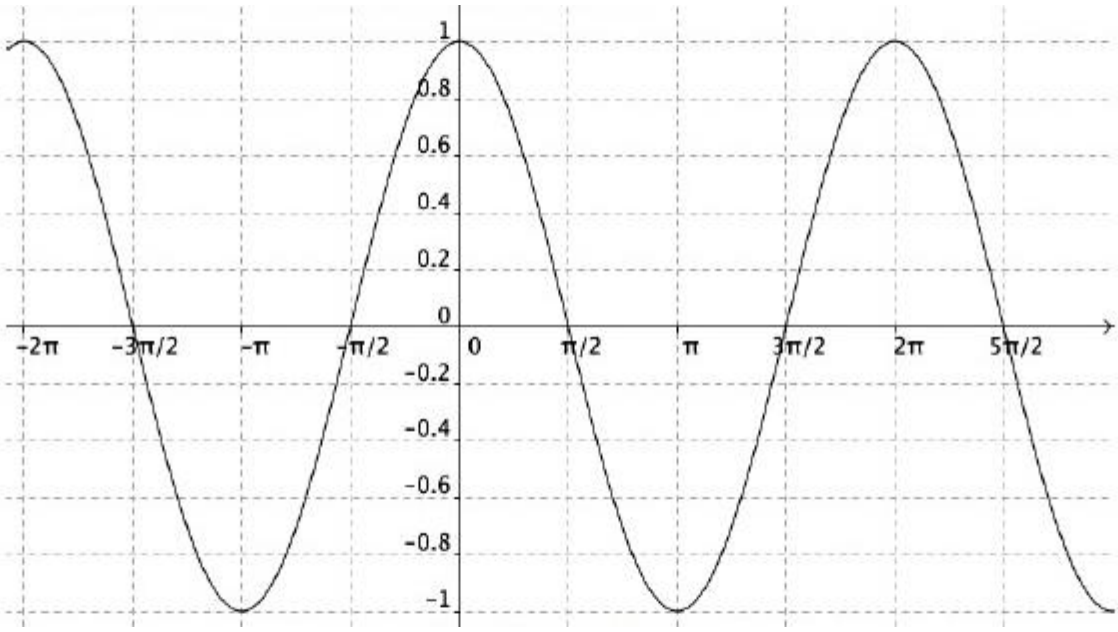
♥♥♥

x (*rad*)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

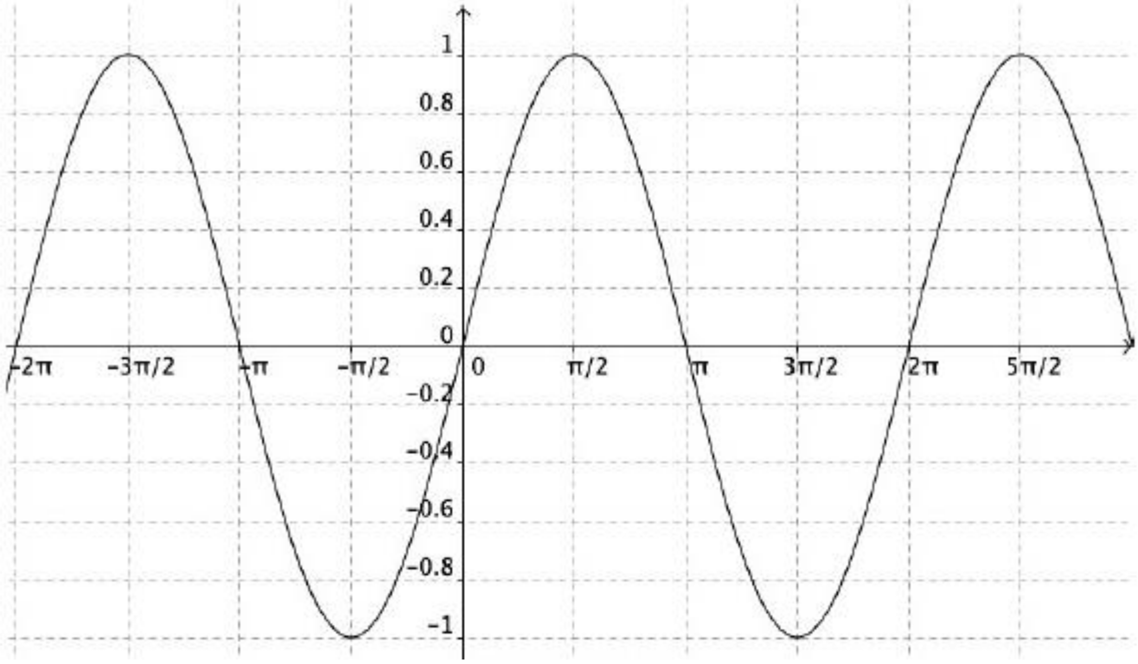
♥♥♥

D'où les représentations graphiques suivantes obtenues à l'aide d'un logiciel : pour calculer d'autres valeurs que celles figurant dans le tableau, divers procédés existent (formule de duplication, d'addition, *cf.* paragraphes suivants).

Courbe représentative de la ***fonction cosinus*** sur $[-2\pi\ ;\ 3\pi]$:



Courbe représentative de la ***fonction sinus*** sur [-2π ; 3π] :



L'observation de ces deux courbes laisse entrevoir que ces fonctions ont des propriétés intéressantes, ne serait-ce qu'en termes de tracé de courbe. C'est l'objet du paragraphe suivant que de dégager les différentes propriétés de ces fonctions.

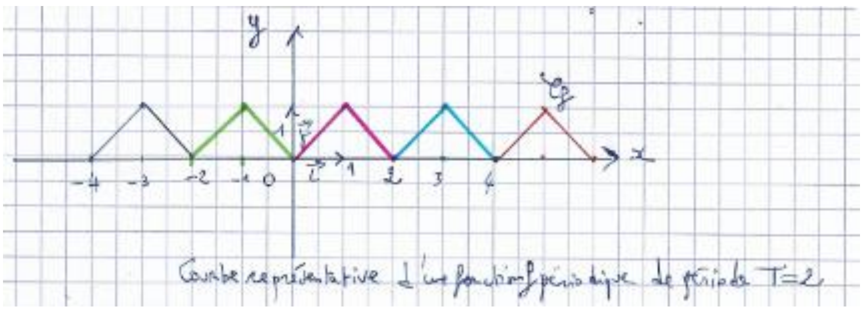
II – Diverses propriétés de ces deux fonctions

L'observation des courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus permet de constater que ces courbes sont obtenues à partir d'un motif que l'on reproduit périodiquement.

Définition

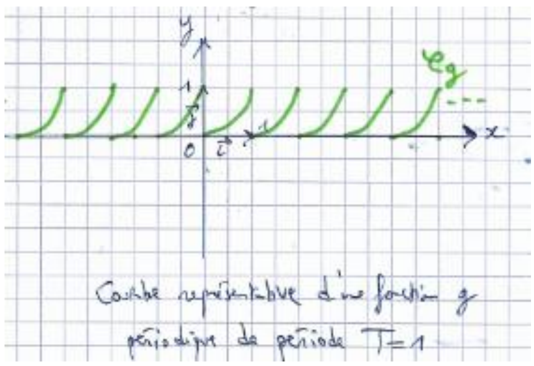
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite ***périodique de période*** T s'il existe un réel T strictement positif tel que : ♥♥♥ ***Pour tout réel x, on a : f(x +T) = f(x)*** ♥♥♥

Illustration : Construire une courbe représentative d'une fonction périodique de période $T=2$.



On a ici dessiné avec des couleurs différentes, 5 motifs de la courbe C_f.

Bien noter que chacun de ces motifs sont identiques !



Conséquences graphiques importantes :

- Dans un repère du plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, la courbe représentative d'une fonction périodique de période T est donc globalement invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.
- Si T est une période de f, alors f admet également comme périodes : kT où $k \in \mathbb{N}^*$

Par exemple, montrons que si f est T-périodique, alors f est aussi $2T$-périodique :

Pour tout réel x, $f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$ car f est T-périodique, argument qui sert ici deux fois pour simplifier les deux derniers signes =.

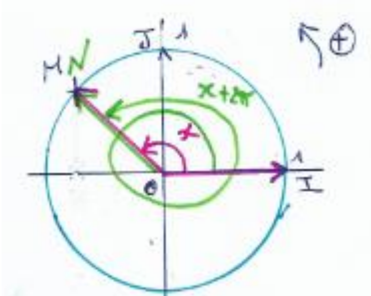
☞ On évitera donc de dire " ~~la~~ période de f " lorsqu'on parle de fonction périodique.

Propriété

♥♥♥Les fonctions ***cosinus*** et ***sinus*** sont ***périodiques***, de période 2π. ♥♥♥

On dit aussi que ces fonctions sont 2π-périodiques.

Preuve : quasi triviale !



Soit x un réel quelconque, et M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$ rad.

Dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$, on a : $\boxed{M(\cos(x)\ ;\ \sin(x)).}$

Soit N le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = x + 2\pi$ rad.

Dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$, on a : $\boxed{N(\cos(x+2\pi)\ ;\ \sin(x+2\pi)).}$

Or le périmètre du cercle trigonométrique, qui est de rayon 1, est égal à 2π.

Par suite les points M et N sont confondus, et à ce titre, ils ont respectivement même abscisse et même ordonnée : d'où $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

Ceci étant vrai quel que soit le réel x, il en résulte que les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

♥♥♥f est dite ***PAIRE sur*** $\mathcal{D}$ si, pour tout nombre réel x appartenant à $\mathcal{D}$, $-x$ appartient à $\mathcal{D}$ et pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$, on a : $f(-x) = f(x)$ ♥♥♥

♥♥♥ f est dite ***IMPAIRE* sur** $\mathcal{D}$ si, pour tout nombre réel x appartenant à $\mathcal{D}$, $-x$ appartient à $\mathcal{D}$ et pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$, on a : $f(-x)=-f(x)$ ♥♥♥

<u>Remarque</u> : dire "f est paire" n'a aucun sens si on ne précise pas sur quel intervalle on se place.

Par exemple, la fonction carrée est paire sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas paire sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

En effet, pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $(-x)^2 = x^2$.

Notez que la partie D de la définition doit être centrée en 0, ce qui se traduit par : pour tout nombre réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D.

Donc comme $[0 ; 5]$ n'est pas centré en 0, la fonction carrée n'est pas paire sur $[0 ; 5]$.

💣Attention, il faut à tout prix écrire le quantificateur *pour tout*, pour vérifier qu'une fonction est paire ou impaire sur un intervalle : écrire, comme le font à peu près 100 % des élèves : $f(-x) = f(x)$ donc f est paire n'a strictement aucun sens.

<u>Exemples</u>

a) Etablir que la fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$.

b) Est-il vrai que si une fonction n'est pas paire sur $\mathbb{R}$*, alors elle est impaire sur* $\mathbb{R}$ *?*

<u>Solution</u> :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

Vu que $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$, pour tout réel x, $-x$ appartient à $\mathbb{R}$, et :

Pour tout réel x, $f(-x)= (-x)^3 = (-x)\times(-x)\times (-x) = (-1)^3 \times x^3=-x^3 = -f(x)$.

Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

b) NON !!!

Prenons par exemple la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$: $e^{-1} \neq e^{1}$ (calculatrice si nécessaire ou ----$1<1$ et la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^{-1} < e^{1}$, et à ce titre la fonction exponentielle n'est pas paire sur $\mathbb{R}$ [la négation de : pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ est : il existe (au moins) un réel x tel que : $f(-x) \neq f(x)$].

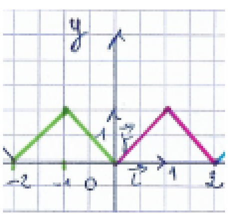
Pour autant, la fonction exponentielle n'est pas impaire sur $\mathbb{R}$ car par exemple, $e^{-1} \neq -e^{1}$ vu que $e^{-1} >0$!

💣💣*Attention à ce faux ami dû au vocabulaire utilisé : ne pas être paire pour une fonction ne signifie pas pour autant être impaire ! Une fonction n'est pas un entier relatif !!!!*💣💣

<u>Interprétation graphique des notions de parité et d'imparité d'une fonction dans un repère orthonormé</u> :

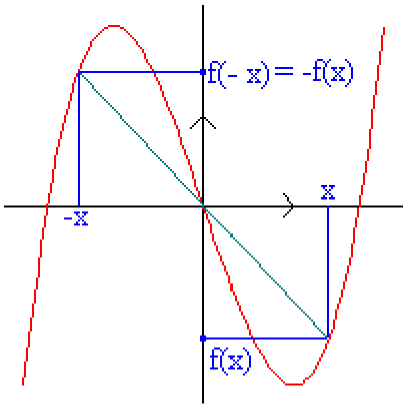
♥♥♥Si une fonction f est paire sur une partie D de $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f *admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.* ♥♥♥

<u>Illustration</u> : courbe représentative d'une fonction paire sur $[-2\ ;\ 2]$.



♥♥♥Si une fonction f est impaire sur une partie D de $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f *admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.*♥♥♥

Illustration : courbe représentative d'une fonction f impaire sur $\mathbb{R}$. O est l'intersection des axes du repère et à ajouter sur le graphique ci-dessous.

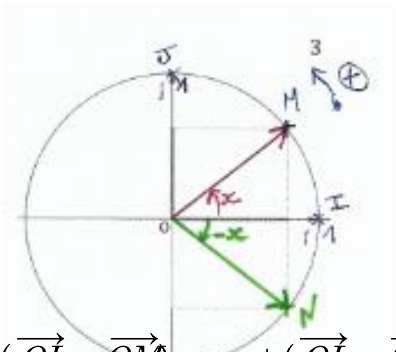


Propriété

La fonction ***cosinus*** est une fonction ***paire*** sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout réel x, ♥♥ $\boxed{\boldsymbol{cos(-x) = cos(x).}}$ ♥♥

La fonction ***sinus*** est une fonction ***impaire*** sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout réel x, ♥♥ $\boxed{\boldsymbol{sin(-x) = -sin(x)}}$. ♥♥

Preuve et illustration :

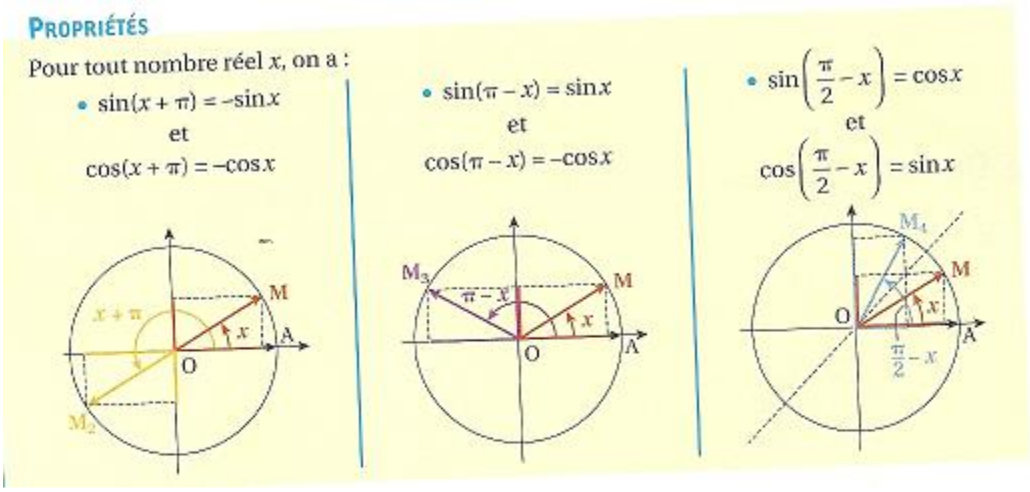


Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$ et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = -x$.

Donc $M\,(cos(x)\ ;\ sin(x))$ et $N\,(cos(-x)\ ;\ sin(-x))$.

De plus les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc, à ce titre, ils ont respectivement la même abscisse (donc $cos(-x) = cos(x)$) et des ordonnées opposées (donc $sin(-x) = -sin(x)$).

♥♥♥ ***<u>Propriétés importantes</u>*** ♥♥♥



<u>Il est important de savoir retrouver instantanément ces propriétés grâce à un cercle trigo !</u>

<u>Exercice I</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\cos(x) - \cos(2x)$.

Etablir que f est paire sur $\mathbb{R}$, et périodique de période 2π.

Sur quel intervalle suffit-il donc d'étudier f ?

<u>*Solution*</u>

Pour tout réel x, $-x$ est réel et $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-2x) = 3\cos(x) - \cos(2x)$ car la fonction *cos* est paire sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de passer du premier au second signe = !

Donc $\boxed{f \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$

Pour tout réel x, $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(2(x+2\pi)) = 3\cos(x) - \cos(2x+4\pi)$ car *cos* est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, *et* $\cos(2x+4\pi) = \cos(2x+2\pi+2\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x)$ *par le même argument.*

Ainsi, pour tout réel x, $f(x+2\pi) = 3\cos(x) - \cos(2x) = f(x)$.

Par suite, $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$

Vu que f est 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π : par exemple $[0 ; 2\pi]$ ou encore $[-\pi ; \pi]$. Ce dernier a l'avantage d'être centré en 0.

De plus, f est paire sur $\mathbb{R}$, donc il suffira d'étudier f sur $[0 ; \pi]$. Le graphe de f se déduira par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

***Propriété* (équations trigonométriques)**

Soit a un réel fixé.

- Résoudre l'équation : $cos(x) = cos(a)$, d'inconnue x, équivaut à dire que :

♥♥♥ $cos(x) = cos(a) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = -a + 2k\pi \end{array} \right.$ où $k \in \mathbb{Z}$ ♥♥♥

En français, deux nombres ont le même cosinus si et seulement si ils sont égaux ou opposés, modulo 2π.

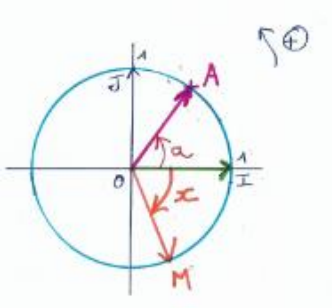
- Résoudre l'équation : $sin(x) = sin(a)$, d'inconnue x, équivaut à dire :

♥♥♥ $sin(x) = sin(a) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{array} \right.$ où $k \in \mathbb{Z}$ ♥♥♥

En français, deux nombres ont le même sinus si et seulement si ils sont égaux modulo 2π ou si la somme de ces deux nombres est égale à π modulo 2π. $(a + \pi - a = \pi$!!).

Illustration et preuve *:*

Soit a et x des réels quelconqu



Dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$, soit A le point du cercle trigonométrique tel que : $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OA}) = a$ et M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$.

On a donc : $A(cos(a)\ ;\ sin(a))$ et $M\ (cos(x)\ ;\ sin(x))$.

$cos(x) = cos(a)$ équivaut donc à dire que les points M et A ont la même abscisse, ce qui revient à dire qu'ils sont confondus (ce qui signifie que $x = a + 2k\pi$ avec k entier relatif) ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses (ce qui signifie que $x = -a + 2k\pi$ avec k entier relatif).

$sin(x) = sin(a)$ équivaut donc à dire que les points M et A ont la même ordonnée, ce qui revient à dire qu'ils sont confondus (ce qui signifie que $x = a + 2k\pi$ avec k entier relatif) ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (ce qui signifie que $x + a = \pi + 2k\pi$ avec k entier relatif).

En terminale, on sait donc résoudre deux types d'équations trigonométriques : celles de la forme : $cos(x) = cos(a)$ et celles de la forme : $sin(x) = sin(a)$. On essaiera dans les exercices, de toujours se ramener à l'une de ces deux formes.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, les équations suivantes :

a) $cos(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$; *b)* $2sin^2(x) - sin(x) - 1 = 0$; *c)* $cos(\pi x + 2) = 0{,}5$.

a) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Le membre de droite n'est pas écrit sous la forme d'un cosinus.

OR (tableau des valeurs remarquables, à savoir par coeur), $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Ainsi, $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \underbrace{\cos(x) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)}_{\text{équation trigo. de la forme } \cos(x) = \cos(a) \text{ du cours.}} \iff \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\} \\ S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} \ ; \dfrac{5\pi}{6}\right\} \end{array}}$$

b) $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$. Ici, il y a la présence du carré sur le sinus, l'équation donnée fait étrangement penser à une équation du second degré :

Posons $Y = \sin(x)$: $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ s'écrit alors : $2Y^2 - Y - 1 = 0$ (*)

$a = 2$; $b = c = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$.

$\Delta > 0$, donc (*) a deux solutions réelles : $\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ Y_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} = \dfrac{1+3}{4} = 1. \end{array}\right.$

$S_{(*)} = \left\{-\dfrac{1}{2} \ ; 1\right\}$.

⚠ Ce n'est pas fini ! on cherche ici x !

OR $Y = \sin(x)$ et $\left(Y = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } Y = 1\right)$, donc : $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$ ou $\sin(x) = 1$.

$\underbrace{\sin(x) = -\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}_{\text{équations de la forme } \sin(x) = \sin(a).} \iff \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\lambda\pi \end{array}\right. \quad k, \lambda \in \mathbb{Z}.$

$\sin(x) = 1 = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \iff \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z} \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}\right\}. \\ S_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} \ ; -\dfrac{\pi}{6} \ ; \dfrac{\pi}{2}\right\}. \end{array}}$$

c) $\cos(\pi x+2)=0{,}5 \iff \cos(\pi x+2)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \pi x+2=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \pi x+2=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{array} \right. , \ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{\left(-2+\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}{\pi}=-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}+2k \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{\left(-2-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}{\pi}=-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}+2k \end{array} \right. , \ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}+2k \ ; \ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}+2k \ ; \ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

$$-\pi<-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}+2k\leq\pi \iff -\pi+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}<2k\leq\pi+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3} \quad \div 2 \ (\text{car } 2>0)$$

$$\iff \underbrace{-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{6}}_{\simeq -1{,}419}<\underbrace{k}_{\in\mathbb{Z}}\leq\underbrace{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3}}_{\simeq 1{,}556}$$

Ainsi comme $\left]-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{6} \ ; \ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3}\right]\cap\mathbb{Z}=\{-1 \ ; \ 0 \ ; \ 1\}$, il en résulte que $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$.

De même, $-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}+2k\in\left]-\pi \ ; \ \pi\right] \iff k\in\{-1 \ ; \ 0 \ ; \ 1\}$.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{S}_{]-\pi;\pi]}=\Bigg\{\underbrace{-\frac{2}{\pi}-\frac{5}{3}}_{k=-1} \ ; \ \underbrace{-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}}_{k=0} \ ; \ \underbrace{-\frac{2}{\pi}+\frac{7}{3}}_{k=1} \ ; \ \overbrace{\underbrace{-\frac{2}{\pi}-\frac{7}{3}}_{k=-1} \ ; \ \underbrace{-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}}_{k=0} \ ; \ \underbrace{-\frac{2}{\pi}+\frac{5}{3}}_{k=1}}^{2^e \text{ équation}}\Bigg\}$$

(R)appelons, à toutes fins utiles, des ***relations d'addition*** et *de* ***duplication*** :

Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

♥♥♥ $\mathbf{cos(a-b)} = \cos(a)\times\cos(b)+\sin(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

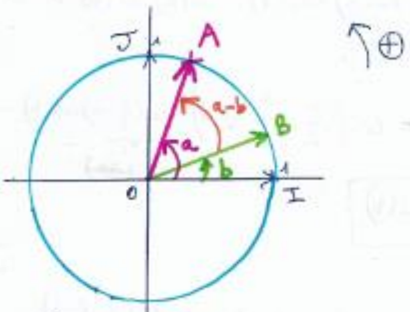
♥♥♥ $\mathbf{sin(a-b)} = \sin(a)\times\cos(b)-\cos(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ $\mathbf{cos(a+b)} = \cos(a)\times\cos(b)-\sin(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ $\mathbf{sin(a+b)} = \sin(a)\times\cos(b)+\cos(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

Pour les curieux, d'où sortent ces horreurs et pourquoi énonce-t-on en premier les formules où apparaissent des soustractions ?

__Preuve__ :



Soit a et b deux réels quelconques, A le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI};\vec{OA}) = a$ et B le point du cercle trigo. tel que $(\vec{OI};\vec{OB}) = b$.

$\vec{OB}\cdot\vec{OA} = OB\times OA\times\cos(a-b)$ car $(\vec{OB};\vec{OA}) = b-a$

et $OA = OB = 1$ (cercle trigo. de rayon 1).

Donc $\vec{OB}\cdot\vec{OA} = 1\times1\times\cos(a-b) = \cos(a-b)$. (*)

De plus, $A(\cos(a);\sin(a))$ et $B(\cos(b);\sin(b))$

donc $\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}_{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}} = xx'+yy' = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ (**)

Ainsi, grâce à (*) et (**), on a établi de deux façons différentes le même produit scalaire, de sorte que :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \quad \left(= \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\right)$$

Remarque : Soit $x\in\mathbb{R}$. Appliquons la relation précédente avec : $a=\frac{\pi}{2}$ et $b=x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\cos(x) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\sin(x) = \sin(x).$$

$$\boxed{♡\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x), \text{ pour tout réel } x.\ ♡}$$

En remplaçant x par $\frac{\pi}{2}-x$ on a aussi : $\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\boxed{♡\quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ ♡}$$

Seconde relation : $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$ se déduit alors très facilement !

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}_{=\sin(a)}\cos(b) - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}_{=\cos(a)}\sin(b)$$

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)}$$

Enfin : $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ car $\begin{cases} \cos \text{ est paire sur } \mathbb{R} \text{ donc } \cos(-b)=\cos(b) \\ \sin \text{ est impaire sur } \mathbb{R} \text{ donc } \sin(-b)=-\sin(b). \end{cases}$

La relation $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ se démontre de la même façon !

Comment mémoriser ces relations d'usage courant post bac ?

On retiendra que **le cosinus** ***ne mélange pas les blocs (= produit de deux cos ou produit de deux sin)***, mais ***change les signes***, et que le **sinus** ***mélange les blocs*** mais ***ne change pas les signes.***

Pour le cosinus : *coco ± sisi (bloc de cos suivi de bloc de sin et signe contraire entre les deux blocs de celui qui est dans la parenthèse du cos de la somme initiale).*

Pour le sinus : *sico* $\pm$ *cosi (mélange sincos* $\pm$ *cossin avec entre les deux blocs la même opération que celle dans la parenthèse du sin de la somme initiale).*

En particulier, lorsque dans les relations d'additions, on fait : $a = b = x$, on obtient les relations suivantes appelées formules de duplication :

Pour tout réel x, on a : ♥♥♥ $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ ♥♥♥

Pour tout réel x, on a : ♥♥♥ $\sin(2x) = 2\sin(x) \times \cos(x)$ ♥♥♥

Preuve :

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\times \cos(x) - \sin(x)\times \sin(x)$ d'après la 3° formule d'addition.

$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$. Or d'après la relation de Pythagore trigonométrique, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, de sorte que : $\boxed{\cos(2x)} = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = \boxed{2\cos^2(x) - 1}$.

La relation $\boxed{\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)}$ s'obtient avec Pythagore en remplaçant cette fois-ci $\cos^2(x)$ par $1 - \sin^2(x)$.

$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x)$ d'après la 4° formule d'addition.

$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$ car $\sin(x)\cos(x) = \cos(x)\sin(x)$: le produit de réels est commutatif !

Exercice 3

Donner la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$. En déduire celle de $\sin(\frac{\pi}{8})$

Solution :

Observons que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Donc $\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underbrace{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}_{2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1}$ formule de duplication où on choisit d'exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Donc $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

L'inconnue est ici $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$: $X^2 = a$ avec $a \geq 0$ équivaut à $X = -\sqrt{a}$ ou $X = \sqrt{a}$.

Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

Or sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$, donc comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$.

Par suite, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ (exotique !)

Enfin, $\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (relation de duplication du sinus).

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$$

Pas très esthétique le dénominateur ...

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 \times 2} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

Autre méthode pour qui n'a à peu près rien compris aux calculs sur les racines carrées :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \text{ ------}$$

III – Régularité des fonctions cosinus et sinus

Propriété

Les fonctions ***cosinus*** et ***sinus*** sont ***continues*** sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

En **3 *étapes*** : (tout écrit pour gagner du temps, à lire et travailler pour ceux qui cherchent à comprendre d'où sortent les choses, à admettre sinon) :

On montre une double inégalité simple issue de considérations géométriques (lemme).

- On montre ensuite que la fonction sinus est continue en 0, puis que la fonction cosinus est également continue en 0.

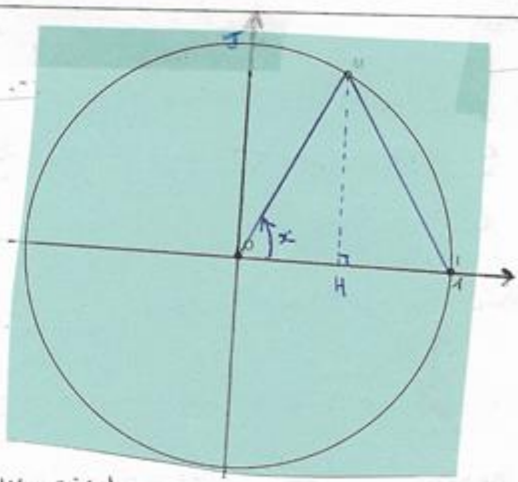
- On montre enfin que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Lemme

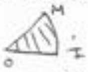
Pour tout réel $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq x$.

Preuve :

La figure suivante est la clé pour comprendre :



On a : $\boxed{0 \leq \text{Aire}(OIM) \leq \text{Aire}(\overset{\frown}{OIM})}$, où $\overset{\frown}{OIM}$ désigne le secteur circulaire délimité par les points O, I et M :



$\text{Aire}(OIM) \leq \text{Aire}(\overset{\frown}{OIM})$ car le triangle OIM est inscrit dans le secteur circulaire $\overset{\frown}{OIM}$.

Or, $\text{Aire}(OIM) = \frac{OI \times HM}{2}$ et dans le triangle OHM rectangle en H, $\sin(x) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1}$, donc $HM = \sin(x)$

Ensuite, $\text{Aire}(OIM) = \frac{1 \times \sin(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Évaluons l'aire de $\overset{\frown}{OIM}$: Il y a proportionnalité entre mesure de l'angle $\widehat{OIM}$ et l'aire du secteur $\overset{\frown}{OIM}$:

Mesure d'angle	2π	x
Aire	$\pi \times R^2$	?

$$\text{Aire}(\overset{\frown}{OIM}) = \frac{\pi R^2 x}{2\pi} = \frac{R^2 x}{2} = \frac{x}{2} \text{ vu que ici } R = 1.$$

D'où grâce à l'encadré on a : $0 \leq \frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2}$, d'où $\boxed{0 \leq \sin(x) \leq x \;\blacksquare}$

$\boxed{\text{Nous allons à présent prouver que } \lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0}$

Grâce au lemme, si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $0 \leq \sin(x) \leq x$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 0 = 0 \end{cases}$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sin(x) = 0.}$

Etablissons enfin que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x) = 0$; par imparité de sin, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x) = -\sin(-x)$.

Or, si $x\to 0$ et $x<0$, alors $-x\to 0$ et $-x>0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\sin(-x) = 0$ composition et dernier résultat

On a donc établi que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x) = 0$. Or $\sin(0)=0$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x) = \sin(0) = 0}$, donc $\boxed{\text{la fonction sinus est continue en } 0}$ ■

Etablissons enfin que la fonction cosinus est continue en 0 :

Pour tout réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Donc $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)=0$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2(x) = 0$, et par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0} (1-\sin^2(x)) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2(x)=1$; donc par composition, vu que $\lim\limits_{X\to 1} \sqrt{X} = 1$, on a :

$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\cos^2(x)} = 1$, et comme au voisinage de 0, $\cos(x)>0$, on a bien le résultat : $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$. Or $\cos(0)=1$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1}$: $\boxed{\text{La fonction Cosinus est continue en } 0}$ ■

Etape 3 : *cos* et *sin* sont continues sur $\mathbb{R}$:

Preuve : Soit x un réel quelconque, montrons que la fonction *cos* est continue en x, c'est-à-dire intéressons-nous, après en avoir justifié l'existence, à : $\lim\limits_{h\to 0} cos(x+h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} sin(x+h)$

Soit h un réel non nul :

D'après les formules d'additions : $cos(x+h) = cos(x)cos(h) - sin(x)sin(h)$ (*).

Or d'après l'étape 2, *cos* est continue en 0, donc $\lim\limits_{h\to 0} cos(0+h) = cos(0) = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} sin(0+h) = sin(0) = 0$.

Donc par limite de produit et de somme dans (*), on a : $\lim\limits_{h\to 0} cos(x+h) = cos(x)\times 1 - sin(x)\times 0 = cos(x)$.

Ainsi, la fonction cos est continue en le réel x, et x étant quelconque, il en résulte que la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Exactement la même démarche en utilisant la formule d'addition pour transformer $sin(x+h)$ conduit à la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons à présent montrer que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer la dérivée de chacune de ces fonctions :

Pour cela, nous avons besoin d'une nouvelle étude en trois étapes :

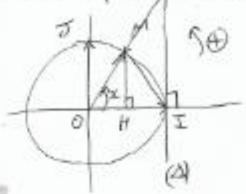
On démontre un lemme qui va servir à établir que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0, et enfin on démontrera que ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Lemme : une inégalité fort utile en trigonométrie.

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, on a : $sin(x) < x < \frac{sin(x)}{cos(x)}$.

Preuve : Mignon !

Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI};\vec{OM}) = x$ où $0<x<\frac{\pi}{2}$:



Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI) :
Soit K le point d'intersection de (OM) et de la droite (Δ) perpendiculaire en I à la droite (OI).

Vu que le triangle OIM est contenu dans le secteur circulaire $\widehat{OIM}$ lui même contenu dans le triangle OIK on a :

$$\underbrace{\text{Aire}(OIM)}_{\frac{OI\times HM}{2}} < \underbrace{\text{Aire}(\widehat{OIM})}_{\frac{x}{2}^{*}} < \underbrace{\text{Aire}(OIK)}_{\frac{OI\times IK}{2}}$$

*) déjà vu au lemme précédent !
avec HM = sin(x).

$\tan(x) = \frac{IK}{OI} = IK$ car $OI = 1$

et $\tan(x) = \frac{IK}{OI} = \frac{\frac{IK}{OK}}{\frac{OI}{OK}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

D'où : $\frac{1\times\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{2}$ c'est-à-dire : $\sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (car $2>0$).

Propriété ***(bien retenir les résultats encadrés)***

La fonction sinus est dérivable en 0, et son nombre dérivé en 0 vaut 1 : $(sin)'(0) = 1$.

La fonction cosinus est dérivable en 0, et son nombre dérivé en 0 vaut 0 : $(cos)'(0) = 0$.

En d'autres termes, on a donc : ♥♥♥ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{h} = 0$ ♥♥♥

Preuve : (*à lire par vos soins si vous voulez comprendre d'où sortent les choses, à admettre sinon*).

Montrons que $(\sin)'(0)=1$.

Pour $h\neq 0$, intéressons-nous à : $\dfrac{\sin(h)-\sin(0)}{h} = \dfrac{\sin(h)}{h}$ car $\sin(0)=0$.

Or $\forall h\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h)<h<\dfrac{\sin(h)}{\cos(h)}$ d'après le lemme précédent.

donc $h>0$ et $\dfrac{\sin(h)}{h}<\dfrac{h}{h}<\dfrac{\sin(h)}{h\cos(h)}$ car $h>0$.

Donc : $\dfrac{\sin(h)}{h}<1<\dfrac{\sin(h)}{h}\times\dfrac{1}{\cos(h)}$.

donc $\dfrac{\sin(h)}{h}<1$ et $1<\dfrac{\sin(h)}{h}\times\dfrac{1}{\cos(h)}$, donc comme $h\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(h)>0$ donc $\cos(h)<\dfrac{\sin(h)}{h}$.

Par suite, $\boxed{\text{pour tout réel } h\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\quad \cos(h)<\dfrac{\sin(h)}{h}<1.}$ $(*)$

Or cos est continue en 0, donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\cos(h)=1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 1=1$.

donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1.}$

Si $h<0$: alors $-h>0$

Par parité du cosinus, $\cos(-h)=\cos(h)$ et $\dfrac{\sin(-h)}{-h}\overset{\text{imparité du sinus}}{=}\dfrac{-\sin(h)}{-h}=\dfrac{\sin(h)}{h}$.

Ainsi, grâce à $(*)$: $\forall -h\in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(-h)<\dfrac{\sin(-h)}{-h}<1$

Ainsi, $\forall h\in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, $\cos(h)<\dfrac{\sin(h)}{h}<1$. $(**)$

De là comme $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\cos(h)=1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} 1=1$, d'après $(**)$ et le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$ et comme $1\in\mathbb{R}$, il en résulte que $\boxed{\text{sin est dérivable en 0 et que } (\sin)'(0)=1.}$

Pour établir que *cos* est dérivable en 0 on utilise les relations de duplication :

Pour tout réel h, $\cos(h) = \cos\left(2 \times \frac{h}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$

Alors pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{-\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\sin\left(\frac{h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{2} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$

et $\lim\limits_{X \to 0} \sin(X) = 0$ car sin. est continue en 0, donc $\lim\limits_{h \to 0} \sin\left(\frac{h}{2}\right) = 0$.

Par limite de produit, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(h)-\cos(0)}{h} = 0$, donc

Cos est dérivable en 0, et $(\cos)'(0) = 0$.

__Remarque__ :

La première limite : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{sin(h)}{h} = 1$ fournit l'approximation suivante très utilisée en Physique : pour x de *petite mesure en radian*, on a : $sin(x) \approx x$.

Théorème

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, ♥♥♥ ***cos'(x) = –sin(x)***♥♥♥

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, ♥♥♥ ***sin'(x) = cos(x)***♥♥♥

__Preuve__ :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

Montrons que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$ existe et est égale à $-\sin(x)$:

Or, pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$

$\frac{\cos(x)-\cos(h)}{h} = \frac{\cos(x)(\cos(h)-1)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h}$

$\frac{\cos(x)-\cos(h)}{h} = \cos(x) \times \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \times \frac{\sin(h)}{h}$.

Or grâce à l'étape 2, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = -0 = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

Donc, par limite de somme et produit on a :

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x) - \cos(h)}{h} = -\sin(x)$. et $-\sin(x) \in \mathbb{R}$.

Ainsi, cos est dérivable en x arbitrairement fixé et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Donc cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos)' = -\sin$

Même type de preuve pour établir que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\sin)' = \cos$ en partant cette fois-ci du taux de variation : $\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ ----

<u>Propriété</u> : dérivée de composée contenant une fonction cosinus ou sinus :

Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors, les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(u(x))$ et $g(x) = \sin(u(x))$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$f'(x) = -u'(x)\times \sin(u(x))$ et $g'(x) = u'(x)\times \cos(u(x))$.

<u>Preuve</u> : résulte du théorème de dérivation des fonctions composées et du théorème précédent.

<u>Exemples</u>

1) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = \sin(4x)$; $g(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 3x)$; $h(x) = \sin^2(3x)$;

2) Donner une période de i, puis calculer $i'(t)$ sachant que : $i(t)=A\cos(wt+\phi)$, ω et $A \neq 0$.

3) Etablir que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est périodique de période 2π, alors f' est aussi périodique de période 2π. Quid de la réciproque ?

<u>Solution</u> :

1) $f(x) = \sin(4x) = \sin(u(x))$ avec : $u(x) = 4x$ et $u'(x) = 4$.

Donc $f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = 4\cos(4x)$.

$g(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 3x) = \cos(u(x))$ avec : $u(x) = \frac{\pi}{3} - 3x$ et $u'(x) = 0 - 3 = -3$

$g'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) = -(-3)\sin(\frac{\pi}{3} - 3x) = 3\sin(\frac{\pi}{3} - 3x)$.

$h(x) = \sin^2(3x) = \sin(3x)\times\sin(3x) = u^2(x)$ avec : $u(x) = \sin(3x)$ et $u'(x) = 3\cos(3x)$.

$h'(x) = 2u'(x)\times u(x) = 2\times 3\cos(3x)\times\sin(3x) = 3\times \underline{2\sin(3x)\cos(3x)} = 3\sin(6x)$ (<u>formule de duplication</u> du sinus).

2) On cherche ici un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad i(t+T) = i(t) \iff A\cos(\omega(t+T)+\phi) = A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\underset{A\neq 0}{\iff} \cos(\omega t+\omega T+\phi) = \cos(\omega t+\phi)$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \omega t+\omega T+\phi = \omega t+\phi+2k\pi \\ \text{ou} \\ \omega t+\omega T+\phi = -(\omega t+\phi)+2k\pi \end{array} \right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} \omega T = 2k\pi \quad (*) \\ \text{ou} \\ 2\omega t+\omega T+2\phi = 2k\pi \end{array} \right.$$

Dans $(*)$, prenons $k=1$: $\omega T = 2\pi$ et $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ car $\omega \neq 0$.

Par exemple, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est une période de i (résultat bien connu en Physique).

$i(t) = A\cos(\omega t+\phi) = A\cos(u(t))$ où $u(t) = \omega t+\phi$ et $u'(t) = \omega$

donc $\boxed{i'(t)} = A\times\omega\times(-\sin(\omega t+\phi)) = \boxed{-A\omega\sin(\omega t+\phi)}$

$\hookrightarrow i'(t) = A\times u'(t)\times(-\sin(u(t)))$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

donc en dérivant la relation précédente (licite car f est dérivable et par composée) on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $1\times f'(x+2\pi) = f'(x)$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x+2\pi) = f'(x)$:

f' est donc 2π-périodique : affirmation vraie.

La réciproque : f étant une fonction dérivable, si f' est 2π-périodique, alors f est 2π-périodique est une affirmation fausse !

Contre-exemple : Prenons $f(x) = x$; (f définie sur $\mathbb{R}$).

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 1$, donc $f'(x+2\pi) = 1 = f'(x)$: f' est 2π-périodique

Pour autant, $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 2\pi$, donc $f(0)\neq f(2\pi)$, donc f n'est pas 2π-périodique !

IV - Exercices de synthèse sur ce chapitre

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1a) Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de C.

1*b*) Montrer que 2π est une période de f.

2) On se limite donc à l'étude de f sur $I = [0\ ;\ \pi]$. Pourquoi ?

a) Vérifier que pour tout réel x appartenant à I, on a : $f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})$.

b) Etudier SOIGNEUSEMENT les variations de f sur I, et dresser le tableau de variation de f sur I.

c) Tracer $\mathcal{C}$ dans un repère.

d) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A situé sur $\mathcal{C}$ et dont l'abscisse vaut $\frac{\pi}{2}$.

e) Démontrer que pour tout réel x vérifiant : $\frac{-\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, on a : $1{,}72 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}75$.

3) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α, avec $\alpha \in [2\ ;\ 2{,}1]$.

$f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

1a) Cela revient à prouver que f est paire sur $\mathbb{R}$:

Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \sin^2(-x) + \sqrt{3}\cos(-x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-\sin(x))^2 + \sqrt{3}\cos(x)$ car $\begin{cases} \text{sin est impaire sur } \mathbb{R}\text{, donc } \sin(-x) = -\sin(x) \\ \text{cos est paire sur } \mathbb{R}\text{, donc } \cos(-x) = \cos(x) \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) = f(x)$: f est paire sur $\mathbb{R}$, donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

1b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) + \sqrt{3}\cos(x+2\pi)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) = f(x)$ car cos et sin sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$

donc $\begin{cases} \sin(x+2\pi) = \sin(x) \\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) \end{cases}$

Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

2) f est 2π-périodique, il suffit donc de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $J = [-\pi ; \pi]$.

De plus, f est paire sur $\mathbb{R}$, donc il suffit de l'étudier sur $I = [0 ; \pi]$ (et de compléter l'étude par symétrie et translation).

a) $I = [0 ; \pi]$.

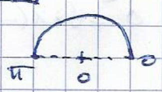
$\forall x \in I$, $f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x)$ (f est dérivable sur I en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur I).

$\forall x \in I$, $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$ car $(u^2)' = 2uu'$

avec ici $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{cases}$

$\boxed{\forall x \in I, \ f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})}$

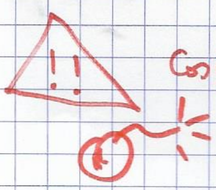
b) $\forall x \in I = [0 ; \pi]$, on a $\sin(x) \geq 0$



avec $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

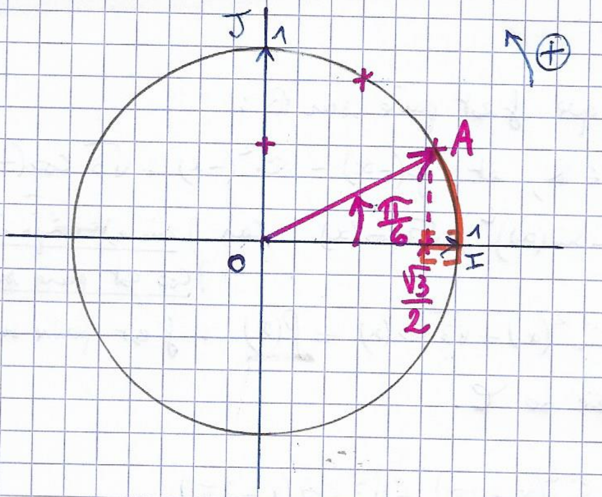
Donc $\forall x \in]0 ; \pi[$, $\sin(x) > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2\cos(x) - \sqrt{3}$ sur $]0 ; \pi[$.

Or $2\cos(x) - \sqrt{3} \geq 0 \iff \cos(x) \geq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \iff$ on fait un cercle trigo !



$\cos(x) \geq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ n'équivaut pas à $x \geq \frac{\pi}{6}$!

Cex : Pour $x =$: $\cos(0) = 1$ donc $\cos(0) \geq \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $0 < \pi/6$!!!



Sur $\left[0;\pi\right]$, $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right]$.

On colorie d'abord en orange ici tous les points de l'axe des abscisses (= axe des cos) tels que $x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis l'arc de cercle correspondant à de tels points (ici $\overset{\frown}{IA}$).

Par suite on a via le principe de Lagrange :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		π
$\sin(x)$	0	+		+	0
$2\cos(x)-\sqrt{3}$		+	0	$-$	
$f'(x)$	0	+	0	$-$	0
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$

$f(0) = \sin^2(0) + \sqrt{3}\cos(0)$

$f(0) = 0^2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

$f(\pi) = \sin^2(\pi) + \sqrt{3}\cos(\pi) = 0^2 + \sqrt{3} \times (-1) = -\sqrt{3}$

c) Utiliser géogébra. Cf. ci-joint.

Bien observer que sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$, les valeurs prises par f varient "peu" car $\sqrt{3} \simeq 1,732$ et $\frac{7}{4} = 1,75$. Il faudra donc bien "dilater" l'unité sur l'axe des ordonnées afin de voir apparaître à l'écran une courbe de fonction qui ne semble pas être constante sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$!!

d) $A\left(\frac{\pi}{2}; y_A\right) \in \mathscr{C}$, donc $y_A = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^2 + \sqrt{3}\times 0 = 1$.

$A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Soit T_A la tangente à $\mathscr{C}$ en A (existe car f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$)

T_A a pour équation réduite : $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Or $f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})$, donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1(2\times 0 - \sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

T_A a pour équation réduite : $y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

$$\boxed{y = -\sqrt{3}x + 1 + \frac{\sqrt{3}\times\pi}{2}}$$

e) Vu que f est paire sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a :

$1{,}72 \leq f(x) \leq 1{,}75$.

Sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, grâce à 2b), f croît, donc si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, alors on a :

$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, c'est à dire : $\sqrt{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{4}$.

Or $\frac{7}{4} = 1{,}75$ et $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$, donc $\sqrt{3} \geq 1{,}72$.

Par suite, $\boxed{\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right],\ 1{,}72 \leq f(x) \leq 1{,}75}$ (*)

Sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$, f décroît, donc si $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, alors on a :

$\underbrace{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{=\frac{7}{4}} \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ avec $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1+\sqrt{6}}{2}$ avec $\frac{1+\sqrt{6}}{2} \simeq 1{,}725$

Donc $\frac{1+\sqrt{6}}{2} \geq 1{,}72$

Par suite, $\boxed{\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right],\ \frac{7}{4} \geq f(x) \geq 1{,}72}$ (**)

(*) et (**) font que : $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $1{,}72 \leq f(x) \leq 1{,}75$.

Vu que f est paire sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, $1{,}72 \leq f(x) \leq 1{,}75$.

3) Plaçons-nous d'entrée sur $[2\,;\,2{,}1]$: $\pi \simeq 3{,}14$.

Vu que $\frac{\pi}{6} < 1$ et $\pi > 2{,}1$, $[2\,;\,2{,}1] \subset [\frac{\pi}{6}\,;\,\pi]$

est contenu dans

*) f est continue sur $[2\,;\,2{,}1]$

**) f est strictement décroissante sur $[2\,;\,2{,}1]$.

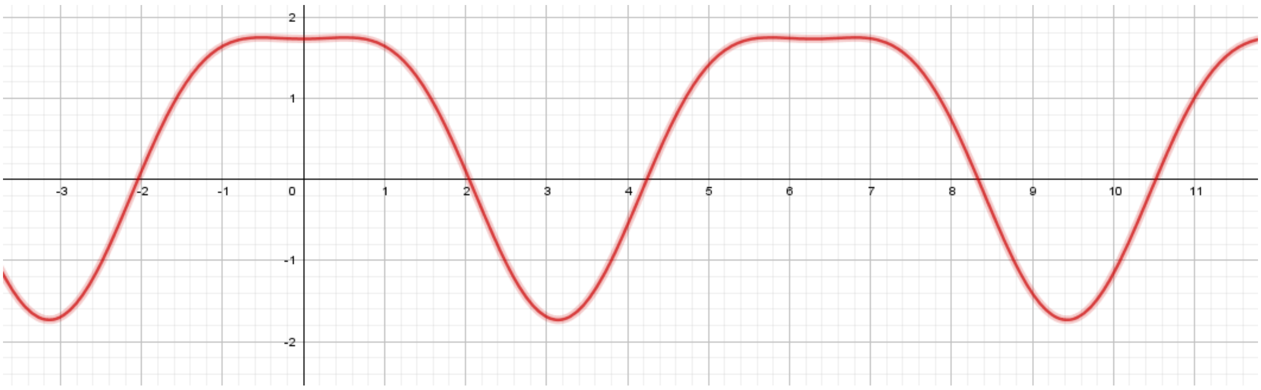
***) $f(2) \simeq 0{,}106$, donc $f(2) > 0$

$f(2{,}1) \simeq -0{,}125$, donc $f(2{,}1) < 0$

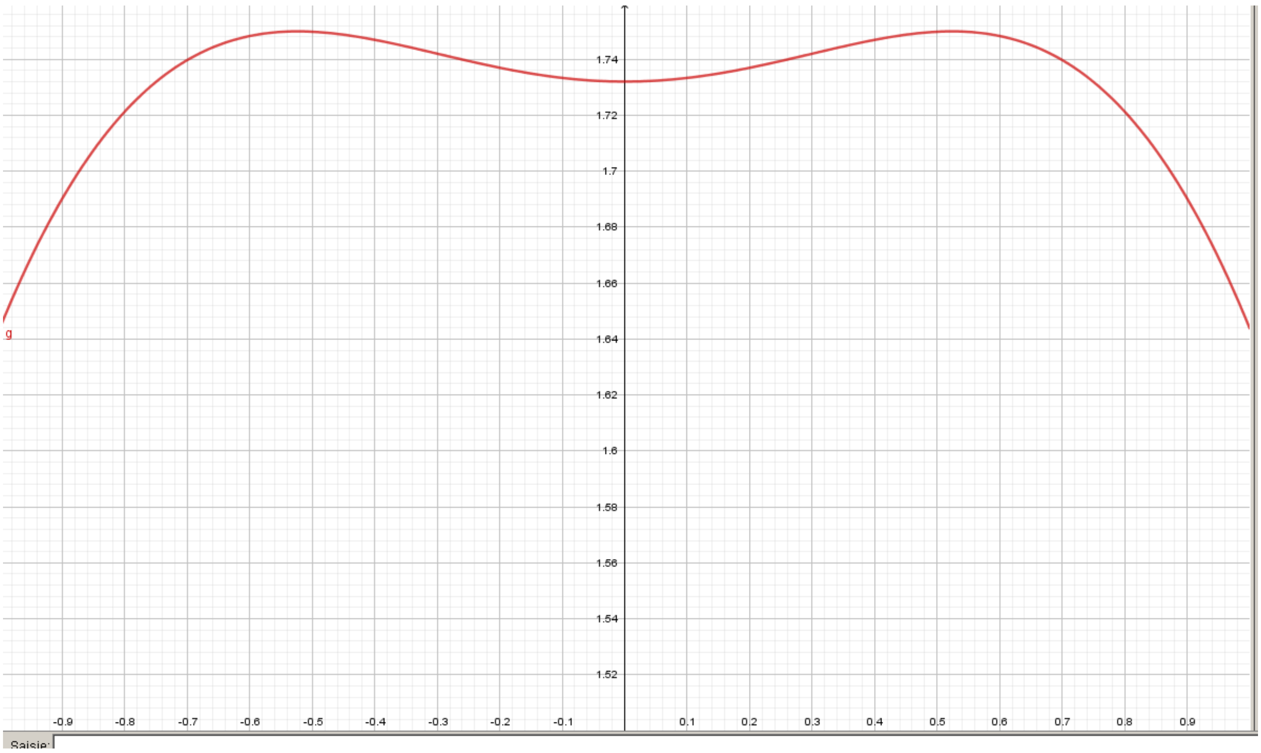
Donc $f(2{,}1) < 0 < f(2)$: 0 est une valeur intermédiaire pour f sur $[2\,;\,2{,}1]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2\,;\,2{,}1]$ notée α.

Courbe sans zoom sur [-3,8 ; 11,8] :



Courbe zoomée sur [-1 ; 1] :



Exercice II

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$: f est appelée fonction tangente.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera D_f.

b) Etablir que f est impaire sur D_f et qu'elle est périodique de période π sur D_f.

c) En déduire sur quel intervalle I on va étudier f.

d) Calculer, pour tout réel x appartenant à I, $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur I.

e) Montrer que O, origine du repère, est situé sur la courbe représentative de f, notée C_f, puis donner l'équation de la tangente, appelée (T) à C_f au point O. Etudier la position relative de (T) et de C_f sur I.

f) Déterminer $\lim\limits_{\begin{cases} x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2} \end{cases}} f(x)$. Conséquence graphique ?

g) Construire dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ C_f sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2} ; -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} := \tan(x)$.

a) $f(x)$ est calculable si et seulement si $\cos(x) \neq 0$ (dénominateur).

Or, $\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \left|\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left(\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

On peut noter abusivement : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

b) $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x)$

car $\left\{\begin{array}{l} \cos \text{ est paire sur } \mathcal{D}_f \\ \sin \text{ est impaire sur } \mathcal{D}_f \end{array}\right.$

Ainsi $\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathcal{D}_f}$.

Formule de trigo ♡ (penser au cercle trigo).

$\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{\downarrow}{=} \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = f(x)$,

Ainsi $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique sur } \mathcal{D}_f}$.

c) Vu que f est π-périodique sur $\mathcal{D}_f$, il suffit de l'étudier sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, f est impaire sur $\mathcal{D}_f$, donc on étudiera f sur $\boxed{I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[}$

d) $\forall x \in I$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\left\{\begin{array}{l} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{array}\right.$

$\forall x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $\quad \left\{\begin{array}{l} v(x) = \cos(x) \\ v'(x) = -\sin(x) \end{array}\right.$

$\forall x \in I$, $f'(x) = \dfrac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

♡ → Pythagore !

$\forall x \in I$, $\boxed{f'(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{\dfrac{1}{\cos^2(x)}}$

Or, $\forall x \in I$, $\cos^2(x) > 0$, donc $\dfrac{1}{\cos^2(x)} > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur I,

D'après le principe de Lagrange, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I}$

e) $O(0 ; 0)$; $0 \in \mathcal{D}_f$ et $f(0) = \dfrac{\sin(0)}{\cos(0)} = \dfrac{0}{1} = 0 = y_0$, donc

$\boxed{O \in \mathcal{C}_f}$

f est dérivable en 0, donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $O(0;0)$ notée (T), et (T) a par équation réduite : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$.

Or $f(0)=0$ (définition) et $f'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = \frac{1}{1^2} = 1$.

Donc $\boxed{(T) \text{ a par équation réduite : } y = x}$

**/ Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (T) sur I revient à étudier le signe de la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 \overset{\text{q.d}}{=} \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Or, $\forall x \in I$, $\cos^2(x) > 0$ et comme $0 < \cos(x) \leqslant 1$ sur I, $1-\cos^2(x) \geqslant 0$.
Donc, $\forall x \in I$, $g'(x) \geqslant 0$. D'après le pté de Lagrange, g croît sur I.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	0	$\nearrow$	‖

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) = 0$

Ainsi, g croît sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ et $g(0)=0$, donc $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $g(x) \geqslant 0$.

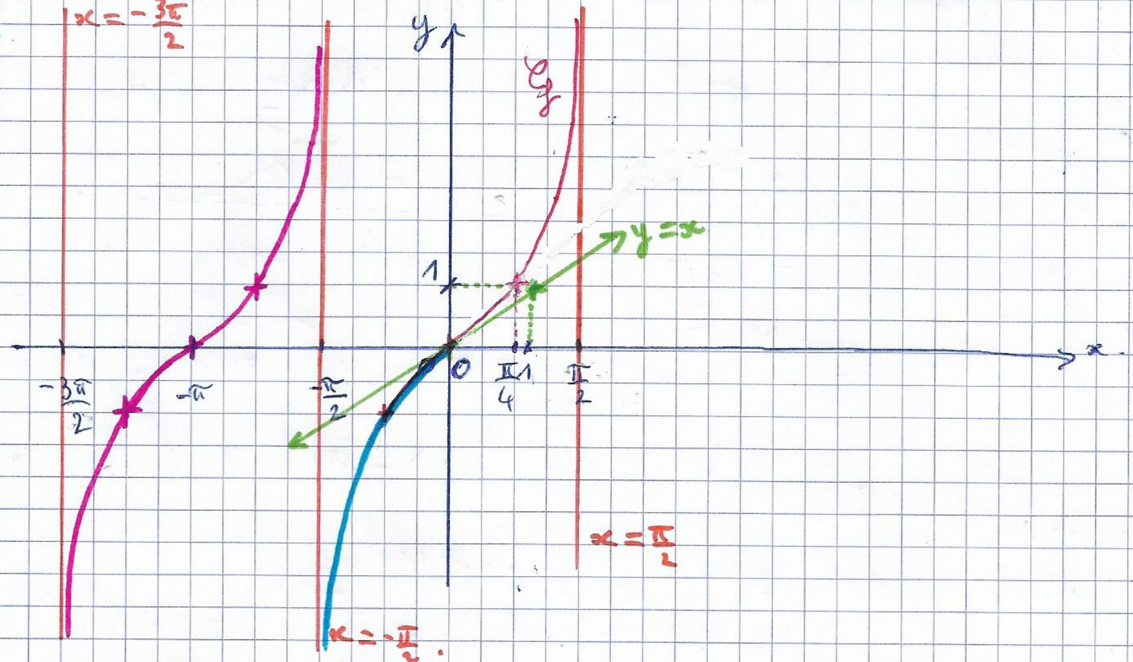
Donc sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, $f(x) - x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant x$: <u>$\mathcal{C}_f$ est donc située AU-DESSUS de (T) sur $I = [0;\frac{\pi}{2}[$</u>.

f) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \boxed{+\infty}$ car $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$

donc par limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{La droite d'équation } x = \frac{\pi}{2} \text{ est donc asymptote verticale à } \mathcal{C}_f}$

g) D'abord on construit $\mathcal{C}_f$ sur $I = [0 ; \frac{\pi}{2}[$: (repère non orthonormé).

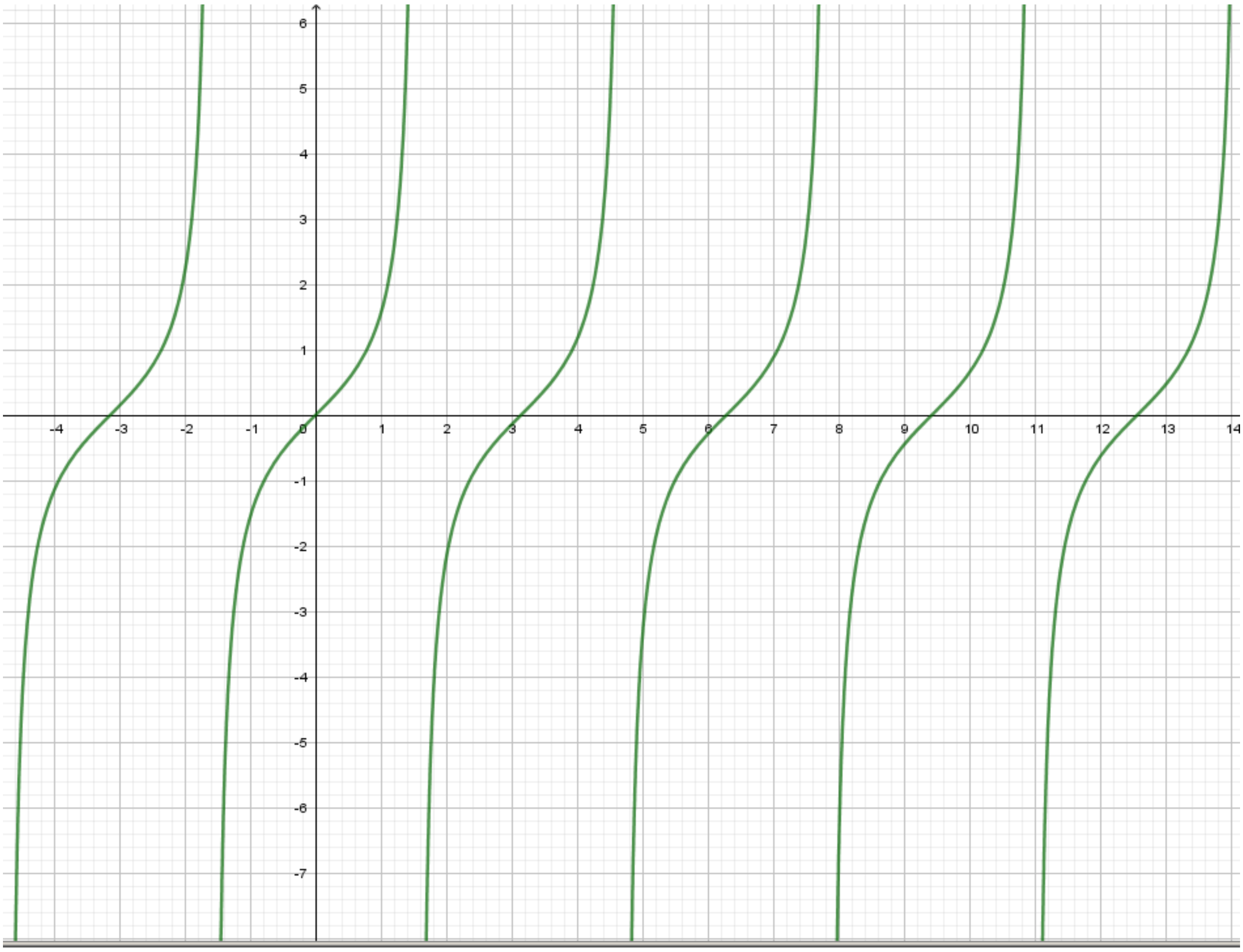


$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$ et dans l'absolu, il faut faire une table de valeurs.

Ensuite on symétrise par rapport à O la partie de $\mathcal{C}_f$ tracée en rouge
on obtient le morceau bleu

Enfin, on translate la courbe obtenue sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par la translation de vecteur $-\pi \vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire d'origine O dirigeant l'axe des abscisses.
on obtient le morceau

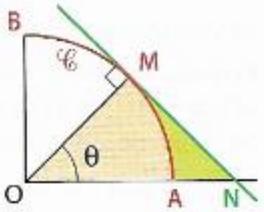
Voici avec géogebra :



-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7

Exercice III

$\mathscr{C}$ est un quart de cercle de rayon 1 et M un point de $\mathscr{C}$. On note $\widehat{AOM} = \theta$ avec $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. La tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe (OA) en N.



Le but de cet exercice est de comparer les aires des domaines coloriés en orange et en vert. On note $f(\theta)$ l'aire du domaine orange et $g(\theta)$ l'aire du domaine vert.

1. Conjecturer avec GeoGebra

Construisez la figure. Créez le secteur circulaire OAM, le triangle OMN et l'angle θ.

Déplacez le point M sur l'arc $\widehat{AB}$ et comparez les deux aires pour conjecturer.

2. Démontrer

On note h la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta).$$

a) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$h(\theta) = \frac{1}{2}\left(2\theta - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right).$$

b) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$h'(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}.$$

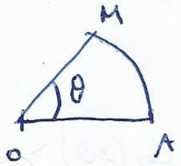
c) Étudiez les variations de h et dressez son tableau de variation.

d) Démontrez qu'il existe un unique nombre α dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Encadrez α dans un intervalle d'amplitude 10^{-1}.

e) Comparez alors les aires des deux domaines.

Aire en orange $= f(\theta) =$ aire d'une fraction de disque d'angle au centre θ.

① 

Or il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle au centre θ et l'aire de la fraction de disque :

Mesure θ en rad.	2π	θ
Aire portion disque	$\pi \times 1^2 = \pi$	$f(\theta)$

donc $\boxed{f(\theta)} = \dfrac{\pi \times \theta}{2\pi} = \boxed{\dfrac{\theta}{2}}$

Rappel : Aire disque de rayon R : $\pi \times R^2$ (ici $R = OA = 1$).

Aire en vert $= g(\theta) =$ aire du triangle $OMN - f(\theta)$

Or $\underbrace{OMN \text{ est un triangle rectangle en } M}$, donc $\mathcal{A}(OMN) = \dfrac{OM \times MN}{2} = \dfrac{1 \times MN}{2} = \dfrac{MN}{2}$.

Or $\tan(\theta) = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} = \dfrac{MN}{OM} = \dfrac{MN}{1} = MN$, donc :

$\mathcal{A}(OMN) = \dfrac{\tan(\theta)}{2}$.

Par suite, $\boxed{g(\theta) = \dfrac{\tan(\theta)}{2} - \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\tan(\theta) - \theta}{2}}$ avec $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

② h est définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$

a)

$h(\theta) = \dfrac{\theta}{2} - \left(\dfrac{\tan(\theta)}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\tan(\theta)}{2} + \dfrac{\theta}{2} = \theta - \dfrac{\tan(\theta)}{2}$.

$\boxed{h(\theta)} = \dfrac{1}{2}\left(2\theta - \tan(\theta)\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(2\theta - \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)}$ on rappelle que $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

cf. ex. II !

b) h est dérivable sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (somme et quotient de fonctions dérivables).

$h'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{\cos(\theta) \times \cos(\theta) - \sin(\theta) \times (-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{\overbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}^{=1 \text{ (Pythagore)}}}{\cos^2(\theta)}\right)$

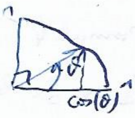
$h'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\cos^2(\theta) - 1}{\cos^2(\theta)}\right)$.

Or # formule de duplication, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Donc $\boxed{h'(\theta)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(2\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) = \boxed{\dfrac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}}$

c) $\forall \theta \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $2\cos^2(\theta) > 0$, de sorte que $h'(\theta)$ a le même signe que son numérateur $\cos(2\theta)$.

Or $\cos$ est positive sur $[0;\frac{\pi}{2}[$:



Donc si : $0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2}$, c'est à dire si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$, alors $\cos(2\theta) > 0$

Donc sur $[0;\frac{\pi}{4}[$, $h'(\theta) > 0$.

$\cos$ est négative ou nulle sur $[\frac{\pi}{2};\pi[$

Donc si : $\frac{\pi}{2} \leq 2\theta < \pi$, c'est à dire si : $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos(2\theta) > 0$

Donc sur $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$, $h'(\theta) < 0$.

D'après le principe de Lagrange, on a :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(\theta)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$h(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

$$h(0) = \frac{1}{2}\left(2\times 0 - \frac{\sin(0)}{\cos(0)}\right) = 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(2\times\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

Enfin, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} h(\theta) = -\infty$ car : $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \sin(\theta) = 1$; $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \cos(\theta) = 0^+$, donc par limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = +\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\infty$

et $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} 2\theta = \pi$, donc par limite de somme et produit, $\boxed{\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} h(\theta) = -\infty}$.

d) Sur $]0;\frac{\pi}{4}]$, h croît, de plus, $h(0) = 0$.

Donc $\forall \theta \in]0;\frac{\pi}{4}]$, $h(0) < h(\theta)$, c'est à dire $h(\theta) > 0$: l'équation $h(\theta) = 0$ n'a donc pas de solution sur $]0;\frac{\pi}{4}]$.

Plaçons-nous sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

*) h est continue sur cet intervalle car elle y est dérivable.

**) h est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$

***) $0 \in \left]-\infty ; \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]$ vu que $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}>0$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(\theta)=0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$. On la note α, donc $h(\alpha)=0$.

Par suite, il existe un unique réel α appartenant à $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $h(\alpha)=0$.

Grâce à une calculatrice réglée en radian, on obtient sans peine (balayage...) :

θ	$h(\theta)$
1,1	0,1176
1,2	−0,086

Donc $\boxed{1{,}1<\alpha<1{,}2}$

(encadrement de α à 10^{-1} près).

c) $h(\alpha)=0 \overset{\text{déf. de } h}{\Longleftrightarrow} f(\alpha)-g(\alpha)=0 \Longleftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha)$.

$\boxed{\text{Lorsque } \theta=\alpha \text{, les deux domaines orange et vert ont la même aire}}$

Exercice IV

On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{4}$ et π.

Exercice IV

$\sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0 \overset{\text{Produit nul}}{\Longleftrightarrow} \left|\begin{array}{l}\sin(x)=0 \\ \text{ou} \\ 2\cos^2(x)-1=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}\sin(x)=0 \\ \text{ou} \\ \cos^2(x)=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}\sin(x)=0 \quad (*) \\ \text{ou} \\ \underbrace{\cos(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}}_{(**)} \ \text{ou} \ \underbrace{\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{(***)}\end{array}\right.$

(!) $X^2=a$ avec $a>0$ a deux solutions : $X=\sqrt{a}$ et $X=-\sqrt{a}$.

$\underset{\text{ici } x\in]-\pi;\pi]}{\Longleftrightarrow} \underbrace{(x=0 \text{ ou } x=\pi)}_{\text{Solutions de } (*) \text{ dans }]-\pi;\pi]} \text{ ou } \underbrace{\left(x=\frac{\pi}{4} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{Solutions de } (**) \text{ dans }]-\pi;\pi]} \text{ ou } \underbrace{\left(x=\frac{3\pi}{4} \text{ ou } x=-\frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{Solutions de } (***) \text{ dans }]-\pi;\pi]}$.

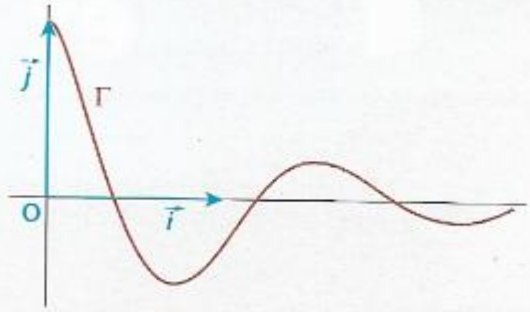
Solutions de $(*)$

$\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]}=\left\{-\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} ; 0 ; \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \pi\right\}$: l'équation proposée admet donc 6 solutions dans $]-\pi;\pi]$: l'affirmation est FAUSSE.

Exercice V

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé la courbe Γ représentative de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \cos(4x)$.



On considère également la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Démontrez que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Quels sont les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}$ et Γ ?

2. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison.

b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n) et étudiez sa convergence.

3. a) Démontrez que pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)].$$

b) Déduisez-en que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont la même tangente en chacun de leurs points communs.

4. Donnez une valeur approchée, à 10^{-1} près par excès, du coefficient directeur de la tangente T à Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Complétez le graphique en traçant T et $\mathscr{C}$.

$x \geq 0$ et $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$.

1a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$, donc comme $e^{-x} > 0$, en multipliant chacun des membres de la double inégalité $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$ par e^{-x}, on a : $-e^{-x} \leqslant e^{-x}\cos(4x) \leq e^{-x}$

Donc $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ -e^{-x} \leq h(x) \leqslant e^{-x}}}$.

Or $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0}}$ et de même $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0}}$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

1b) $M(x ; y) \in \mathcal{C} \cap \Gamma \iff \begin{cases} y = e^{-x} \\ y = e^{-x}\cos(4x) \end{cases} \Rightarrow e^{-x} = e^{-x}\cos(4x)$.

Or $e^{-x} = e^{-x}\cos(4x) \iff 1 = \cos(4x)$ (ici on a le droit de "simplifier par e^{-x} car $e^{-x} > 0$, donc $e^{-x} \neq 0$).

$\iff \cos(4x) = \cos(0)$ ← de la forme : $\cos(X) = \cos(A)$

$\iff \left| \begin{array}{l} 4x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = -0 + 2k\pi \end{array} \right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\iff x = \frac{2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\quad M_k\left(\frac{k\pi}{2} ; e^{-\frac{k\pi}{2}}\right) \in \mathcal{C} \cap \Gamma}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (= ordonnée du point M_n).

a) $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $u_{n+1} = f\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) = e^{-(n+1)\frac{\pi}{2}} \times \cos\left(4(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$u_{n+1} = e^{-n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} \times \cos\left(4n \times \frac{\pi}{2} + 4 \times \frac{\pi}{2}\right)$

$u_{n+1} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \cos\left(4n \times \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$

$u_{n+1} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times \underbrace{e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \cos\left(4n \times \frac{\pi}{2}\right)}_{= f\left(\frac{n\pi}{2}\right) = u_n}$ car cos est 2π-périodique !

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times u_n}$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc géométrique de raison } q = e^{-\frac{\pi}{2}}}$

constante > 0

b) $u_0 = f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1$: $\boxed{u_0 > 0}$

$q = e^{-\frac{\pi}{2}}$ est telque $\boxed{0 < q < 1}$ car $-\frac{\pi}{2} < 0$ donc $e^{-\frac{\pi}{2}} < e^0$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

donc (cf. cours sur les suites géométriques), $\underline{(u_n) \text{ décroît}}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \cos\left(4 \times n \times \frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} = \underbrace{e^{-\frac{n\pi}{2}}}_{>0}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc (u_n) est minorée par 0.

Par suite, (u_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n\pi}{2} = +\infty$ et par la q.1), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

donc par limite de composée, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

3a) $f(x) = e^{-x} \cos(4x) = u(x) v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = e^{-x} \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \cos(4x) \\ v'(x) = -4\sin(4x) \end{cases}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\boxed{f'(x)} = -e^{-x} \times \cos(4x) + e^{-x} \times (-4\sin(4x)) = \boxed{-e^{-x}\left(\cos(4x) - 4\sin(4x)\right)}$

3b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{n\pi}{2}$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $f'(x_n) = f'\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{n\pi}{2}}\left(\cos\left(4 \times \frac{n\pi}{2}\right) - 4\sin\left(4 \times \frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

$f'(x_n) = -e^{-\frac{n\pi}{2}}\left(\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1 \text{ car } n \in \mathbb{N}} - 4\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0}\right)$

$\underline{f'(x_n)} = -e^{-\frac{n\pi}{2}}(1 - 4 \times 0) = -e^{-\frac{n\pi}{2}} = \underline{g'(x_n)}$

on rappelle que $\begin{cases} g(x) = e^{-x} \\ g'(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

(*)

Ainsi, $\underline{\mathcal{C} \text{ et } \Gamma \text{ ont la même tangente en chacun de leurs points d'intersection d'abscisse respective } x_n = \frac{n\pi}{2}}$ où $n \in \mathbb{N}$.

(car deux droites qui passent par un même point et qui ont le même coefficient directeur sont confondues !).

(4) Ce dernier vaut $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{q.3b)}{=} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

Or $-e^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0{,}20787\ldots$, donc $\underline{f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0{,}2 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$.

Utiliser Geogebra pour le tracé.

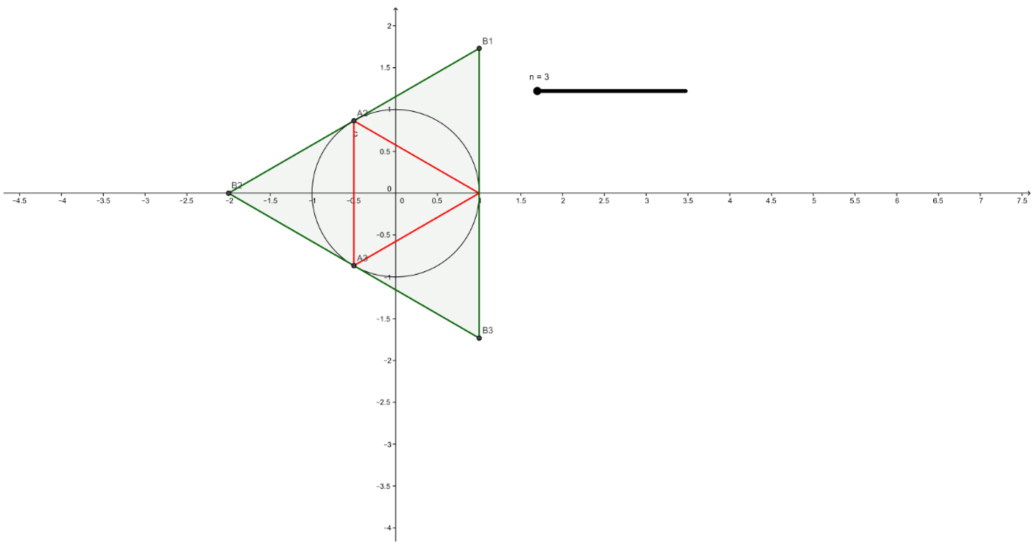
Exercice** **Who is π ?

On considère le cercle trigonométrique de centre O, dans lequel on *inscrit* un polygone régulier à n côtés (avec n entier supérieur ou égal à 3) de centre O. On notera $A_1A_2......A_n$ ce polygone qu'on identifie donc à la liste de ses sommets.

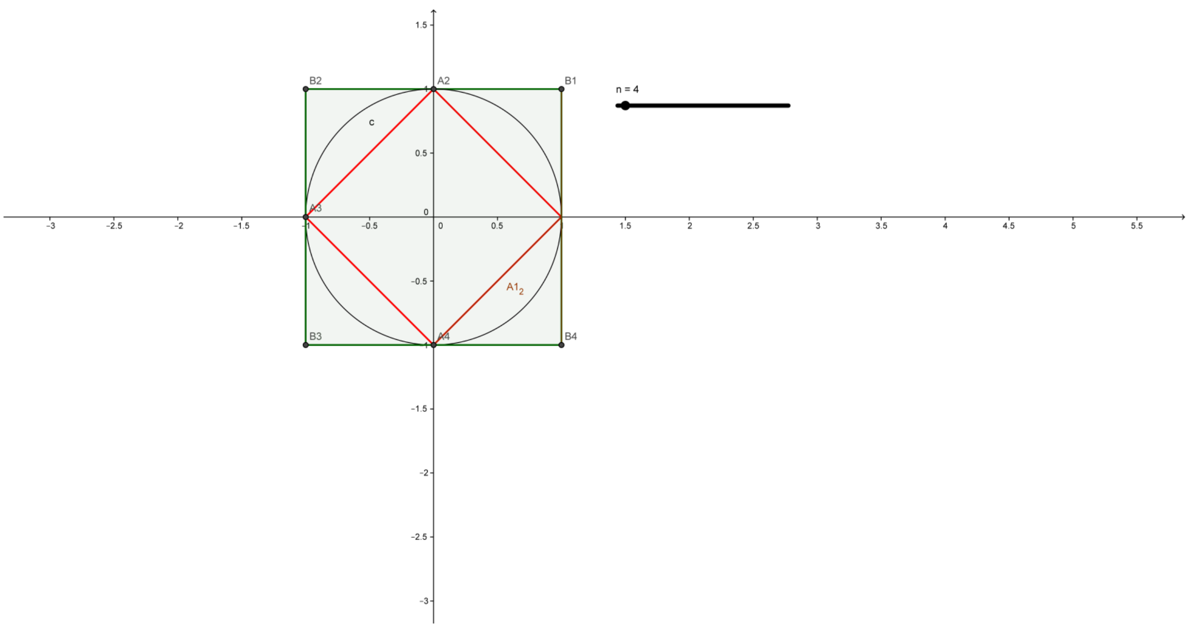
On considère le polygone régulier à n sommets *exinscrit* dans le cercle trigonométrique, noté $B_1B_2.....B_n$ où chacun des côtés de ce polygone est tangent au cercle trigonométrique en chacun des points A_i pour i compris entre 1 et n.

Voici une figure pour comprendre la situation :

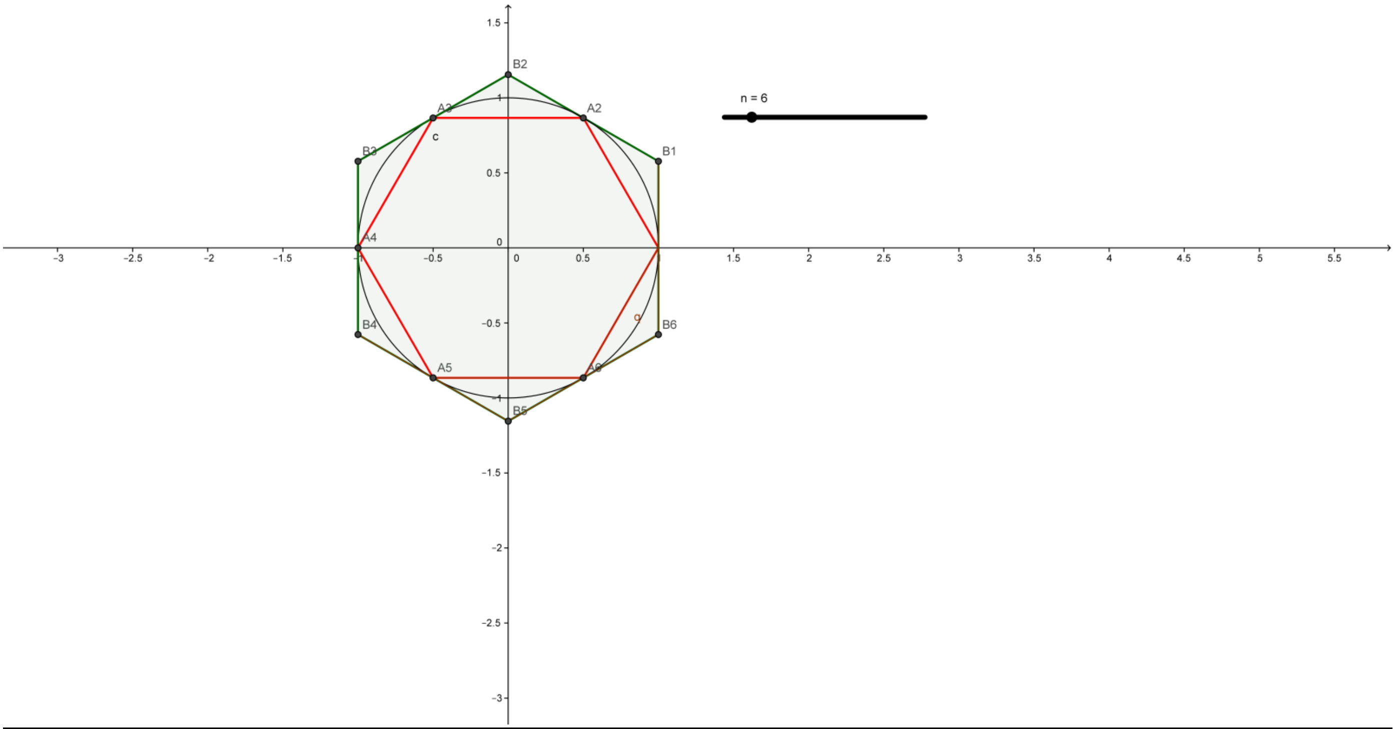
Lorsque *n* = 3 :



Lorsque *n* = 4 :



Lorsque *n* = 6 :



1a) Etablir avec soin que pour tout entier $n \geq 3$, le périmètre du polygone $A_1A_2......A_n$ que l'on notera u_n est donné par : $u_n = 2n \times sin(\frac{\pi}{n})$.

1b) Etablir que le périmètre du polygone $B_1B_2.....B_n$, noté v_n est donné par : $v_n = 2n \times tan(\frac{\pi}{n})$.

2a) Déterminer avec soin les limites des suites (u_n) et (v_n).

<u>Indication</u> : Vérifier que u_n s'écrit sous la forme : $u_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \times 2\pi$.

2b) En déduire le périmètre du cercle trigonométrique.

3) On se propose de donner quelques approximations de π.

a) Calculer les valeurs exactes de u_4 et v_4. En déduire une première approximation de π.

b) A l'aide des relations de *duplication*, calculer les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$, puis en déduire la valeur exacte de $tan(\frac{\pi}{8})$.

En déduire u_8 et v_8, puis une seconde approximation de π dont on donnera la précision en justifiant.

c) Pour $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, exprimer $cos(\frac{x}{2})$ en fonction de $cos(x)$, puis $sin(\frac{x}{2})$ en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$ *et* enfin $tan(\frac{x}{2})$ en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$.

d) Ecrire un algorithme qui, partant des valeurs exactes de A= $cos(\frac{\pi}{4})$ et B= $sin(\frac{\pi}{4})$, permet de calculer les valeurs exactes de $2^{p+2} \times sin(\frac{1}{2^p} \times \frac{\pi}{4})$ et $2^{p+2} \times tan(\frac{1}{2^p} \times \frac{\pi}{4})$ pour la valeur de l'entier *p* du choix de l'utilisateur. Quel est le rôle de cet algorithme ? Nécessite-t-il de connaître la valeur de π pour fonctionner ?

e) A l'aide de ce dernier, retrouver les valeurs de la question *3b)*, puis donner les valeurs approchées de $\frac{u_{130}}{2}$ et $\frac{v_{130}}{2}$ à 10^{-3} près. Quelle approximation de π obtient-on ? Et sa précision ?

f) A partir de quelle valeur de l'entier *n* peut-on considérer que $\frac{u_{2^n+2}}{2}$ et $\frac{v_{2^n+2}}{2}$ sont des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de π à 10^{-4} près ? Justifier votre démarche