Chapitre XIII — *Fonctions cosinus et sinus*

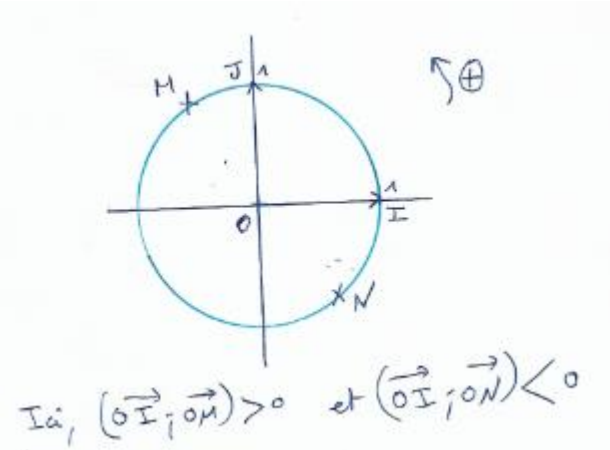
I – Rappels et compléments

Prenons le temps de bien comprendre le fonctionnement du cercle trigonométrique qui est à la base de bon nombre de propriétés en trigonométrie.

Soit $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ un repère orthonormé direct du plan : direct signifie que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ en mesure principale.

Tout d'abord on appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 que l'on a orienté avec la convention suivante : lorsqu'un point M appartient à $\mathcal{C}$, si en tournant sur $\mathcal{C}$ pour rabattre le point I sur le point M, par le plus court chemin, on tourne dans le sens direct (= sens contraire aux aiguilles d'une montre), on comptera positive la mesure principale de l'angle orientée $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Sinon cette dernière sera négative.



Enfin la longueur du petit arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ est appelé la mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Si M est diamétralement opposé à I, alors :

$\overset{\frown}{IM}$ = demi périmètre du cercle trigonométrique = $0{,}5\times2\pi\times1 = \pi$. (Rappel : $p = 2\pi R$ est le périmètre d'un cercle de rayon R).

et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = 180$ °.

Ainsi, à un angle de mesure 180° correspond une mesure en radian de 180°

Il y a de plus proportionnalité entre la mesure d'un angle exprimée en degré et celle exprimée en radian : ceci permet de passer aisément des degrés aux radians et inversement.

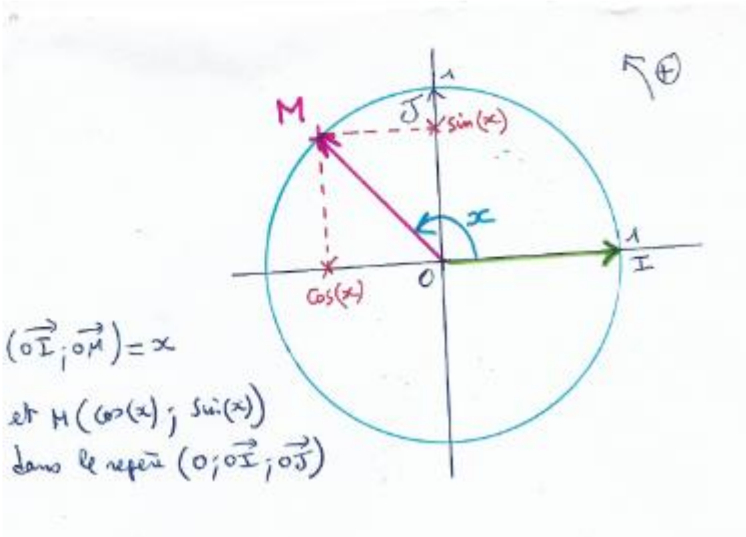
Mesure en degré	180	a
Mesure en radian	π	$a\times\frac{\pi}{180}$

Correspondance entre degré et radian : **♥♥♥ 180 ° = π *rad* ♥♥♥**

Définition

La fonction qui a tout réel x fait correspondre ***l'abscisse du point M*** dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ est appelée la fonction ***cosinus.***

La fonction qui à tout nombre réel x fait correspondre ***l'ordonnée du point M*** dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ est appelée la fonction ***sinus***.

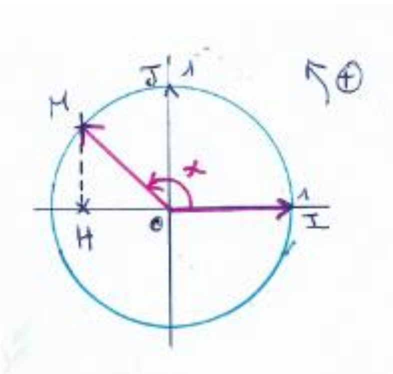


Propriétés immédiates (découlant de la définition)

i) Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$; $-1 \leqslant sin(x) \leqslant 1$

ii) Pour tout réel x, on a (relation de Pythagore trigonométrique) : $\boldsymbol{(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1}$.

Preuve : *i)* M appartient au cercle trigonométrique, donc son abscisse et son ordonnée sont comprises entre -1 et 1 !



ii) Appelons H le point de l'axe des abscisses ayant la même abscisse que M et appliquer Pythagore au triangle rectangle OHM (il est rectangle car le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$ est orthonormé !) en tenant compte du fait que $OM = 1$ car on est sur un cercle trigonométrique et que $OH = |cos(x)|$ et $HM = |sin(x)|$ (attention une longueur est positive, ceci explique les valeurs absolues) et on rappelle enfin que pour tout réel a, $|a|^2 = a^2$.

Ainsi : $OH^2 + HM^2 = OM^2$ équivaut à : $|cos(x)|^2 + |sin(x)|^2 = 1^2$ donc : $\boldsymbol{(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1}$

Remarque : lorsque cela ne prête pas à confusion, on notera *cos x* au lieu de *cos(x)*, même s'il s'agit d'un abus d'écriture.

Valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus ***(à savoir par cœur, vous verrez l'an prochain l'importance qu'occupe la trigonométrie en mathématiques et en sciences).***

Pour la énième fois, ***mémorisez par cœur ce tableau***, ***dans les deux sens*** : je vous renvoie à vos cours de première pour la preuve de ces valeurs remarquables :

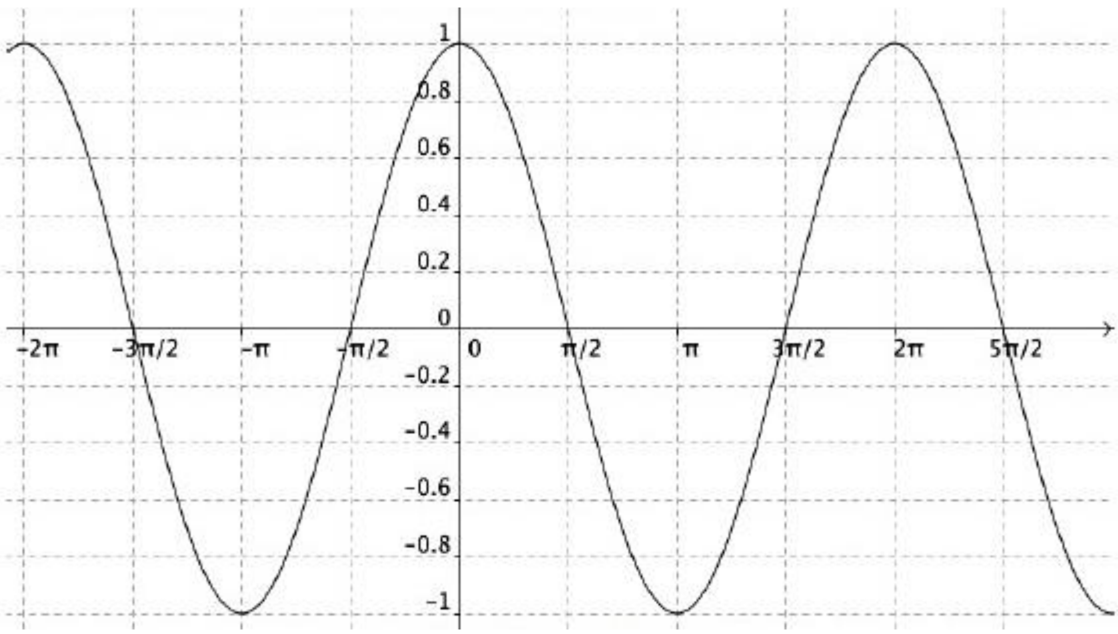
♥♥

x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

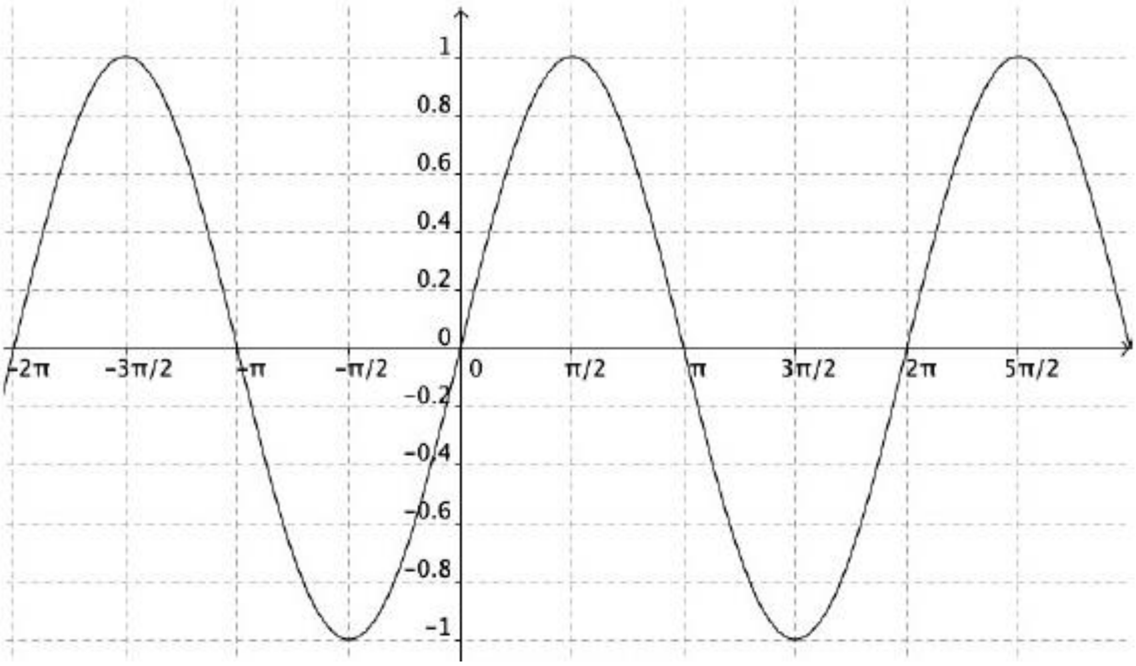
♥♥

D'où les représentations graphiques suivantes obtenues à l'aide d'un logiciel : pour calculer d'autres valeurs que celles figurant dans le tableau, divers procédés existent (formule de duplication, d'addition, *cf.* paragraphes suivants).

Courbe représentative de la ***fonction cosinus*** sur $[-2\pi\ ;\ 3\pi]$:



Courbe représentative de la ***fonction sinus*** sur $[-2\pi\ ;\ 3\pi]$:



L'observation de ces deux courbes laisse entrevoir que ces fonctions ont des propriétés intéressantes, ne serait-ce qu'en termes de tracé de courbe. C'est l'objet du paragraphe suivant que de dégager les différentes propriétés de ces fonctions.

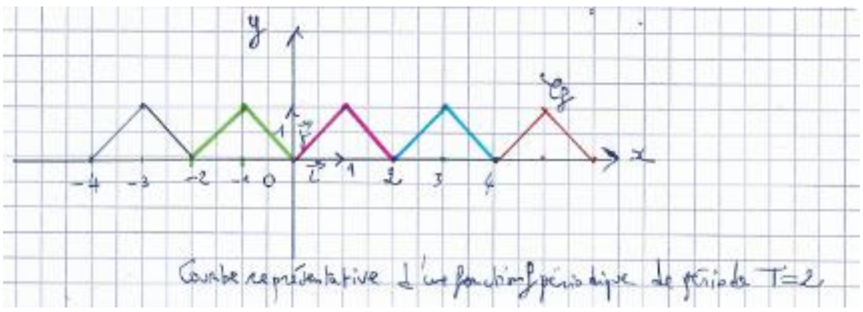
II – Diverses propriétés de ces deux fonctions

L'observation des courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus permet de constater que ces courbes sont obtenues à partir d'un motif que l'on reproduit périodiquement.

Définition

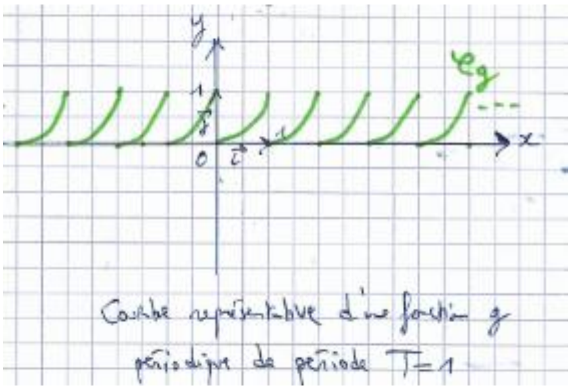
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite ***périodique de période*** T s'il existe un réel T strictement positif tel que : ♥♥♥ ***Pour tout réel x, on a : $f(x+T) = f(x)$*** ♥♥♥

Illustration : Construire une courbe représentative d'une fonction périodique de période $T = 2$.



On a ici dessiné avec des couleurs différentes, 5 motifs de la courbe C_f.

Bien noter que chacun de ces motifs sont identiques !



<u>Conséquences graphiques importantes</u> :

- Dans un repère du plan $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$, la courbe représentative d'une fonction périodique de période T est donc globalement invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

- Si T est une période de f, alors f admet également comme périodes : kT où $k \in \mathbb{N}^*$

Par exemple, montrons que si f est T-périodique, alors f est aussi $2T$-périodique :

Pour tout réel x, $f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$ car f est T-périodique, argument qui sert ici deux fois pour simplifier les deux derniers signes =.

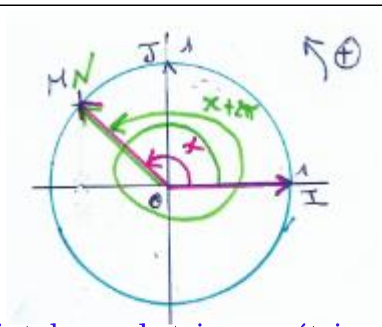
☞ On évitera donc de dire " ~~la~~ période de f " lorsqu'on parle de fonction périodique.

<u>Propriété</u>

♥♥♥Les fonctions ***cosinus*** et ***sinus*** sont ***périodiques***, de période 2π. ♥♥♥

On dit aussi que ces fonctions sont 2π-périodiques.

<u>Preuve</u> : quasi triviale !



Soit x un réel quelconque, et M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$ rad.

Dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$, on a : $\boxed{M(\cos(x)\ ;\sin(x))}$.

Soit N le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = x+2\pi$ rad.

Dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$, on a : $\boxed{N(\cos(x+2\pi)\ ;\sin(x+2\pi))}$.

Or le périmètre du cercle trigonométrique, qui est de rayon 1, est égal à 2π.

Par suite les points M et N sont confondus, et à ce titre, ils ont respectivement même abscisse et même ordonnée : d'où $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

Ceci étant vrai quel que soit le réel x, il en résulte que les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

♥♥♥ f est dite ***PAIRE sur*** $\mathcal{D}$ si, pour tout nombre réel x appartenant à $\mathcal{D}$, $-x$ appartient à $\mathcal{D}$ et pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$, on a : $f(-x) = f(x)$ ♥♥♥

♥♥♥ f est dite ***IMPAIRE*** **sur** $\mathcal{D}$ si, pour tout nombre réel x appartenant à $\mathcal{D}$, $-x$ appartient à $\mathcal{D}$ et pour tout réel x appartenant à $\mathcal{D}$, on a : $f(-x)=-f(x)$ ♥♥♥

***Remarque* : dire "*f* est paire" n'a aucun sens si on ne précise pas sur quel intervalle on se place.**

Par exemple, la fonction carrée est paire sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas paire sur l'intervalle $[0 \ ; \ 5]$.

En effet, pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et $(-x)^2 = x^2$.

Notez que la partie D de la définition doit être centrée en 0, ce qui se traduit par : pour tout nombre réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D.

Donc comme [0 ; 5] n'est pas centré en 0, la fonction carrée n'est pas paire sur [0 ; 5].

Attention, il faut à tout prix écrire le quantificateur *pour tout*, pour vérifier qu'une fonction est paire ou impaire sur un intervalle : écrire, comme le font à peu près 100 % des élèves : $f(-x) = f(x)$ donc f est paire n'a strictement aucun sens.

Exemples

a) Etablir que la fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$.

b) Est-il vrai que si une fonction n'est pas paire sur $\mathbb{R}$*, alors elle est impaire sur* $\mathbb{R}$ *?*

***Solution* :**

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3$.

Vu que $\mathbb{R} =]-\infty \, ; +\infty[$*, pour tout réel x,* $-x$ *appartient à* $\mathbb{R}$*, et :*

Pour tout réel x, $f(-x)= (-x)^3 = (-x)\times(-x)\times (-x) = (-1)^3 \times x^3=-x^3 = -f(x)$.

Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

b) NON !!!

Prenons par exemple la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$: $e^{-1} \neq e^{1}$ (calculatrice si nécessaire ou --- $-1<1$ et la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^{-1} < e^{1}$, et à ce titre la fonction exponentielle n'est pas paire sur $\mathbb{R}$ [la négation de : pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$ est : il existe (au moins) un réel x tel que : $f(-x) \neq f(x)$].

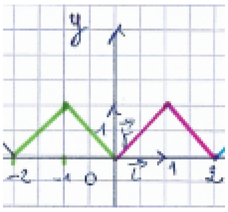
Pour autant, la fonction exponentielle n'est pas impaire sur $\mathbb{R}$ car par exemple, $e^{-1} \neq -e^{1}$ vu que $e^{-1} > 0$!

Attention à ce faux ami dû au vocabulaire utilisé : ne pas être paire pour une fonction ne signifie pas pour autant être impaire ! Une fonction n'est pas un entier relatif !!!!

Interprétation graphique des notions de parité et d'imparité d'une fonction dans un repère orthonormé :

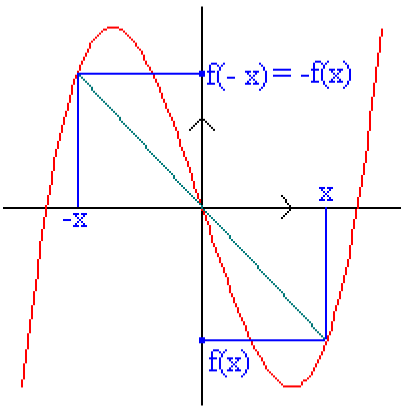
♥♥♥Si une fonction f est paire sur une partie D de $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f *admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*♥♥♥

Illustration : courbe représentative d'une fonction paire sur [-2 ; 2].



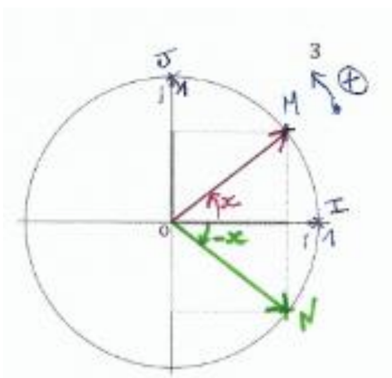
♥♥♥Si une fonction f est impaire sur une partie D de $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f *admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.*♥♥♥

Illustration : courbe représentative d'une fonction f impaire sur $\mathbb{R}$. O est l'intersection des axes du repère et à ajouter sur le graphique ci-dessous.



Propriété La fonction ***cosinus*** est une fonction ***paire*** sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout réel x, $\boxed{\boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}}$. La fonction ***sinus*** est une fonction ***impaire*** sur $\mathbb{R}$, donc, pour tout réel x, $\boxed{\boldsymbol{\sin(-x) = -\sin(x)}}$.

Preuve et illustration :

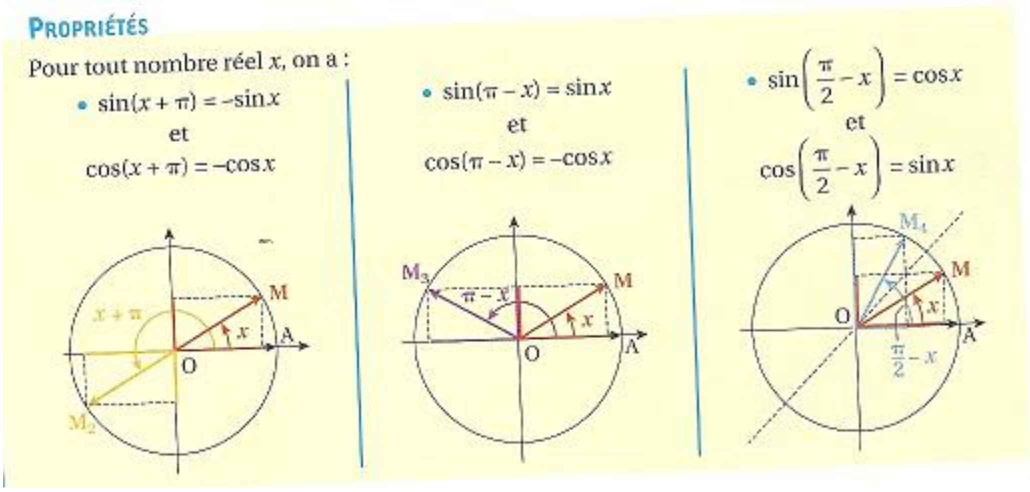


Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$ et $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = -x$.

Donc $M\ (cos(x)\ ;\ sin(x))$ et $N\ (cos(-x)\ ;\ sin(-x))$.

De plus les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc, à ce titre, ils ont respectivement la même abscisse (donc $cos(-x) = cos(x)$) et des ordonnées opposées (donc $sin(-x) = -sin(x)$).

♥♥♥ ***Propriétés importantes*** ♥♥♥



Il est important de savoir retrouver instantanément ces propriétés grâce à un cercle trigo !

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 3cos(x) - cos(2x)$.

Etablir que f est paire sur $\mathbb{R}$*, et périodique de période* 2π.

Sur quel intervalle suffit-il donc d'étudier f ?

Solution

Pour tout réel x, $-x$ est réel et $f(-x) = 3cos(-x) - cos(-2x) = 3cos(x) - cos(2x)$ car la fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de passer du premier au second signe = !

Donc $\boxed{f \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$

Pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = 3cos(x + 2\pi) - cos(2(x+2\pi)) = 3cos(x) - cos(2x + 4\pi)$ car cos est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, *et* $cos(2x + 4\pi) = cos(2x + 2\pi + 2\pi) = cos(2x + 2\pi) = cos(2x)$ *par le même argument.*

Ainsi, pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = 3cos(x) - cos(2x) = f(x)$.

Par suite, $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$

Vu que f est 2π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π : par exemple $[0\ ;\ 2\pi]$ ou encore $[-\pi\ ;\ \pi]$. Ce dernier a l'avantage d'être centré en 0.

De plus, f est paire sur $\mathbb{R}$, donc il suffira d'étudier f sur $[0\ ;\ \pi]$. Le graphe de f se déduira par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et par translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

***Propriété* (équations trigonométriques)**

Soit a un réel fixé.

- Résoudre l'équation : $cos(x) = cos(a)$, d'inconnue x, équivaut à dire que :

$$♥♥♥ \quad cos(x) = cos(a) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = -a + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \quad ♥♥♥$$

En français, deux nombres ont le même cosinus si et seulement si ils sont égaux ou opposés, modulo 2π.

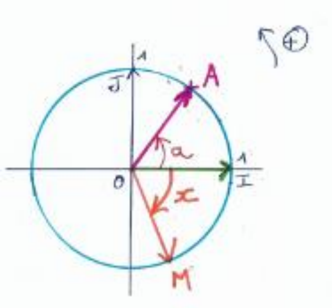
- Résoudre l'équation : $sin(x) = sin(a)$, d'inconnue x, équivaut à dire :

$$♥♥♥ \quad sin(x) = sin(a) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{où } k \in \mathbb{Z} \quad ♥♥♥$$

En français, deux nombres ont le même sinus si et seulement si ils sont égaux modulo 2π ou si la somme de ces deux nombres est égale à π modulo 2π. (a+ π – a = π !!).

Illustration et preuve :

Soit a et x des réels quelconques



Dans le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ})$, soit A le point du cercle trigonométrique tel que : $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OA}) = a$ et M le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = x$.

On a donc : $A(cos(a)\ ;\ sin(a))$ et $M\ (cos(x)\ ;\ sin(x))$.

$cos(x) = cos(a)$ équivaut donc à dire que les points M et A ont la même abscisse, ce qui revient à dire qu'ils sont confondus (ce qui signifie que $x = a + 2k\pi$ avec k entier relatif) ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses (ce qui signifie que $x = -a + 2k\pi$ avec k entier relatif).

$sin(x) = sin(a)$ équivaut donc à dire que les points M et A ont la même ordonnée, ce qui revient à dire qu'ils sont confondus (ce qui signifie que $x = a + 2k\pi$ avec k entier relatif) ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (ce qui signifie que $x + a = \pi + 2k\pi$ avec k entier relatif).

En terminale, on sait donc résoudre deux types d'équations trigonométriques : celles de la forme $cos(x) = cos(a)$ et celles de la forme $sin(x) = sin(a)$. On essaiera dans les exercices, de toujours se ramener à l'une de ces deux formes.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$, les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$; *b)* $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$; *c)* $\cos(\pi x + 2) = 0{,}5$.

a) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Le membre de droite n'est pas écrit sous la forme d'un cosinus.

Or (tableau des valeurs remarquables, à savoir par cœur), $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Aussi, $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \underbrace{\cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{\text{équation trigo. de la forme } \cos(x)=\cos(a) \text{ du cours.}} \iff \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \\ \mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right\} \end{array}}$$

b) $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$. Ici, il y a la présence du carré sur le sinus, l'équation donnée fait étrangement penser à une équation du second degré :

Posons $Y = \sin(x)$: $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ s'écrit alors : $2Y^2 - Y - 1 = 0$ $(*)$

$a = 2$; $b = c = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times 2\times(-1) = 1 + 8 = 9$.

$\Delta > 0$, donc $(*)$ a deux solutions réelles : $\begin{cases} Y_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ Y_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2} = \dfrac{1+3}{4} = 1. \end{cases}$

$\mathcal{S}_{(*)} = \left\{-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right\}$.

⚠ Ce n'est pas fini ! on cherche ici x !

Or $Y = \sin(x)$ et $\left(Y = -\frac{1}{2} \text{ ou } Y = 1\right)$, donc : $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ ou $\sin(x) = 1$.

$\underbrace{\sin(x) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{\text{équations de la forme } \sin(x)=\sin(a).} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{5\pi}{6} + 2\lambda\pi \end{cases}$ $k, \lambda \in \mathbb{Z}$.

$\sin(x) = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}. \\ \mathcal{S}_{]-\pi;\pi]} = \left\{-\frac{5\pi}{6}\ ;\ -\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\}. \end{array}}$$

c) $\cos(\pi x+2)=0{,}5 \iff \cos(\pi x+2)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\iff \left|\begin{array}{l}\pi x+2=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \pi x+2=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. ,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\iff \left|\begin{array}{l}x=\dfrac{\left(-2+\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}{\pi}=-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}+2k \\ \text{ou} \\ x=\dfrac{\left(-2-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)}{\pi}=-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}+2k\end{array}\right. ,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}+2k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}+2k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

$$-\pi<-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}+2k\leq\pi \iff -\pi+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}<2k\leq\pi+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}\quad \div 2\ (\text{et } 2>0)$$

$$\iff \underbrace{-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{6}}_{\simeq -1{,}419}<\underbrace{k}_{\in\mathbb{Z}}\leq\underbrace{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3}}_{\simeq 1{,}556}$$

Ainsi comme $\left]-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}-\frac{1}{3}\right]\cap\mathbb{Z}=\{-1;0;1\}$, il en résulte que $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$.

De même, $-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}+2k\in]-\pi;\pi] \iff k\in\{-1;0;1\}$.

$$\text{Ainsi, } S_{]-\pi;\pi]}=\left\{\underbrace{-\frac{2}{\pi}-\frac{5}{3}}_{k=-1}\ ;\ \underbrace{-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}}_{k=0}\ ;\ \underbrace{-\frac{2}{\pi}+\frac{7}{3}}_{k=1}\ ;\ \overbrace{\underbrace{-\frac{2}{\pi}-\frac{7}{3}}_{k=-1}\ ;\ \underbrace{-\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}}_{k=0}\ ;\ \underbrace{-\frac{2}{\pi}+\frac{5}{3}}_{k=1}}^{2^{e}\text{ équation}}\right\}$$

(R)appelons, à toutes fins utiles, des ***relations d'addition*** et *de* ***duplication*** :

Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

♥♥♥ $\boldsymbol{\cos(a-b)} = \cos(a)\times\cos(b)+\sin(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

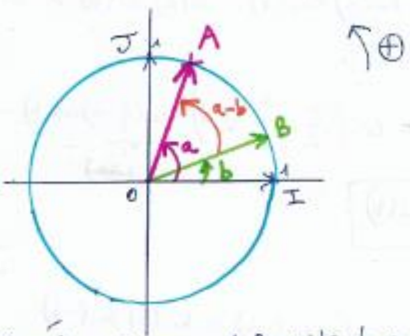
♥♥♥ $\boldsymbol{\sin(a-b)} = \sin(a)\times\cos(b) - \cos(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ $\boldsymbol{\cos(a+b)} = \cos(a)\times\cos(b) - \sin(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ $\boldsymbol{\sin(a+b)} = \sin(a)\times\cos(b) + \cos(a)\times\sin(b)$ ♥♥♥

Pour les curieux, d'où sortent ces horreurs et pourquoi énonce-t-on en premier les formules où apparaissent des soustractions ?

Preuve :



Soit a et b deux réels quelconques, A le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = a$ et B le point du cercle trigo. tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = b$.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} = OB\times OA\times\cos(a-b)$ car $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = b-a$
et $OA = OB = 1$ (cercle trigo. de rayon 1).

donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA} = 1\times1\times\cos(a-b) = \cos(a-b)$. (*)

De plus, $A(\cos(a)\,;\,\sin(a))$ et $B(\cos(b)\,;\,\sin(b))$

donc $\underbrace{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}_{=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}} = xx'+yy' = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ $(**)$

Ainsi, grâce à $(*)$ et $(**)$, on a établi de deux façons différentes le même produit scalaire, de sorte que :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad \left(= \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\right)$$

Remarque : Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons la relation précédente avec : $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = x$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\cos(x) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\sin(x) = \sin(x).$$

$$\boxed{♡\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), \text{ pour tout réel } x.\ ♡}$$

En remplaçant x par $\frac{\pi}{2} - x$ on a aussi : $\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)}_{} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\boxed{♡\quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ ♡}$$

seconde relation : $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ se déduit alors très [fac]ilement !

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}_{=\sin(a)}\cos(b) - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}_{=\cos(a)}\sin(b)$$

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$$

[E]nfin : $\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ car $\begin{cases} \cos \text{ est paire sur } \mathbb{R} \text{ donc } \cos(-b) = \cos(b) \\ \sin \text{ est impaire sur } \mathbb{R} \text{ donc } \sin(-b) = -\sin(b). \end{cases}$

[L]a relation $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ se démontre de la même façon !

Comment mémoriser ces relations d'usage courant post bac ?

On retiendra que **le cosinus** ***ne mélange pas les blocs (= produit de deux cos ou produit de deux sin)***, mais ***change les signes***, et que le **sinus** ***mélange les blocs*** mais ***ne change pas les signes***.

Pour le cosinus : *coco* $\pm$ *sisi (bloc de cos suivi de bloc de sin et signe contraire entre les deux blocs de celui qui est dans la parenthèse du cos de la somme initiale).*

Pour le sinus : *sico* $\pm$ *cosi (mélange sincos* $\pm$ *cossin avec entre les deux blocs la même opération que celle dans la parenthèse du sin de la somme initiale).*

En particulier, lorsque dans les relations d'additions, on fait : $a = b = x$, on obtient les relations suivantes appelées formules de duplication :

Pour tout réel x, on a : ♥♥♥ $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ ♥♥♥
Pour tout réel x, on a : ♥♥♥ $\sin(2x) = 2\sin(x) \times \cos(x)$ ♥♥♥

Preuve *:*

$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\times \cos(x) - \sin(x)\times \sin(x)$ d'après la 3° formule d'addition.

$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$. Or d'après la relation de Pythagore trigonométrique, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, de sorte que : $\boxed{\cos(2x)} = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = \boxed{2\cos^2(x) - 1}$.

La relation $\boxed{\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)}$ s'obtient avec Pythagore en remplaçant cette fois-ci $\cos^2(x)$ par $1 - \sin^2(x)$.

$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)$ d'après la 4° formule d'addition.

$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$ car $\sin(x)\cos(x) = \cos(x)\sin(x)$: le produit de réels est commutatif !

Exercice 3

Donner la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$. En déduire celle de $\sin(\frac{\pi}{8})$

Solution :

Observons que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Donc $\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underbrace{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}_{2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1}$ formule de duplication où on choisit d'exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Donc $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

L'inconnue est ici $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$: $X^2 = a$ avec $a \geq 0$ équivaut à $X = -\sqrt{a}$ ou $X = \sqrt{a}$.

Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

Or sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geq 0$, donc comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$.

Par suite, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ (exotique !)

Enfin, $\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (relation de duplication du sinus).

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\cancel{2}}$$

Pas très esthétique le dénominateur ...

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2 \times 2} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

Autre méthode pour qui n'a à peu près rien compris aux calculs sur les racines carrées !

$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ ....

III – Régularité des fonctions cosinus et sinus

Propriété

Les fonctions ***cosinus*** et ***sinus*** sont ***continues*** sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

En ***3 étapes*** : (tout écrit pour gagner du temps, à lire et travailler pour ceux qui cherchent à comprendre d'où sortent les choses, à admettre sinon) :

On montre une double inégalité simple issue de considérations géométriques (lemme).

- On montre ensuite que la fonction sinus est continue en 0, puis que la fonction cosinus est également continue en 0.

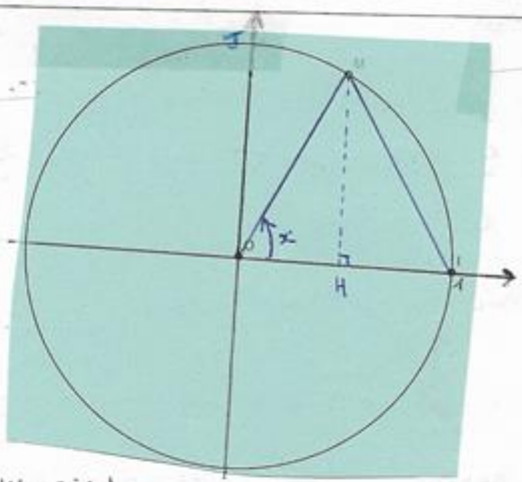
- On montre enfin que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Lemme

Pour tout réel $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq x$.

Preuve :

La figure suivante est la clé pour comprendre :



On a : $\boxed{0 \leq \text{Aire}(OIM) \leq \text{Aire}(\overset{\frown}{OIM})}$, où $\overset{\frown}{OIM}$ désigne le secteur circulaire délimité par les points O, I et M :

$\text{Aire}(OIM) \leq \text{Aire}(\overset{\frown}{OIM})$ car le triangle OIM est inscrit dans le secteur circulaire $\overset{\frown}{OIM}$.

Or, $\text{Aire}(OIM) = \frac{OI \times HM}{2}$ et dans le triangle OHM rectangle en H, $\sin(x) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1}$, donc $HM = \sin(x)$

Ensuite, $\text{Aire}(OIM) = \frac{1 \times \sin(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$.

Évaluons l'aire de $\overset{\frown}{OIM}$: Il y a proportionnalité entre mesure de l'angle $\widehat{OIM}$ et l'aire du secteur $\overset{\frown}{OIM}$:

Mesure d'angle	2π	x
Aire	$\pi \times R^2$	?

$$\text{Aire}(\overset{\frown}{OIM}) = \frac{\pi R^2 x}{2\pi} = \frac{R^2 x}{2} = \frac{x}{2} \text{ vu que ici } R = 1.$$

D'où grâce à l'encadré on a : $0 \leq \frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2}$, d'où $\boxed{0 \leq \sin(x) \leq x}$ ■

Nous allons à présent prouver que $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$

Grâce au lemme, si $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $0 \leq \sin(x) \leq x$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 0 = 0 \end{cases}$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sin(x) = 0.}$

Etablissons enfin que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x)=0$: par imparité de sin, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x)=-\sin(-x)$.

Or, si $x\to 0$ et $x<0$, alors $-x\to 0$ et $-x>0$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\sin(-x) = 0$ ↑ composition et dernier résultat

On a donc établi que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x)=0$. or $\sin(0)=0$.

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sin(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin(x)=\sin(0)=0}$, donc $\boxed{\text{la fonction sinus est continue en } 0}$ ■

Etablissons enfin que la fonction cosinus est continue en 0 :

Pour tout réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Donc $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)=0$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2(x)=0$, et par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2(x))=1$.

donc $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2(x)=1$; donc par composition, vu que $\lim\limits_{X\to 1}\sqrt{X}=1$, on a :

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\cos^2(x)}=1$, et comme au voisinage de 0, $\cos(x)>0$, on a bien le résultat : $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$. Or $\cos(0)=1$.

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=\cos(0)=1}$: $\boxed{\text{La fonction cosinus est continue en } 0}$ ■

Etape 3 : *cos* et *sin* sont continues sur $\mathbb{R}$:

Preuve : Soit x un réel quelconque, montrons que la fonction *cos* est continue en x, c'est-à-dire intéressons-nous, après en avoir justifié l'existence, à : $\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+h)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\sin(x+h)$

Soit h un réel non nul :

D'après les formules d'additions : $\cos(x+h)=\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)$ $(*)$.

Or d'après l'étape 2, *cos* est continue en 0, donc $\lim\limits_{h\to 0}\cos(0+h)=\cos(0)=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\sin(0+h)=\sin(0)=0$.

Donc par limite de produit et de somme dans (*), on a : $\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+h)=\cos(x)\times 1-\sin(x)\times 0=\cos(x)$.

Ainsi, la fonction cos est continue en le réel x, et x étant quelconque, il en résulte que la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Exactement la même démarche en utilisant la formule d'addition pour transformer $\sin(x+h)$ conduit à la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons à présent montrer que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer la dérivée de chacune de ces fonctions :

Pour cela, nous avons besoin d'une nouvelle étude en trois étapes :

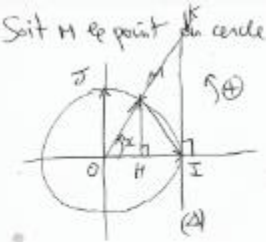
On démontre un lemme qui va servir à établir que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0, et enfin on démontrera que ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Lemme : une inégalité fort utile en trigonométrie.

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$, on a : $sin(x) < x < \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$.

Preuve : Mignon !

Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{OI}\,;\vec{OM}) = x$ où $0 < x < \frac{\pi}{2}$:



Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI) :
Soit K le point d'intersection de (OM) et de la droite (Δ) perpendiculaire en I à la droite (OI).

Vu que le triangle OIM est contenu dans le secteur circulaire $\widehat{OIM}$ lui même contenu dans le triangle OIK on a :

$$\underbrace{\text{Aire}(OIM)}_{\frac{OI \times HM}{2}} < \underbrace{\text{Aire}(\widehat{OIM})}_{\frac{x}{2}^{*}} < \underbrace{\text{Aire}(OIK)}_{\frac{OI \times IK}{2}}.$$

*) déjà vu au lemme précédent !

avec $HM = \sin(x)$.

$\tan(x) = \dfrac{IK}{OI} = IK$ car $OI = 1$.

et $\tan(x) = \dfrac{IK}{OI} = \dfrac{\frac{IK}{OK}}{\frac{OI}{OK}} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

D'où : $\dfrac{1 \times \sin(x)}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{2}$ c'est à dire : $\sin(x) < x < \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (car $2 > 0$).

***Propriété* (bien retenir les résultats encadrés)**

La fonction sinus est dérivable en 0, et son nombre dérivé en 0 vaut 1 : $(sin)'(0) = 1$.

La fonction cosinus est dérivable en 0, et son nombre dérivé en 0 vaut 0 : $(cos)'(0) = 0$.

En d'autres termes, on a donc : ♥♥♥ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sin(h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{cos(h) - 1}{h} = 0$ ♥♥♥

__Preuve__ : (à lire par vos soins si vous voulez comprendre d'où sortent les choses, à admettre sinon).

Montrons que $(\sin)'(0)=1$.

Pour $h\neq 0$, intéressons-nous à : $\dfrac{\sin(h)-\sin(0)}{h}=\dfrac{\sin(h)}{h}$ car $\sin(0)=0$.

Or $\forall h\in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\sin(h)<h<\dfrac{\sin(h)}{\cos(h)}$ d'après le lemme précédent.

donc $h>0$ et $\dfrac{\sin(h)}{h}<\dfrac{h}{h}<\dfrac{\sin(h)}{h\cos(h)}$ car $h>0$.

Donc : $\dfrac{\sin(h)}{h}<1<\dfrac{\sin(h)}{h}\times\dfrac{1}{\cos(h)}$.

donc $\dfrac{\sin(h)}{h}<1$ et $1<\dfrac{\sin(h)}{h}\times\dfrac{1}{\cos(h)}$, donc comme $h\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\cos(h)>0$ donc $\cos(h)<\dfrac{\sin(h)}{h}$.

Par suite, $\boxed{\text{pour tout réel } h\in]0;\frac{\pi}{2}[,\quad \cos(h)<\dfrac{\sin(h)}{h}<1.}$ (*)

Or $\cos$ est continue en 0, donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\cos(h)=1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}1=1$.

donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\boxed{\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1.}$

Si $h<0$: alors $-h>0$

Par parité du Cosinus, $\cos(-h)=\cos(h)$ et $\dfrac{\sin(-h)}{-h}\overset{\text{imparité du sinus.}}{=}\dfrac{-\sin(h)}{-h}=\dfrac{\sin(h)}{h}$.

Ainsi, grâce à (*) : $\forall -h\in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\cos(-h)<\dfrac{\sin(-h)}{-h}<1$

Ainsi, $\forall h\in]-\frac{\pi}{2};0[$, $\cos(h)<\dfrac{\sin(h)}{h}<1$. (**)

De là comme $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\cos(h)=1$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}1=1$, d'après (**) et le théorème des gendarmes, on

a : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$ et comme $1\in\mathbb{R}$, il en résulte que $\boxed{\sin \text{ est}}$

$\boxed{\text{dérivable en 0 et que } (\sin)'(0)=1.}$

Pour établir que *cos* est dérivable en 0 on utilise les relations de duplication :

Pour tout réel h, $\cos(h) = \cos\left(2 \times \frac{h}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$

Ainsi pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{\cos(h) - 1}{h} = \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \dfrac{-\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = -\sin\left(\frac{h}{2}\right) \times \dfrac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{2} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$

et $\lim\limits_{X \to 0} \sin(X) = 0$ car sin est continue en 0, donc $\lim\limits_{h \to 0} \sin\left(\frac{h}{2}\right) = 0$.

Par limite de produit, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - \cos(0)}{h} = 0$, donc

cos est dérivable en 0, et $(\cos)'(0) = 0$.

Remarque :

La première limite : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ fournit l'approximation suivante très utilisée en Physique : pour x de *petite mesure en radian*, on a : $\sin(x) \approx x$.

Théorème

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, ♥♥♥ ***cos'(x) = –sin(x)*** ♥♥♥

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, ♥♥♥ ***sin'(x) = cos(x)*** ♥♥♥

Preuve :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

Montrons que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$ existe et est égale à $-\sin(x)$:

Or, pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \dfrac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$

$\dfrac{\cos(x) - \cos(h)}{h} = \dfrac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \dfrac{\sin(x)\sin(h)}{h}$

$\dfrac{\cos(x) - \cos(h)}{h} = \cos(x) \times \dfrac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \times \dfrac{\sin(h)}{h}$.

Or grâce à l'étape 2, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = -0 = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$

Donc, par limite de somme et produit on a :

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(h)}{h} = -\sin(x)$. et $-\sin(x) \in \mathbb{R}$.

Ainsi, cos est dérivable en x arbitrairement fixé et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Donc cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\cos)' = -\sin$

Même type de preuve pour établir que sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\sin)' = \cos$ en partant cette fois-ci du taux de variation : $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$ ----

<u>Propriété</u> : dérivée de composée contenant une fonction cosinus ou sinus :

Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors, les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(u(x))$ et $g(x) = \sin(u(x))$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$f'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x))$ et $g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$.

<u>Preuve</u> : résulte du théorème de dérivation des fonctions composées et du théorème précédent.

<u>Exemples</u>

1) Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = \sin(4x)$; $g(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 3x)$; $h(x) = \sin^2(3x)$;

2) Donner une période de i, puis calculer $i'(t)$ sachant que : $i(t) = A\cos(wt + \phi)$, ω et $A \neq 0$.

3) Etablir que si une fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est périodique de période 2π, alors f' est aussi périodique de période 2π. Quid de la réciproque ?

<u>Solution</u> :

1) $f(x) = \sin(4x) = \sin(u(x))$ avec : $u(x) = 4x$ et $u'(x) = 4$.

Donc $f'(x) = u'(x)\cos(u(x)) = 4\cos(4x)$.

$g(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - 3x) = \cos(u(x))$ avec : $u(x) = \frac{\pi}{3} - 3x$ et $u'(x) = 0 - 3 = -3$

$g'(x) = -u'(x)\sin(u(x)) = -(-3)\sin(\frac{\pi}{3} - 3x) = 3\sin(\frac{\pi}{3} - 3x)$.

$h(x) = \sin^2(3x) = \sin(3x) \times \sin(3x) = u^2(x)$ avec : $u(x) = \sin(3x)$ et $u'(x) = 3\cos(3x)$.

$h'(x) = 2u'(x) \times u(x) = 2 \times 3\cos(3x) \times \sin(3x) = 3 \times \underline{2\sin(3x)\cos(3x)} = 3\sin(6x)$ (<u>formule de </u>duplication du sinus).

2) On cherche ici un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad i(t+T) = i(t) \iff A\cos(\omega(t+T)+\phi) = A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\underset{A\neq 0}{\iff} \cos(\omega t+\omega T+\phi) = \cos(\omega t+\phi)$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} \omega t+\omega T+\phi = \omega t+\phi+2k\pi \\ \text{ou} \\ \omega t+\omega T+\phi = -(\omega t+\phi)+2k\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\iff \left|\begin{array}{l} \omega T = 2k\pi \quad (*) \\ \text{ou} \\ 2\omega t+\omega T+2\phi = 2k\pi \end{array}\right.$$

Dans $(*)$, prenons $k=1$: $\omega T = 2\pi$ et $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ car $\omega \neq 0$.

Par exemple, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est une période de i (résultat bien connu en Physique).

$i(t) = A\cos(\omega t+\phi) = A\cos(u(t))$ où $u(t) = \omega t+\phi$ et $u'(t) = \omega$

donc $\boxed{i'(t)} = A\times\omega\times(-\sin(\omega t+\phi)) = \boxed{-A\omega\sin(\omega t+\phi)}$

$\hookrightarrow i'(t) = A\times u'(t)\times(-\sin(u(t)))$.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

donc en dérivant la relation précédente (licite car f est dérivable et par composée) on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $1\times f'(x+2\pi) = f'(x)$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x+2\pi) = f'(x)$.

f' est donc 2π-périodique : affirmation vraie.

La réciproque : f étant une fonction dérivable, si f' est 2π-périodique, alors f est 2π-périodique est une affirmation fausse !

Contre-exemple : prenons $f(x) = x$; (f définie sur $\mathbb{R}$).

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = 1$, donc $f'(x+2\pi) = 1 = f'(x)$: f' est 2π-périodique

Pour autant, $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 2\pi$, donc $f(0)\neq f(2\pi)$, donc f n'est pas 2π-périodique !

IV - Exercices de synthèse sur ce chapitre

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sin^2(x) + \sqrt{3}cos(x)$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1*a*) Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

1*b*) Montrer que 2π est une période de f.

2) On se limite donc à l'étude de f sur $I = [0\ ;\ \pi]$. Pourquoi ?

a) Vérifier que pour tout réel x appartenant à I, on a : $f'(x) = sin(x)(2cos(x) - \sqrt{3})$.

b) Etudier SOIGNEUSEMENT les variations de f sur I, et dresser le tableau de variation de f sur I.

c) Tracer $\mathcal{C}$ dans un repère.

d) Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A situé sur $\mathcal{C}$ et dont l'abscisse vaut $\frac{\pi}{2}$.

e) Démontrer que pour tout réel x vérifiant : $\frac{-\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, on a : $1,72 \leqslant f(x) \leqslant 1,75$.

3) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α, avec $\alpha \in [2\ ;\ 2,1]$.

$f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

1a) Cela revient à prouver que f est paire sur $\mathbb{R}$:

Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$, et $f(-x) = \sin^2(-x) + \sqrt{3}\cos(-x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-\sin(x))^2 + \sqrt{3}\cos(x)$ car $\begin{cases} \sin \text{ est impaire sur } \mathbb{R}, \text{ donc } \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos \text{ est paire sur } \mathbb{R}, \text{ donc } \cos(-x) = \cos(x) \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) = f(x)$: f est paire sur $\mathbb{R}$, donc l'axe des ordonnées est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

1b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin^2(x+2\pi) + \sqrt{3}\cos(x+2\pi)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x) = f(x)$ car cos et sin sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ donc $\begin{cases} \sin(x+2\pi) = \sin(x) \\ \cos(x+2\pi) = \cos(x) \end{cases}$

Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

2) f est 2π-périodique, il suffit donc de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $J = [-\pi ; \pi]$.

De plus, f est paire sur $\mathbb{R}$, donc il suffit de l'étudier sur $I = [0 ; \pi]$ (et de compléter l'étude par symétrie et translation).

a) $I = [0 ; \pi]$.

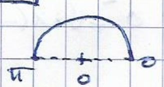
$\forall x \in I$, $f(x) = \sin^2(x) + \sqrt{3}\cos(x)$ (f est dérivable sur I en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur I).

$\forall x \in I$, $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$ car $(u^2)' = 2uu'$ avec ici $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{cases}$

$$\boxed{\forall x \in I, \ f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})}$$

b) $\forall x \in I = [0 ; \pi]$, on a $\sin(x) \geq 0$

avec $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

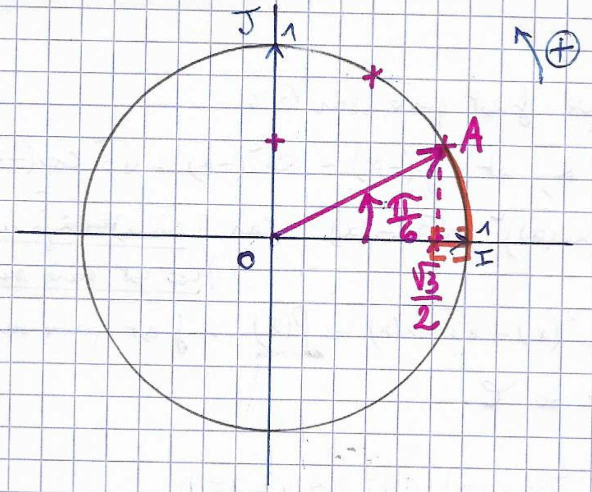


Donc $\forall x \in]0 ; \pi[$, $\sin(x) > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $2\cos(x) - \sqrt{3}$ sur $]0 ; \pi[$.

Or $2\cos(x) - \sqrt{3} \geq 0 \iff \cos(x) \geq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{= \cos(\frac{\pi}{6})} \iff$ on fait un cercle trigo !

!! $\cos(x) \geq \cos(\frac{\pi}{6})$ n'équivaut pas à $x \geq \frac{\pi}{6}$!

Ctrex : Pour $x =$: $\cos(0) = 1$ donc $\cos(0) \geq \cos(\frac{\pi}{6})$ et $0 < \pi/6$!!!



Sur $[0;\pi]$, $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right]$.

On colorie d'abord en orange ici tous les points de l'axe des abscisses (= axe des cos) tels que $x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis l'arc de cercle correspondant à de tels points (ici $\overset{\frown}{IA}$)).

Par suite on a via le principe de Lagrange :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$2\cos(x)-\sqrt{3}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$

$f(0) = \sin^2(0) + \sqrt{3}\cos(0)$

$f(0) = 0^2 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

$f(\pi) = \sin^2(\pi) + \sqrt{3}\cos(\pi) = 0^2 + \sqrt{3} \times (-1) = -\sqrt{3}$

c) Utiliser géogébra. Cf. ci-joint.

Bien observer que sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$, les valeurs prises par f varient "peu" car $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ et $\frac{7}{4} = 1{,}75$. Il faudra donc bien "dilater" l'unité sur l'axe des ordonnées afin de voir apparaître à l'écran une courbe de fonction qui ne semble pas être constante sur $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$!!

d) $A(\frac{\pi}{2} ; y_A) \in \mathscr{C}$, donc $y_A = f(\frac{\pi}{2}) = \sin^2(\frac{\pi}{2}) + \sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}) = 1^2 + \sqrt{3}\times 0 = 1$.

$A(\frac{\pi}{2} ; 1)$. Soit T_A la tangente à $\mathscr{C}$ en A (existe car f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$)

T_A a pour équation réduite : $y = f'(\frac{\pi}{2})\times(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2})$.

Or $f'(x) = \sin(x)(2\cos(x) - \sqrt{3})$, donc $f'(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2})(2\cos(\frac{\pi}{2}) - \sqrt{3})$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 1(2\times 0 - \sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

T_A a pour équation réduite : $y = -\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

$$\boxed{y = -\sqrt{3}x + 1 + \frac{\sqrt{3}\times\pi}{2}}$$

e) Vu que f est paire sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$, on a :
$1{,}72 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}75$.

Sur $[0 ; \frac{\pi}{6}]$, grâce à 2b), f croît, donc si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$, alors on a :

$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\frac{\pi}{6})$, c'est à dire : $\sqrt{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{7}{4}$.

Or $\frac{7}{4} = 1{,}75$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, donc $\sqrt{3} \geqslant 1{,}72$.

Par suite, $\boxed{\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{6}], \quad 1{,}72 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}75}$ (*)

Sur $[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}]$, f décroît, donc si $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, alors on a :

$\underbrace{f(\frac{\pi}{6})}_{=\frac{7}{4}} \geqslant f(x) \geqslant f(\frac{\pi}{4})$ avec $f(\frac{\pi}{4}) = \sin^2(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{4})$

$f(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1+\sqrt{6}}{2}$ avec $\frac{1+\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}725$

Donc $\frac{1+\sqrt{6}}{2} \geqslant 1{,}72$

Par suite, $\boxed{\forall x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}], \quad \frac{7}{4} \geqslant f(x) \geqslant 1{,}72}$ (**)

(*) et (**) font que : $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{4}]$, $1{,}72 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}75$.

Vu que f est paire sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\forall x \in [-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$, $1{,}72 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}75$.

3) Plaçons-nous d'entrée sur $[2\,;2{,}1]$: $\pi \simeq 3{,}14$.

Vu que $\frac{\pi}{6} < 1$ et $\pi > 2{,}1$, $[2\,;2{,}1] \subset \left[\frac{\pi}{6}\,;\pi\right]$

est contenu dans

*) f est continue sur $[2\,;2{,}1]$

**) f est strictement décroissante sur $[2\,;2{,}1]$.

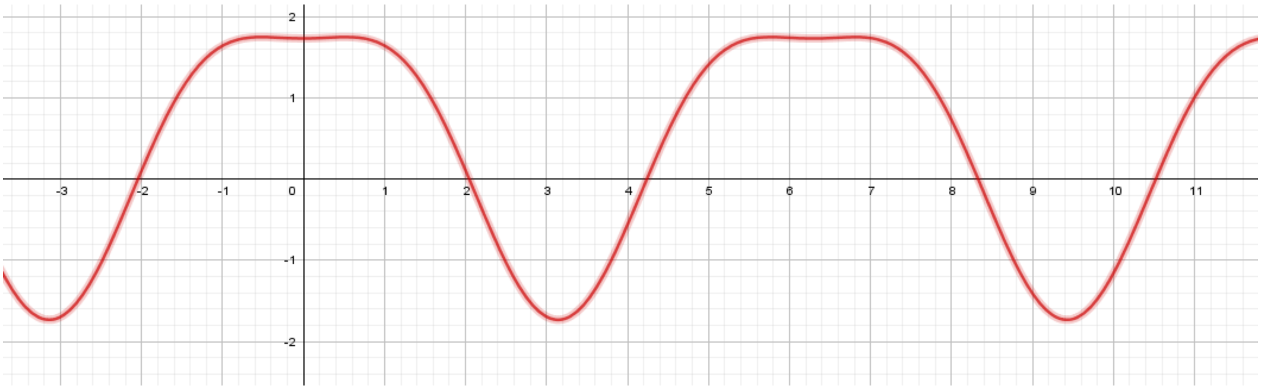
***) $f(2) \simeq 0{,}106$, donc $f(2) > 0$

$f(2{,}1) \simeq -0{,}125$, donc $f(2{,}1) < 0$

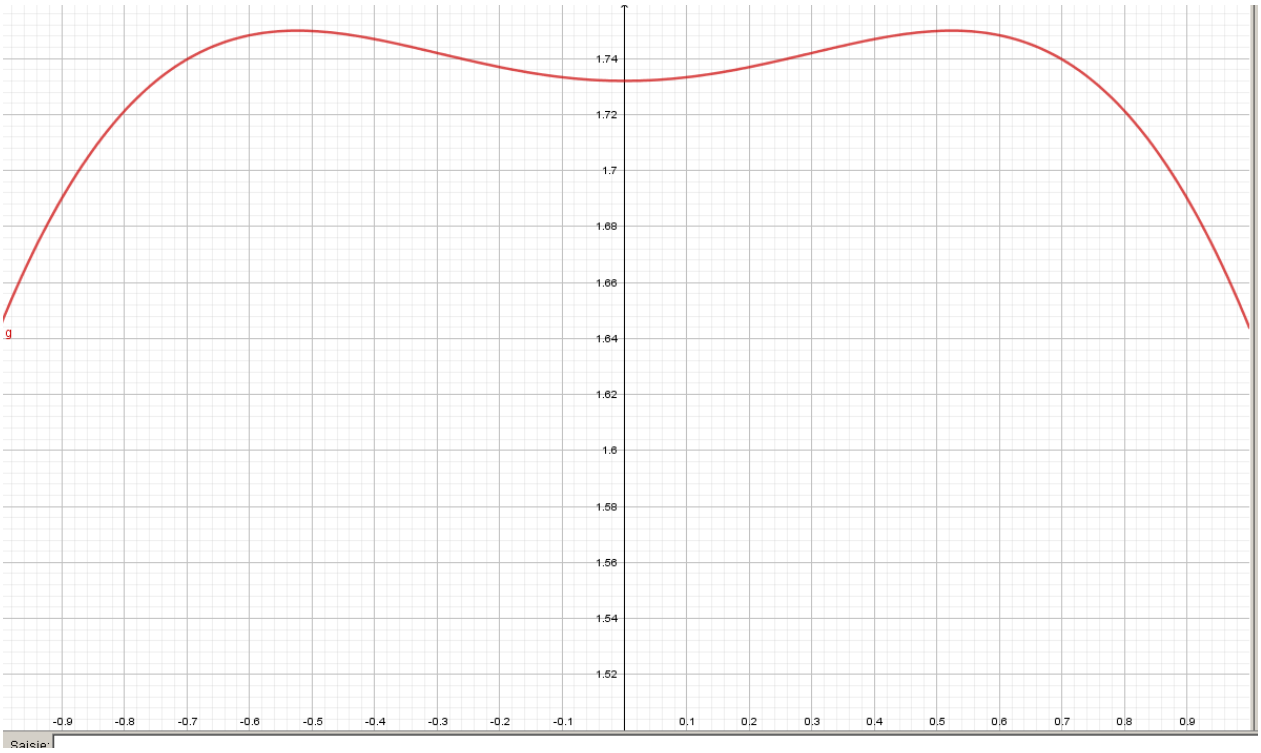
Donc $f(2{,}1) < 0 < f(2)$: 0 est une valeur intermédiaire pour f sur $[2\,;2{,}1]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2\,;2{,}1]$ notée α.

Courbe sans zoom sur [-3,8 ; 11,8] :



Courbe zoomée sur [-1 ; 1] :



Exercice II

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$: f est appelée fonction tangente.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera D_f.

b) Etablir que f est impaire sur D_f et qu'elle est périodique de période π sur D_f.

c) En déduire sur quel intervalle I on va étudier f.

d) Calculer, pour tout réel x appartenant à I, $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur I.

e) Montrer que O, origine du repère, est situé sur la courbe représentative de f, notée C_f, puis donner l'équation de la tangente, appelée (T) à C_f au point O. Etudier la position relative de (T) et de C_f sur I.

f) Déterminer $\lim\limits_{\begin{cases} x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2} \end{cases}} f(x)$. Conséquence graphique ?

g) Construire dans un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ C_f sur $]-\dfrac{3\pi}{2}\ ;-\dfrac{\pi}{2}[\,\cup\,]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$.

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} := \tan(x)$.

a) $f(x)$ est calculable si et seulement si $\cos(x) \neq 0$ (dénominateur).

Or, $\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) \iff \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left(\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \} \right)$.

On peut noter abusivement : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{ \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}}$.

b) $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x)$

car $\begin{cases} \cos \text{ est paire sur } \mathcal{D}_f \\ \sin \text{ est impaire sur } \mathcal{D}_f \end{cases}$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathcal{D}_f}$.

Formule de trigo ♡ (penser au cercle trigo).

$\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = f(x)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique sur } \mathcal{D}_f}$.

c) Vu que f est π-périodique sur $\mathcal{D}_f$, il suffit de l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.
De plus, f est impaire sur $\mathcal{D}_f$, donc on étudiera f sur $\boxed{I = [0 ; \frac{\pi}{2}[}$

d) $\forall x \in I$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ u'(x) = \cos(x) \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \cos(x) \\ v'(x) = -\sin(x) \end{cases}$

$\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$\forall x \in I$, $f'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

$\forall x \in I$, $\boxed{f'(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$

♡ → Pythagore !

Or, $\forall x \in I$, $\cos^2(x) > 0$, donc $\frac{1}{\cos^2(x)} > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur I.

D'après le principe de Lagrange, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I}$

e) $O(0 ; 0)$; $0 \in \mathcal{D}_f$ et $f(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0 = y_0$, donc

$\boxed{O \in \mathcal{C}_f}$

f est dérivable en 0, donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $O(0;0)$ notée (T), et (T) a par équation réduite : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$.

Or $f(0)=0$ (défini ds) et $f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2(0)} = \dfrac{1}{1^2} = 1$.

Donc $\boxed{(T) \text{ a par équation réduite : } y = x}$

**/ Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (T) sur I revient à étudier le signe de la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 \overset{(q.d)}{=} \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Or, $\forall x \in I$, $\cos^2(x) > 0$ et comme $0 < \cos(x) \leq 1$ sur I, $1-\cos^2(x) \geq 0$.
Donc, $\forall x \in I$, $g'(x) \geq 0$. D'après le pté de Lagrange, g croît sur I.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g(x)$	0 $\nearrow$	‖

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) = 0$

Ainsi, g croît sur $[0;\frac{\pi}{2}[$ et $g(0)=0$, donc $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}[$, $g(x) \geq 0$.

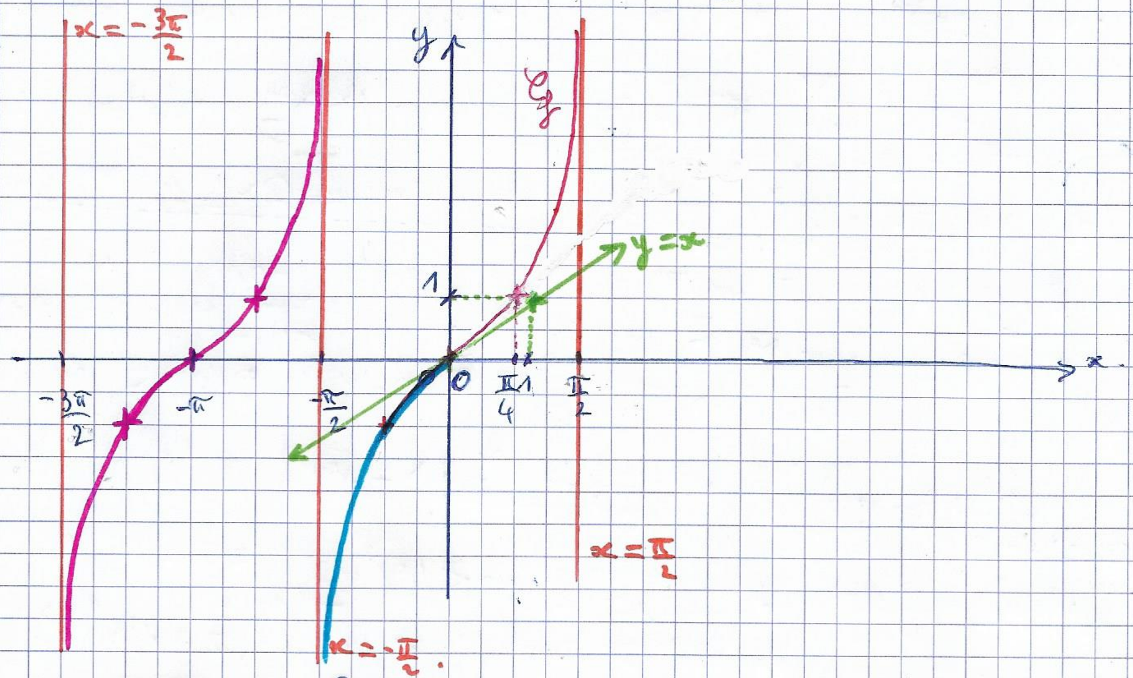
Donc sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, $f(x) - x \geq 0$, $f(x) \geq x$: $\mathcal{C}_f$ est donc située AU-DESSUS de (T) sur $I = [0;\frac{\pi}{2}[$.

f) $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \boxed{+\infty}$ Car $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$

donc par limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.

$\boxed{\text{La droite d'équation } x = \frac{\pi}{2} \text{ est donc asymptote verticale à } \mathcal{C}_f}$

g) D'abord on construit $\mathcal{C}_g$ sur $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$: (repère non orthonormé).

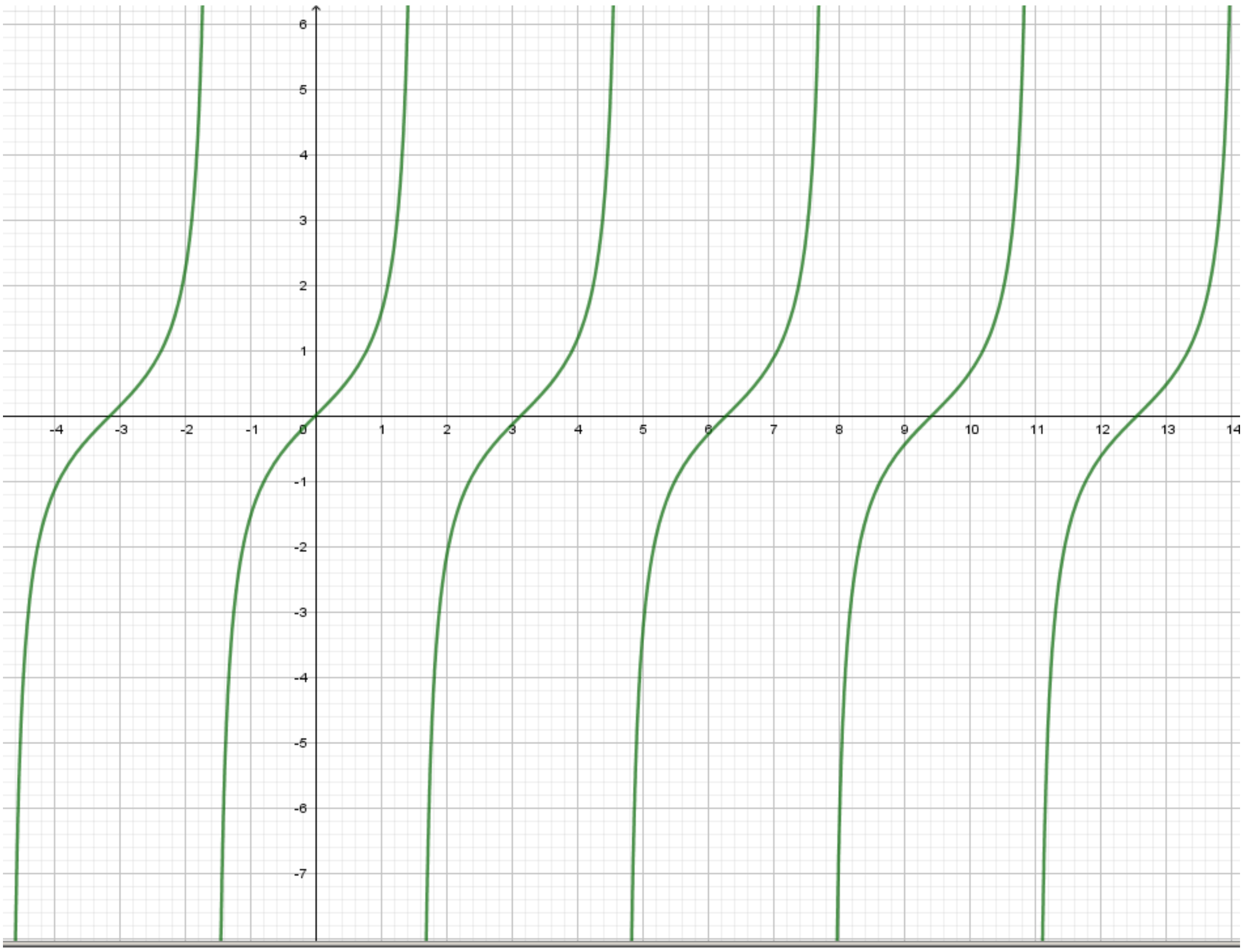


$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$ et dans l'absolu, il faut faire une table de valeurs.

Ensuite on symétrise par rapport à O la partie de $\mathcal{C}_g$ tracée en rouge on obtient le morceau bleu

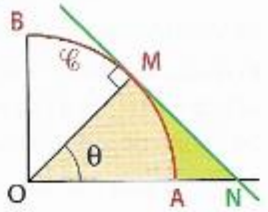
Enfin, on translate la courbe obtenue sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par la translation de vecteur $-\pi\vec{i}$ où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire d'origine O dirigeant l'axe des abscisses.
on obtient le morceau

Voici avec géogebra :


6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

Exercice III

$\mathscr{C}$ est un quart de cercle de rayon 1 et M un point de $\mathscr{C}$. On note $\widehat{AOM} = \theta$ avec $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. La tangente en M à $\mathscr{C}$ coupe (OA) en N.



Le but de cet exercice est de comparer les aires des domaines coloriés en orange et en vert. On note $f(\theta)$ l'aire du domaine orange et $g(\theta)$ l'aire du domaine vert.

1. Conjecturer avec GeoGebra

Construisez la figure. Créez le secteur circulaire OAM, le triangle OMN et l'angle θ.

Déplacez le point M sur l'arc $\widehat{AB}$ et comparez les deux aires pour conjecturer.

2. Démontrer

On note h la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta).$$

a) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$h(\theta) = \frac{1}{2}\left(2\theta - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right).$$

b) Démontrez que pour θ de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$h'(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}.$$

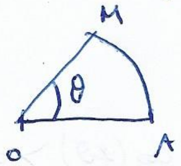
c) Étudiez les variations de h et dressez son tableau de variation.

d) Démontrez qu'il existe un unique nombre α dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

Encadrez α dans un intervalle d'amplitude 10^{-1}.

e) Comparez alors les aires des deux domaines.

Aire en orange $= f(\theta) =$ aire d'une fraction de disque d'angle au centre θ.

① 

Or il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle au centre θ et l'aire de la fraction de disque :

Mesure θ en rad.	2π	θ
Aire portion disque	$\pi \times 1^2 = \pi$	$f(\theta)$

donc $\boxed{f(\theta)} = \dfrac{\pi \times \theta}{2\pi} = \boxed{\dfrac{\theta}{2}}$

Rappel : Aire disque de rayon R : $\pi \times R^2$ (ici $R = OA = 1$).

Aire en vert $= g(\theta) =$ aire du triangle $OMN - f(\theta)$

Or OMN est un triangle rectangle en M, donc $\mathcal{A}(OMN) = \dfrac{OM \times MN}{2} = \dfrac{1 \times MN}{2} = \dfrac{MN}{2}$.

Or $\tan(\theta) = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} = \dfrac{MN}{OM} = \dfrac{MN}{1} = MN$, donc :

$\mathcal{A}(OMN) = \dfrac{\tan(\theta)}{2}$.

Par suite, $\boxed{g(\theta) = \dfrac{\tan(\theta)}{2} - \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\tan(\theta) - \theta}{2}}$ avec $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

② h est définie sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$

a)

$h(\theta) = \dfrac{\theta}{2} - \left(\dfrac{\tan(\theta)}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\theta}{2} - \dfrac{\tan(\theta)}{2} + \dfrac{\theta}{2} = \theta - \dfrac{\tan(\theta)}{2}$.

$\boxed{h(\theta)} = \dfrac{1}{2}\left(2\theta - \tan(\theta)\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}\left(2\theta - \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)}$ on rappelle que $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ cf. ex. II !

b) h est dérivable sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ (somme et quotient de fonctions dérivables).

$h'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{\cos(\theta) \times \cos(\theta) - \sin(\theta) \times (-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{\overbrace{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}^{=1 \text{ (Pythagore)}}}{\cos^2(\theta)}\right)$

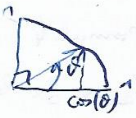
$h'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} - \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\cos^2(\theta) - 1}{\cos^2(\theta)}\right)$.

Or # formule de duplication, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

Donc $\boxed{h'(\theta)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(2\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) = \boxed{\dfrac{\cos(2\theta)}{2\cos^2(\theta)}}$

c) $\forall \theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $2\cos^2(\theta) > 0$, de sorte que $h'(\theta)$ a le même signe que son numérateur $\cos(2\theta)$.

Or $\cos$ est positive sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$:



Donc si : $0 \leqslant 2\theta < \frac{\pi}{2}$, c'est à dire si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$, alors $\cos(2\theta) > 0$

Donc sur $[0 ; \frac{\pi}{4}[$, $h'(\theta) > 0$.

Cos est négative ou nulle sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi[$

Donc si : $\frac{\pi}{2} \leqslant 2\theta < \pi$, c'est à dire si : $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, alors $\cos(2\theta) > 0$

Donc sur $[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$, $h'(\theta) < 0$.

D'après le principe de Lagrange, on a :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(\theta)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$h(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

$h(0) = \frac{1}{2}\left(2 \times 0 - \frac{\sin(0)}{\cos(0)}\right) = 0$

$h(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Enfin, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} h(\theta) = -\infty$ car : $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \sin(\theta) = 1$; $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \cos(\theta) = 0^+$, donc par

limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = +\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\infty$

et $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} 2\theta = \pi$, donc par limite de somme et produit, $\boxed{\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{\pi}{2} \\ \theta < \frac{\pi}{2}}} h(\theta) = -\infty}$.

d) Sur $]0 ; \frac{\pi}{4}]$, h croît, de plus, $h(0) = 0$.

Donc $\forall \theta \in]0 ; \frac{\pi}{4}]$, $h(0) < h(\theta)$, c'est à dire $h(\theta) > 0$: l'équation $h(\theta) = 0$ n'a donc pas de solution sur $]0 ; \frac{\pi}{4}]$.

Plaçons-nous sur $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$:

*) h est continue sur cet intervalle car elle y est dérivable.

**) h est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$.

***) $0 \in]-\infty ; \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}]$ vu que $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}>0$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(\theta)=0$ admet une unique solution sur $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$. On la note α, donc $h(\alpha)=0$.

Par suite, il existe un unique réel α appartenant à $]0;\frac{\pi}{2}]$ tel que $h(\alpha)=0$.

Grâce à une calculatrice réglée en radian, on obtient sans peine (balayage...) :

θ	$h(\theta)$
1,1	0,1176
1,2	−0,086

Donc $\boxed{1,1<\alpha<1,2}$ (encadrement de α à 10^{-1} près).

c) $h(\alpha)=0 \overset{\text{déf de } h\,!}{\Longleftrightarrow} f(\alpha)-g(\alpha)=0 \Longleftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha)$.

Lorsque $\theta=\alpha$, les deux domaines orange et vert ont la même aire.

Exercice IV

On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{\pi}{4}$ et π.

Exercice IV

$\sin(x)(2\cos^2(x)-1)=0 \overset{\text{Produit nul}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}\sin(x)=0\\ \text{ou}\\ 2\cos^2(x)-1=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\sin(x)=0\\ \text{ou}\\ \cos^2(x)=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases}\sin(x)=0 \quad (*)\\ \text{ou}\\ \underbrace{\cos(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}}_{(**)} \text{ ou } \underbrace{\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{(***)}\end{cases}$

(!) $X^2=a$ avec $a>0$ a deux solutions : $X=\sqrt{a}$ et $X=-\sqrt{a}$.

$\underset{\text{ici } x\in]-\pi;\pi]}{\Longleftrightarrow} \underbrace{(x=0 \text{ ou } x=\pi)}_{\text{Solutions de } (*) \text{ dans }]-\pi;\pi]}$ ou $\underbrace{\left(x=\frac{\pi}{4} \text{ ou } x=-\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{Solutions de } (**) \text{ dans }]-\pi;\pi]}$ ou $\underbrace{\left(x=\frac{3\pi}{4} \text{ ou } x=-\frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{Solutions de } (***) \text{ dans }]-\pi;\pi]}$

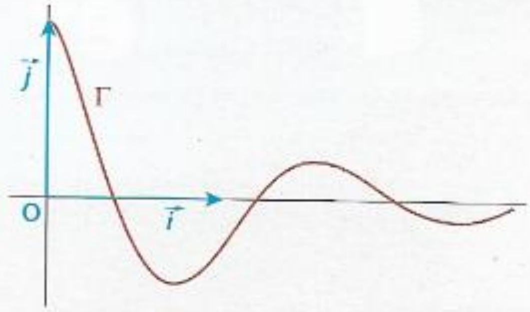
Solutions de $(*)$

$\mathcal{S}_{]-\pi;\pi]}=\left\{-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4};0;\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\pi\right\}$: l'équation proposée admet dans 6 solutions dans $]-\pi;\pi]$: l'affirmation est FAUSSE.

Exercice V

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé la courbe Γ représentative de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \cos(4x)$.



On considère également la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Démontrez que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Quels sont les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}$ et Γ ?

2. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison.

b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n) et étudiez sa convergence.

3. a) Démontrez que pour tout x de $[0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)].$$

b) Déduisez-en que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont la même tangente en chacun de leurs points communs.

4. Donnez une valeur approchée, à 10^{-1} près par excès, du coefficient directeur de la tangente T à Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Complétez le graphique en traçant T et $\mathscr{C}$.

$x \geq 0$ et $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$.

1a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$, donc comme $e^{-x} > 0$, en multipliant chacun des membres de la double inégalité $-1 \leq \cos(4x) \leq 1$ par e^{-x}, on a : $-e^{-x} \leq e^{-x}\cos(4x) \leq e^{-x}$

Donc $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ -e^{-x} \leq h(x) \leq e^{-x}}}$.

Or $e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, donc $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x}} = 0}}$ et de même $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0}}$.

Donc d'après le <u>théorème des gendarmes</u>, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

1b) $M(x\,;y) \in \mathcal{C} \cap \Gamma \iff \begin{cases} y = e^{-x} \\ y = e^{-x}\cos(4x) \end{cases} \implies e^{-x} = e^{-x}\cos(4x)$.

Or $e^{-x} = e^{-x}\cos(4x) \iff 1 = \cos(4x)$ (ici on a le droit de "simplifier par e^{-x} car $e^{-x} > 0$, donc $e^{-x} \neq 0$).

$\iff \cos(4x) = \cos(0)$ ← de la forme : $\cos(X) = \cos(A)$

$\iff \left| \begin{array}{l} 4x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = -0 + 2k\pi \end{array} \right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\iff x = \dfrac{2k\pi}{4} = \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ M_k\left(\frac{k\pi}{2}\,;\, e^{-\frac{k\pi}{2}}\right) \in \mathcal{C} \cap \Gamma}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (= ordonnée du point M_n).

a) $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $u_{n+1} = f\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) = e^{-(n+1)\frac{\pi}{2}} \times \cos\left(4(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$u_{n+1} = e^{-\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} \times \cos\left(4n \times \frac{\pi}{2} + 4 \times \frac{\pi}{2}\right)$

$u_{n+1} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \cos\left(4n \times \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$

$u_{n+1} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times \underbrace{e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \cos\left(4n \times \frac{\pi}{2}\right)}_{= f\left(\frac{n\pi}{2}\right) = u_n}$ car cos est 2π-périodique !

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \underset{\text{constante} > 0}{e^{-\frac{\pi}{2}}} \times u_n}$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc géométrique de raison } q = e^{-\frac{\pi}{2}}}$

b) $u_0 = f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1$: $\boxed{u_0 > 0}$

$q = e^{-\frac{\pi}{2}}$ est tel que $\boxed{0 < q < 1}$ car $-\frac{\pi}{2} < 0$ donc $e^{-\frac{\pi}{2}} < e^0$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

donc (cf. cours sur les suites géométriques), $\underline{(u_n) \text{ décroît}}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f\left(\frac{n\pi}{2}\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \cos\left(4 \times n \times \frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{n\pi}{2}} \times \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1} = \underbrace{e^{-\frac{n\pi}{2}}}_{>0}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc (u_n) est minorée par 0.

Par suite, (u_n) est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n\pi}{2} = +\infty$ et par la q.1), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

donc par limite de composée, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.

3a) $f(x) = e^{-x} \cos(4x) = u(x) v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = e^{-x} \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \cos(4x) \\ v'(x) = -4\sin(4x) \end{cases}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\boxed{f'(x)} = -e^{-x} \times \cos(4x) + e^{-x} \times (-4\sin(4x)) = \boxed{-e^{-x}\left(\cos(4x) - 4\sin(4x)\right)}$

3b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{n\pi}{2}$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$, $f'(x_n) = f'\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{n\pi}{2}}\left(\cos\left(4 \times \frac{n\pi}{2}\right) - 4\sin\left(4 \times \frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

$f'(x_n) = -e^{-\frac{n\pi}{2}}\left(\underbrace{\cos(2n\pi)}_{1 \text{ car } n \in \mathbb{N}} - 4\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0}\right)$

$\underline{f'(x_n)} = -e^{-\frac{n\pi}{2}}(1 - 4 \times 0) = -e^{-\frac{n\pi}{2}} = \underline{g'(x_n)}$

on rappelle que $\begin{cases} g(x) = e^{-x} \\ g'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

(*) Ainsi, $\mathcal{C}$ et Γ ont la même tangente en chacun de leurs points d'intersection d'abscisse respective $x_n = \frac{n\pi}{2}$ où $n \in \mathbb{N}$.

(Car deux droites qui passent par un même point et qui ont le même coefficient directeur sont confondues !).

4) Ce dernier vaut $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{q.3b)}{=} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

Or $-e^{-\frac{\pi}{2}} \approx -0{,}20787\ldots$, donc $\underline{f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0{,}2 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$.

Utiliser Geogebra pour le tracé.

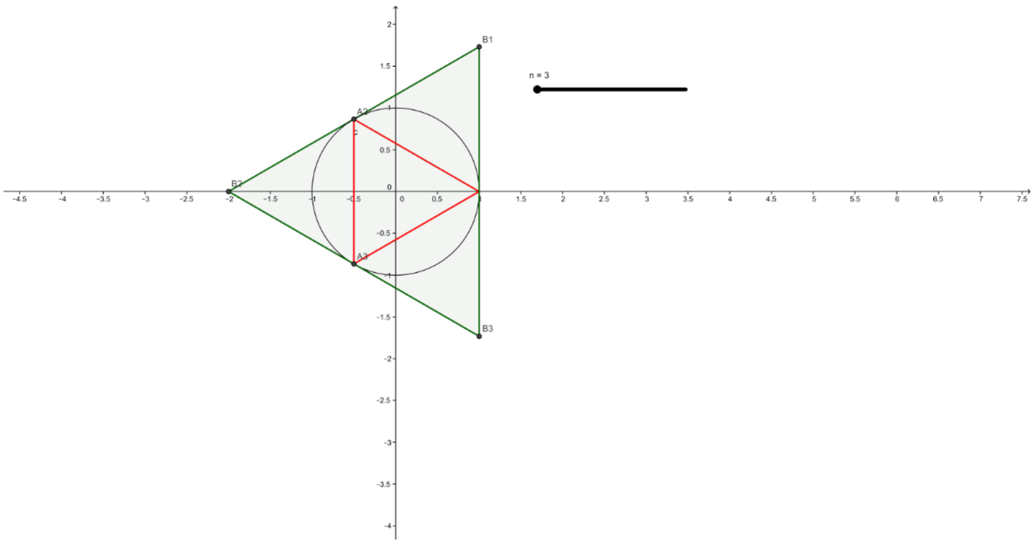
<u>Exercice </u> Who is π ?

On considère le cercle trigonométrique de centre O, dans lequel on *inscrit* un polygone régulier à n côtés (avec n entier supérieur ou égal à 3) de centre O. On notera $A_1A_2......A_n$ ce polygone qu'on identifie donc à la liste de ses sommets.

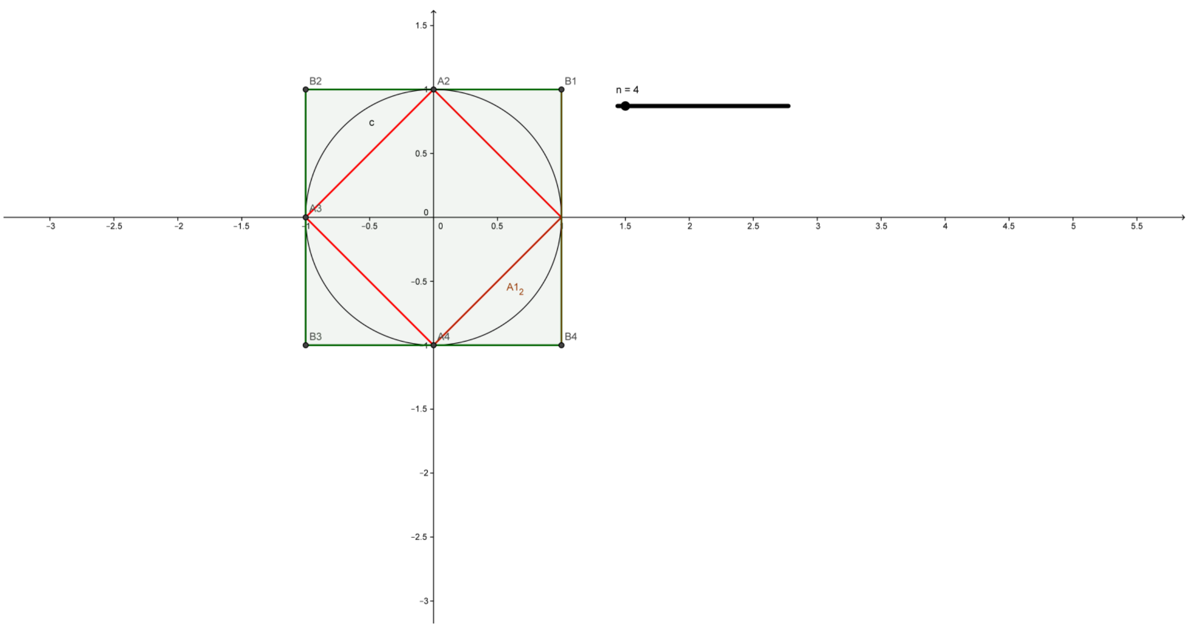
On considère le polygone régulier à n sommets *exinscrit* dans le cercle trigonométrique, noté $B_1B_2.....B_n$ où chacun des côtés de ce polygone est tangent au cercle trigonométrique en chacun des points A_i pour i compris entre 1 et n.

Voici une figure pour comprendre la situation :

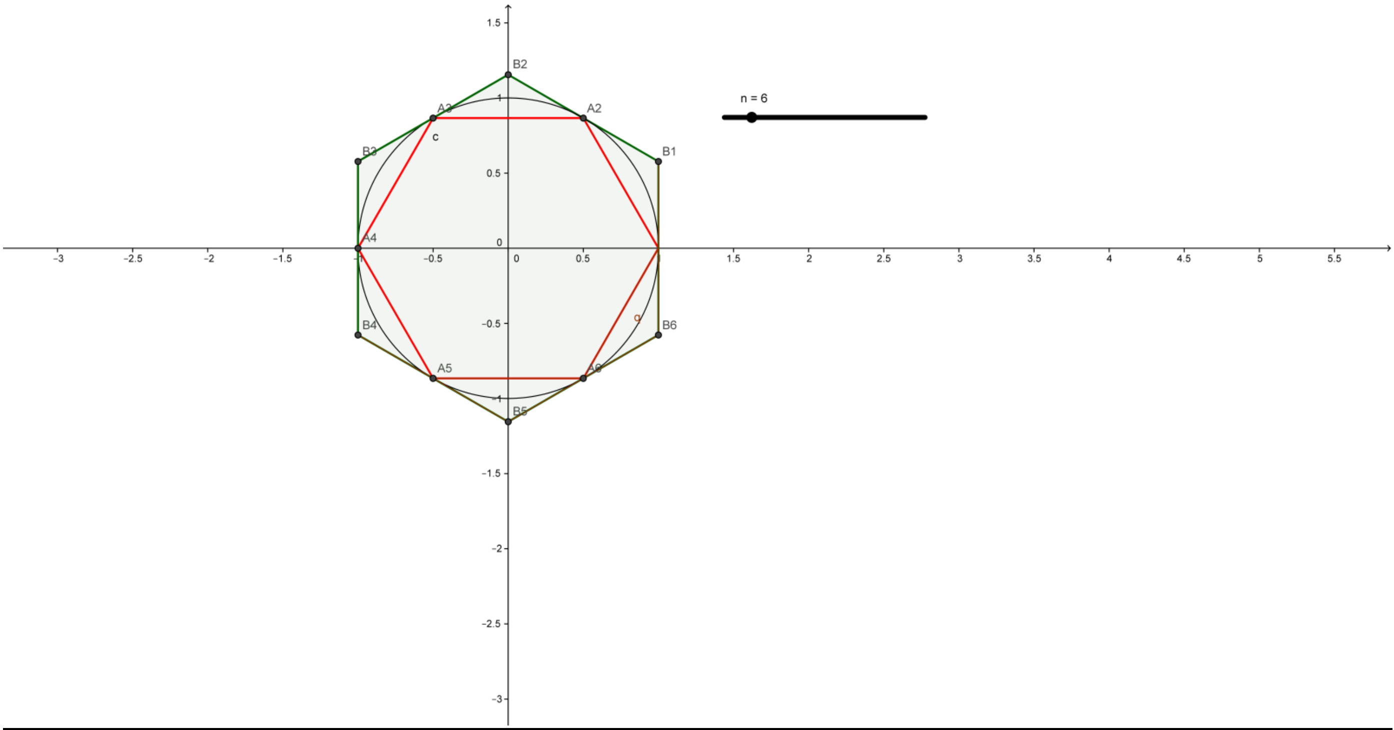
Lorsque *n* = 3 :



Lorsque *n* = 4 :



Lorsque *n* = 6 :



1a) Etablir avec soin que pour tout entier $n \geq 3$, le périmètre du polygone $A_1A_2......A_n$ que l'on notera u_n est donné par : $u_n = 2n \times sin(\frac{\pi}{n})$.

1b) Etablir que le périmètre du polygone $B_1B_2.....B_n$, noté v_n est donné par : $v_n = 2n \times tan(\frac{\pi}{n})$.

2a) Déterminer avec soin les limites des suites (u_n) et (v_n).

Indication *: Vérifier que u_n s'écrit sous la forme :* $u_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \times 2\pi$.

2b) En déduire le périmètre du cercle trigonométrique.

3) On se propose de donner quelques approximations de π.

a) Calculer les valeurs exactes de u_4 et v_4. En déduire une première approximation de π.

b) A l'aide des relations de *duplication*, calculer les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$, puis en déduire la valeur exacte de $tan(\frac{\pi}{8})$.

En déduire u_8 et v_8, puis une seconde approximation de π dont on donnera la précision en justifiant.

c) Pour $x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$, exprimer $cos(\frac{x}{2})$ en fonction de $cos(x)$, puis $sin(\frac{x}{2})$ en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$ *et* enfin $tan(\frac{x}{2})$ en fonction de $sin(x)$ et $cos(x)$.

d) Ecrire un algorithme qui, partant des valeurs exactes de A= $cos(\frac{\pi}{4})$ et B= $sin(\frac{\pi}{4})$, permet de calculer les valeurs exactes de $2^{p+2} \times sin(\frac{1}{2^p} \times \frac{\pi}{4})$ et $2^{p+2} \times tan(\frac{1}{2^p} \times \frac{\pi}{4})$ pour la valeur de l'entier *p* du choix de l'utilisateur. Quel est le rôle de cet algorithme ? Nécessite-t-il de connaître la valeur de π pour fonctionner ?

e) A l'aide de ce dernier, retrouver les valeurs de la question *3b)*, puis donner les valeurs approchées de $\frac{u_{130}}{2}$ et $\frac{v_{130}}{2}$ à 10^{-3} près. Quelle approximation de π obtient-on ? Et sa précision ?

f) A partir de quelle valeur de l'entier *n* peut-on considérer que $\frac{u_{2^n+2}}{2}$ et $\frac{v_{2^n+2}}{2}$ sont des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de π à 10^{-4} près ? Justifier votre démarche