<u>*Chapitre XIII*</u> <u>*Somme de variables aléatoires et loi des grands nombres*</u>

I-Rappels

Variable aléatoire discrète

Définir une **variable aléatoire discrète** X pour une expérience aléatoire d'univers Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

La **loi de probabilité de** X associe à chaque valeur prise par X une probabilité :

Valeur prise x_i	x_1	...	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

L'espérance mathématique (on dit simplement espérance) d'une variable aléatoire X correspond à ***la valeur moyenne*** prise par X si on répète l'expérience aléatoire associée à X un grand nombre de fois. On note $E(X)$ l'espérance de X.

Avec la loi de probabilité donnée par le tableau précédent, on a :

♥♥♥ $E(X) = p_1x_1 + \dots\dots + p_nx_n = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i$ ♥♥♥

Dans le cas d'un jeu d'argent, l'espérance correspond au ..gain moyen obtenu............

....

Un ***jeu*** est qualifié d'***équitable*** si l'***espérance*** de la variable aléatoire égale au gain du joueur est ***nulle***.

<u>*Définition*</u>

La variance de la variable aléatoire X, dont est donnée précédemment la loi de probabilité, est notée V(X), elle est définie par :

♥♥♥ $V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + \cdots \dots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$. ♥♥♥

En général, on calcule la variance puis l'écart-type noté $\sigma(X)$, où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

L'écart type est un indicateur de la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X autour de son espérance. En particulier, au plus l'écart-type est élevé, au plus les valeurs prises par X sont dispersées autour de E(X).

Si une variable aléatoire X est constante, combien vaut sa variance et son écart-type ?

↓ 0 ↓ 0

<u>Exemple</u>

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-2		0	3	4
$p(X = x_i)$	0,2		0,4	0,3	0,1

$E(X) = (-2) \times 0,2 + 0 \times 0,4 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,1$
$E(X) = 0,9$

$V(X) = 0,2(-2-0,9)^2 + 0,4(0-0,9)^2 + 0,3(3-0,9)^2 + 0,1(4-0,9)^2$
$V(X) = 4,29$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4,29}$

$\sigma(X) \approx 2,1$

II- Opérations algébriques sur les variables aléatoires

Exemple d'introduction :

Jeux de cartes en double

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis tire une seconde carte dans un autre jeu de 32 cartes.
On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe un gain de 2 € si la carte tirée est un as, un gain de 1 € si la carte tirée est une carte « habillée » (roi, dame, valet), et rien du tout dans les autres cas.
On note Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe un gain de 1 € si la carte tirée est un pique, et rien du tout dans les autres cas.
On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le gain total du joueur.
On peut noter cette variable : $Z = X + Y$.

1. Déterminer les valeurs prises par X, par Y et par Z.

2. Donner la loi de X et la loi de Y.

3. a. Exprimer l'événement $\{Z = 0\}$ en fonction des événements $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$.
b. En utilisant l'indépendance des deux épreuves, déterminer $P(Z = 0)$.
c. Calculer de la même façon $P(Z = 3)$.

4. a. Déterminer $P(Z = 1)$ en exprimant l'événement $\{Z = 1\}$ comme réunion de deux événements incompatibles.
b. En déduire $P(Z = 2)$, puis la loi de Z.

5. Calculer l'espérance et la variance des variables X, Y et Z. Que constate-t-on ?

1. $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

$Y(\Omega) = \{0; 1\}$

$Z(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

Loi de proba de X :

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

$X = 2$ ssi on pioche las

$X = 1$ ssi tirage de V, D ou R.

Donc $P(X=0) = 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Loi de proba de Y :

$Y = y_i$	0	1
$P(Y=y_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$Y = 1$ soit pioche 1 piques
↳ 8 cartes piques

3a) $\{Z=0\} = \{X=0\} \cap \{Y=0\}$

3b) $P(\{Z=0\}) = P(\{X=0\} \cap \{Y=0\})$

$P(\{Z=0\}) = P(\{X=0\}) \times P(\{Y=0\})$
↳ évnt indépendants

$P(\{Z=0\}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

3c) $\{Z=3\} = \{X=2\} \cap \{Y=1\}$

Par indépendance : $P(\{Z=3\}) = P(\{X=2\}) \times P(\{Y=1\})$

$P(\{Z=3\}) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

4a) $\{Z=1\} = (\{X=0\} \cap \{Y=1\}) \cup (\{X=1\} \cap \{Y=0\})$
↳ évnt incompatibles

Donc $P(\{Z=1\}) = P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) + P(\{X=1\} \cap \{Y=0\})$

$P(\{Z=1\}) = P(X=0) \times P(Y=1) + P(X=1) \times P(Y=0)$

$P(\{Z=1\}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$

$P(\{Z=1\}) = \frac{1}{8} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32}$

b) $P(Z=2) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=3))$ car $Z(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

$P(Z=2) = 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{13}{32} + \frac{1}{32}\right) = 1 - \frac{26}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

Loi de Z :

$(Z = z_i)$	0	1	2	3
$P(Z=z_i)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

3. $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$

$$V(X) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(2 - \frac{5}{8}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{25}{64} + \frac{3}{8} \times \frac{9}{64} + \frac{1}{8} \times \frac{121}{64}$$

$$V(X) = \frac{31}{64}$$

$$E(Y) = \frac{1}{4}$$

$$V(Y) = \frac{3}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$V(Y) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{3}{16}.$$

$$E(Z) = 1 \times \frac{13}{32} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{1}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}.$$

$$V(Z) = \frac{3}{8}\left(0 - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{13}{32}\left(1 - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{3}{16}\left(2 - \frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{32}\left(3 - \frac{7}{8}\right)^2$$

$$V(Z) = \frac{43}{64}$$

Constats : Concernant l'espérance de $Z = X + Y$:

$E(Z) = E(X) + E(Y)$ car $\frac{7}{8} = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}$

Concernant la variance de $Z = X + Y$:

$$V(X) + V(Y) = \frac{31}{64} + \frac{3}{16} = \frac{31}{64} + \frac{12}{64} = \frac{43}{64} = V(Z)$$

Donc $V(Z) = V(X) + V(Y)$.

III- Somme de variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire donnée.

On suppose que X a pour loi de probabilité :

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

On suppose que Y a pour loi de probabilités :

$Y = y_i$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
$P(Y = y_i)$	q_1	q_2	$\dots$	q_n

-La variable aléatoire somme de X et Y est la variable notée **X+Y** qui prend pour valeurs :

$(X+Y)(\Omega) = \{x_i + y_j \text{ avec } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m\}$

-La loi de probabilité de la variable aléatoire X +Y est :

Pour toute valeur s prise par X+Y, on a : $p(X+Y=s) = \sum_{x_i+y_j=s} p((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

On rappelle que deux épreuves aléatoires X et Y sont dites indépendantes l'une de l'autre, si l'issue obtenue lors de la première épreuve " n'influence pas " l'issue de la seconde.

Si x_i est une issue de X et y_j est une issue de Y, alors les événements : $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, et donc on a : $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

Donc ***lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes*** :

Pour toute valeur s prise par X+Y, on a :

$$p(X+Y=s) = \sum_{x_i+y_j=s} p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{x_i+y_j=s} p(X = x_i) \times p(Y = y_j).$$

Exemple

On dispose de deux urnes. L'une contient trois jetons numérotés 0, 2 et 4 et l'autre contient cinq jetons : trois portent le numéro 1 et deux portent le numéro 3.

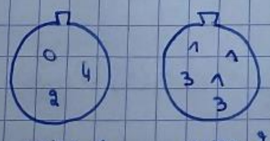
L'expérience aléatoire consiste ici à tirer un jeton de chaque urne, et à additionner les numéros obtenus.

S est la variable aléatoire qui donne le résultat obtenu.

a) Donner les lois de probabilité des deux variables aléatoires X et Y telles que : S = X +Y.
Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?

b) Donner la loi de probabilité de S.

c) Vérifier sur cet exemple que E(S) = E(X)+E(Y).



urne 1 urne 2

X = résultat lors du tirage de l'urne 1
Y = " 2

S = X + Y

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers d'une expérience aléatoire donnée.

On suppose que X a pour loi de probabilité : $X = x_i$ x_1 x_2 ... x_n

$P(X=x_i)$ p_1 p_2 ... p_n

Pour tout réel a non nul, on définit la variable aléatoire aX par :

aX prend pour valeurs : ax_1 ; ax_2 ; ... ; ax_n ;

La loi de probabilité de la variable aléatoire aX est : $aX = w_i$ ax_1 ax_2 ... ax_n

$P(aX=w_i)$ p_1 p_2 ... p_n

Exemple

Une entreprise fabrique des machines. X est la variable aléatoire, qui pour un mois donné, est égale au nombre de machines vendues au cours de ce mois. Voici la loi de probabilité de X :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0.04	0.08	0.12	0.28	0.25	0.17	0.06

La vente de chaque machine rapporte 5000€. Soit Y la variable aléatoire égale à la somme rapportée par la vente des machines au cours de ce mois. Donner la loi de Y.

$Y = 5000X$

Loi de Y :

$(Y=y_i)$	0	5000	10000	15000	20000	25000	30000
$P(Y=y_i)$	0,04	0,08	0,12	0,28	0,25	0,17	0,06

$E(X) = 3,37$

$E(Y) = 16850$

Rq : $E(Y) = 5000 \times E(X)$

♥♥♥***Propriété de linéarité de l'espérance*** (admise) ♥♥♥

Dans le cadre des définitions précédentes, pour toutes variables aléatoires X et Y et tous réels a et b :

-$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

-$E(aX) = a.E(X)$

-$E(aX+b) = a.E(X) + b$

-$E(aX+bY) = a.E(X) + b.E(Y)$

Remarques : les formules de linéarité de l'espérance vues précédemment s'étendent à un nombre quelconque de variables aléatoires.

En particulier, si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de n variables aléatoires, et $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on a :

♥♥ $E(S) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$. ♥♥

Que dire de l'espérance d'un variable aléatoire constante et égale à un réel b ? $E(x) = b$.

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers.

On donne : $E(X) = 3{,}1$ et $E(Y) = 1{,}8$.

Déterminer l'espérance des variables aléatoires suivantes : *a)* X+Y *b)* 7Y *c)* 2X + Y *d)* X − 5.

a) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}1 + 1{,}8 = 4{,}9$

↳ par linéarité de l'intégrale

b) $E(7Y) = 7E(Y) = 7 \times 1{,}8 = 12{,}6$

c) $E(2X+Y) = 2E(X) + E(Y) = 2\times 3{,}1 + 1{,}8 = 8$

d) $E(X-5) = E(X) - 5 = 3{,}1 - 5 = -1{,}9$.

Exercice 2

62 Une urne contient deux boules rouges et une boule jaune. On tire une boule de l'urne : le gain est de 10 € si la boule est rouge, 20 € si elle est jaune.

On réalise 10 tirages successifs avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au gain obtenu à l'issue des 10 tirages.

On se propose de déterminer E(X) de deux manières différentes.

1. Première méthode

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 10$, X_i est la variable aléatoire égale au gain lors du i-ième tirage.

a) Calculer $E(X_i)$ pour $1 \leq i \leq 10$.

b) Exprimer la variable aléatoire X en fonction des X_i et en déduire la valeur de E(X).

2. Deuxième méthode

Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules jaunes tirées.

a) Justifier que $X = 10Y + 100$.

b) Calculer E(Y).

c) En déduire la valeur de E(X).

X = gain obtenu à la fin des 10 tirages

1) M_1 : $(X_i)_{1\leq i\leq 10}$ avec : X_i = gain lors du $i^{ème}$ tirage.

a) Loi de proba de X_i :

$X_i = x_i$	10	20
$P(X_i = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Donc $E(X) = 10 \times \frac{2}{3} + 20 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$

b) $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$

Donc $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{40}{3} = 10 \times \frac{40}{3} = \frac{400}{3}$.

linéarité de l'intégrale

2) M_2 : Y = nb de boules jaunes tirées lors des 10 tirages

a) Donc on a pioché $10-Y$ boules rouges lors des 10 tirages.

Donc : $X = \underbrace{20Y}_{\text{gain lié aux boules jaunes piochées}} + \underbrace{10(10-Y)}_{\text{gain associé aux boules rouges tirées}}$

$X = 20Y + 100 - 10Y$

$X = 10Y + 100$

b) $Y \hookrightarrow B(10 ; \frac{1}{3})$ car pr cq tirage on a 1 chance sur 3 de piocher 1 boule jaune.

On répète 10 fois de façon indépendante (tirage avec remise) cette m̂ épreuve de Bernoulli (succès = jaune pioché).

Donc Y qui comptabilise le nb de succès obtenus lors de ces 10 répéti° suit la loi binomiale de paramètres $n = 1$ et $p = \frac{1}{3}$.

Donc $E(Y) = np = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

c) $X = 10Y + 100$

Donc $E(X) = E(10Y + 100) = 10E(Y) + 100 = 10 \times \frac{10}{3} + 100$

$E(X) = \frac{100}{3} + 100 = \frac{400}{3}$.

IV- Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

Si x_i est une issue de X et y_j est une issue de Y, alors les événements : $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, et donc on a : $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
↳ indépendants

Exemple

On lance successivement deux dés cubiques non truqués. X est la variable aléatoire donnant le numéro affiché par le premier dé, et Y est la variable aléatoire donnant le numéro affiché par le second dé.

X et Y sont bien évidemment indépendantes.

Calculer la valeur de : $p((X = 6) \cap (Y = 1))$. $= p(X=6) \times p(Y=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

♥♥♥ ***Propriété de la variance de variables aléatoires indépendantes*** (admise) ♥♥♥

Pour toutes variables aléatoires X et Y indépendantes et tous réels a :

-$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

-$V(aX) = a^2 V(X)$

Preuve de $V(aX) = a^2 V(X)$:

Loi de proba de X :

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

Loi de proba de aX :

$aX = \omega_i$	ax_1	ax_2	...	ax_n
$P(aX = \omega_i)$	p_1	p_2		p_n

$E(aX) = aE(X)$ car $E(aX) = ax_1p_1 + ax_2p_2 + \dots + ax_np_n$

$E(aX) = a(x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n) = aE(X)$

Donc $V(aX) = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i - E(aX))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i - aE(X))^2$

$= \sum_{i=1}^{n} p_i (a(x_i - E(X)))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \times a^2 (x_i - E(X))^2$

constante vis à vis de i

$V(aX) = a^2 \times \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$

$V(aX) = a^2 V(X)$

Conséquences : Dans le cadre de la propriété précédente, on a également :

Pour tout réel b :

$V(X+b) = V(X)$ car $E(X+b) = E(X) + b$ ...

$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$ car $V(aX+bY) = V(aX) + V(bY)$

Pour les écarts-types, on a seulement : $\sigma(aX) = |a| \times \sigma(X)$ car $\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)}$
$= \sqrt{a^2} \times \sqrt{V(X)} = |a| \times \sqrt{V(X)}$

En règle générale, même pour des variables aléatoires indépendantes, $\sigma(X+Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$.

Exercice 3

39 Émeline s'interroge sur la hauteur de précipitations pour un jour du mois de décembre dans sa ville. On représente cette hauteur, en mm, par la variable aléatoire X. Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	3	6	8	10
$P(X = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

a) Calculer l'espérance et la variance de X.

b) Pour comparer avec une amie anglaise, Émeline doit convertir les hauteurs en pouce.
Sachant que 1 cm vaut environ 0,4 pouce, calculer la variance de la hauteur de précipitations en pouce.

X = hauteur en mm de précipita° ...

a) $E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10} + 10 \times \frac{1}{15}$

$E(X) = \frac{5}{2} = 2,5$

$V(X) = 11,45$

b) 1 cm ⟷ 0,4 p
1 mm ⟷ 0,04 p

Y = hauteur en pouces de précipita° en dec

$Y = 0,04X$

Par propriété : $V(Y) = V(0,04X) = 0,04^2\,V(X)$ donc $V(Y) \approx 0,04^2 \times 11,45$

$V(Y) \approx 0,018$

V- Retour à la loi binomiale

Soit n un entier non nul et p un réel tel que : $0 < p < 1$.

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors :

♥♥♥ $E(X) = np$ ♥♥♥

♥♥♥ $V(X) = np(1-p)$ ♥♥♥ en proba on note svt : $q = 1-p$: $V(X) = npq$

♥♥♥ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ ♥♥♥

Preuve :

Pour tout entier i compris entre 1 et n :

X_i = variable aléatoire égale à : $\begin{cases} 1 \text{ si succès lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p :

Loi de X_i :

$X_i = x_i$	0	1
$p(X_i = x_i)$	$1-p$	p

Donc $E(X_i) = 0(1-p) + 1 \times p = p$

$V(X_i) = (1-p)(0-p)^2 + p(1-p)^2$

$V(X_i) = p^2(1-p) + p(1-p)^2$

$V(X_i) = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$

X = nb de succès lors des n répéti°...

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Donc $E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$

constante vis à vis de i

Exercice 4

41 On lance 200 fois une pièce équilibrée.
X est le nombre d'apparitions de Pile.

a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b) Expliquer pourquoi il serait fastidieux de donner la loi de probabilité sous forme de tableau.

c) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

d) Calculer la variance et l'écart-type de X.

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 200$ et $p = \frac{1}{2}$, car on répète 200x de façon indépendante la m épreuve de Bernoulli (le succès est ici : avoir pile).

b) X prend 201 valeurs (de $X = 0$ à $X = 200$).

Donc tableau à 201 colonnes + 200 calculs de $P(X = i)$.

c) $X \hookrightarrow B(200 ; \frac{1}{2})$

Donc $E(X) = np = 200 \times \frac{1}{2} = 100$.

Interprétaᵒ : En moyenne, on peut espérer obtenir 100 fois pile lors des 200 lancers.

d) Rappel : $X \hookrightarrow B(200 ; \frac{1}{2})$: $V(X) = np(1-p)$

Donc ici : $V(X) = 200 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 200 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$V(X) = 50$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

VI- Echantillon

Exemple

On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.
Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100})$ forment un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

Définition

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire définie sur l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire.

Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste de n variables aléatoires $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ indépendantes et identiques (on notera *iid*) qui suivent toutes cette même loi de probabilité.

Exemple

Matt travaille 5 jours dans la semaine, et chaque jour, indépendamment des autres, la probabilité d'aller travailler à vélo est égale à 0,8.

X est la variable aléatoire égale au nombre de jours de la semaine où Matt va travailler à vélo.

Quelle est la loi suivie par X ? $X \hookrightarrow B(5;0,8)$

En répétant cette expérience sur une période de 10 semaines, on obtient un échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10})$ de taille 10 de cette loi de probabilité.

Somme d'un échantillon, moyenne d'un échantillon

Définition

$(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_n)$ désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X. $\forall X_i$ 2 à 2 indép.

La somme de cet échantillon est la variable aléatoire notée S_n, avec : $\boxed{S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$.

La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire notée M_n, où : ♥♥♥ $\boxed{M_n = \frac{S_n}{n}}$. ♥♥♥

♥♥♥ ***Propriété de la somme et de la moyenne d'un échantillon*** ♥♥♥

S_n désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

$M_n = = \frac{S_n}{n}$ désigne la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$E(S_n) = nE(X)$ $\quad E(M_n) = E(X)$

$V(S_n) = nV(X)$ $\quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

$\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$ $\quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Preuve :

Exercice 5

49 Un producteur conditionne 40 mandarines par caisse. Les masses de mandarines, en gramme, sont réparties selon le tableau ci-dessous.

Masse	58	59	60	61	62
Fréquence	0,15	0,20	0,25	0,21	0,19

X est la variable aléatoire qui donne la masse d'une mandarine prise au hasard dans le stock.
La quantité produite est assez grande pour considérer qu'une caisse de 40 est un échantillon de taille 40 de la loi de probabilité de X.

a) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

b) En déduire l'espérance, la variance et l'écart-type de la moyenne M_{40}.

a) $E(X) \approx 60g$

$V(X) \approx 1,76$

$\sigma(X) \approx 1,33$

b) $M_{40} = \frac{\sum_{i=1}^{40} X_i}{40}$ où X_i = variable aléatoire donnant la masse de la $i^{ème}$ mandarine

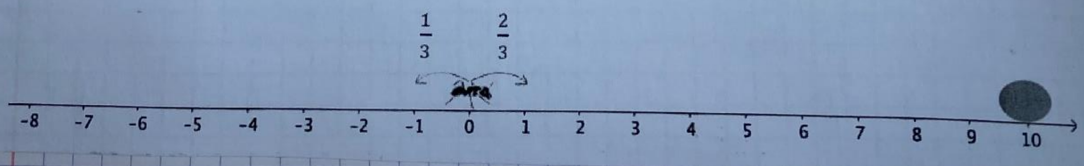
$E(M_{40}) = E(X) = 60$

$V(M_{40}) = \frac{V(X)}{40} \approx \frac{1,76}{40} \approx 0,05$

$\sigma(M_{40}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{40}} \approx \frac{1,33}{\sqrt{40}} \approx 0,22$

Exercice 6

Sur un axe gradué, on dépose une petite goûte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10.
Pierrot invite Sophie la fourmi à se placer à l'origine de l'axe gradué.
Attirée par la confiture, Sophie se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.
On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au k-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.
On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme des X_k.



1) Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$
2) En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
3) Au bout de combien de déplacements, Sophie peut-elle espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

1)

$(X_k = \alpha)$	-1	1
$P(X_k = \alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

loi de proba de X_k.

donc $E(X_k) = -1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$V(X_k) = \frac{1}{3}\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2$

$V(X_k) = \frac{1}{3} \times \frac{16}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$.

2) $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

Donc $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

Par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$

avec $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$, $E(X_k) = \frac{1}{3}$.

Donc $E(S_n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$.

$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

Or $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont 2 à 2 indépendantes, donc :

$V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$ avec $\forall k \in [\![1 ; n]\!]$, $V(X_k) = \frac{8}{9}$.

$V(S_n) = \underbrace{\frac{8}{9} + \frac{8}{9} + \dots + \frac{8}{9}}_{n \text{ termes}} = \frac{8n}{9}$

3) On veut que $E(S_n) = 10$

Or $E(S_n) = \frac{n}{3}$, donc $\frac{n}{3} = 10$, donc $n = 30$.

En moyenne, il faudrait théoriquement 30 déplacements de la fourmi pr atteindre la confiture.

Vu que $n = 30$,

$\sigma(S_{30}) = \sqrt{V(S_{30})}$

$\sigma(S_{30}) = \sqrt{\frac{8 \times 30}{9}}$

$\sigma(S_{30}) \simeq 5,2$.

Exercice 7

– après Bac, Métropole 2019

Un laboratoire pharmaceutique mène des études sur la vaccination contre la grippe dans une ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, on admet que ce choix se ramène à n tirages successifs avec remise.

On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée. *Arrondir au centième.*

c) Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de personnes vaccinées parmi les 40 personnes interrogées. *Arrondir au centième si besoin.*

2. Le laboratoire effectue n fois cette étude, sans enregistrer les noms des habitants interrogés.

M_n est la moyenne du nombre de personnes vaccinées sur ces n sondages.

a) Préciser l'espérance de M_n, puis exprimer l'écart-type de M_n en fonction de n.

b) Quelle est la valeur minimum de n telle que l'écart-type de M_n soit inférieur à 0,5 ?

1. a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 40$ et $p = \frac{40}{100} = 0,4$

car interroger une pers de la ville et regarder si elle est vaccinée ou pas est une épreuve de Bernoulli de succès : être vacciné donc $p = \frac{40}{100} = 0,4$.

On répète 40 fois de façon indépendante cette épreuve.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40 ; 0,4)$.

b) On cherche ici la valeur de :

$P(X \geqslant 20) = \sum_{k=20}^{40} P(X = k)$

Or $P(X \geqslant 20) = 1 - P(X < 20)$

$P(X \geqslant 20) = 1 - P(X \leqslant 19)$ car X entier

Or $P(X \leqslant 19) = \text{binomFrep}(40, 0,4, 18)$

$P(X \geqslant 20) = 1 - \text{binomFrep}(40, 0,4, 19)$

$P(X \geqslant 20) \simeq 0,13$

c) $X \hookrightarrow B(n;p)$ avec $n = 40$ et $p = 0,4$.

Donc $E(X) = np = 40 \times 0,4 = 16$.

En moyenne on peut s'attendre à avoir 16 vaccinés sur les 40 pers interrogées.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$

$\sigma(X) = \sqrt{40 \times 0,4 \times (1-0,4)} = \sqrt{40 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{9,6}$

$\sigma(X) \approx 3,1$

2\. On effectue n sondages (de 40 personnes à g fois).

M_n = moyenne du nb de pers vaccinées sur n sondages.

a) Soit X_1 le nb de pers vaccinées lors du 1er sondage
X_2 " " 2e sondage
⋮
X_n " " $n^{ème}$ sondage

$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow B(40;0,4)$

Donc $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Donc $E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)$

$E(M_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}(\underbrace{E(X_1)}_{=16} + E(X_2) + \dots + \underbrace{E(X_n)}_{=16})$

linéarité esp

$E(M_n) = \frac{1}{n}(16 + 16 + 16 + \dots + 16)$

$E(M_n) = \frac{16n}{n} = 16$

$\sigma(aX) = |a| \times \sigma(X)$, ici $a = \frac{1}{n} > 0$ donc $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$.

De m̂ : $\sigma(M_n) = \sigma\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$\sigma(M_n) = \frac{1}{n} \times \sqrt{V(X_1 + \dots + X_n)}$

$\sigma(M_n) = \frac{1}{n} \times \sqrt{nV(X)}$ car $X_1, X_2, \dots, X_n$ ont m̂ loi que X.

$\sigma(X_n) = \frac{1}{n} \times \sqrt{n} \times \sqrt{V(X)}$

$\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sigma(X)$

$\sigma(M_n) \approx \frac{3,1}{\sqrt{n}}$

b) $\sigma(M_n) \leq 0,5$

$\frac{3,1}{\sqrt{n}} \leq 0,5$

$3,1 \leq 0,5\sqrt{n}$

$\frac{3,1}{0,5} \leq \sqrt{n}$

$\sqrt{n} \geq 6,2$ donc $(\sqrt{n})^2 \geq 6,2^2$

$n \geq 38,44$

La valeur minimale de l'entier n est 39.

Exercice 8

Un dé cubique est non truqué et ses faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro obtenu lors du lancer du dé.

1) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

2) M_{10} est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 10 de la loi de probabilité de X.

a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de M_{10}.

b) Même questions avec un échantillon M_{100} de taille 100, puis M_{1000} de taille 1000.

Pour tout entier n non nul, on note M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité de X.

c) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'espérance de M_n puis celle de l'écart-type de M_n.

En quoi ces résultats sont-ils rassurants et conformes à notre intuition ?

X = nb obtenu lors du lancer

1) Loi de X

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

car dé non truqué

$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5.$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{6}\left[(1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + (3-3,5)^2 + (4-3,5)^2 + (5-3,5)^2 + (6-3,5)^2\right]}$

$\sigma(X) \approx 1,7$

2) a) $M_{10} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}}{10}$ où cq X_i suit la m̂ loi de proba que X.

$E(M_{10}) = E(X) = 3,5.$

$\sigma(M_{10}) = \frac{1}{\sqrt{10}}\sigma(X) \approx \frac{1,7}{\sqrt{10}} \approx 0,54$

b) $M_{100} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}}{100}$

$E(M_{100}) = E(X) = 3,5$ et $\sigma(M_{100}) = \frac{1}{\sqrt{100}} \times \sigma(X)$

$\sigma(M_{100}) \approx \frac{1}{10} \times 1,7 \approx 0,17$

et $\sigma(M_{1000}) \approx \frac{1}{\sqrt{1000}} \times 1,7 \approx 0,053.$

c) $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

$E(M_n) = 3,5$: donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(M_n) = 3,5.$

$\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sigma(X)$

↳ constante vis à vis de n

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc par produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(M_n) = 0.$

VII- Inégalités célèbres en probabilités

A- Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

> Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, et de variance $V(X)$.
>
> Pour tout réel δ strictement positif, on a : ♥♥♥ $p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$. ♥♥♥

↳ la proba que l'écart entre X et $E(X)$ soit au min = à δ et inférieure ou = à $\frac{V(X)}{\delta^2}$.

Preuve possible *: exercice 23 page 496 du livre.*

Bienaymé et Tchebychev

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821–1894), le plus célèbre mathématicien russe du XIX[e] siècle, ne se prénommait pas Bienaymé comme le pensent parfois certains étudiants. Si les noms de ces deux mathématiciens sont associés pour désigner une célèbre inégalité, ce n'est pas un hasard.
Irénée-Jules Bienaymé (1796–1878) était un respectable inspecteur des finances lorsqu'il fut exclu de son poste en 1848 pour « *manque de chaleur républicaine* ». Il se tourne alors vers une brillante carrière de mathématicien qui le conduira à l'Académie des sciences.
Il fait la connaissance de Tchebychev en octobre 1852 et une forte amitié s'installe entre les deux hommes. Le mathématicien russe séjourne plusieurs fois chez le savant français et celui-ci, féru de langue russe, traduit les écrits de son ami, ce qui permet à celui-ci de diffuser ses recherches.
Dans le cadre d'un article pour défendre la méthode des moindres carrés de Laplace face aux critiques de Denis Poisson, Bienaymé énonce et démontre, en 1853, l'inégalité qui porte leurs deux noms. Tchebychev se rend compte de l'importance de ce résultat passé inaperçue par son ami français. Il la publie et l'utilise pour démontrer la loi des grands nombres dans un cadre général. La notoriété du Russe la fait connaître mais la véritable inégalité est sans doute qu'elle ne porte que le nom de Tchebychev, excepté dans la littérature française.

Exemple

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$.

1) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.

2) Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$, puis $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?

$X \hookrightarrow B(20\,;0,1)$

$E(X) = np = 20 \times 0,1 = 2$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20 \times 0,1 \times 0,9} = \sqrt{1,8}$

Soit $\delta = 2\sigma(X) = 2\sqrt{1,8}$:

L'inégalité de BT dit que :

$P(|X - E(X)| \geq 2\sqrt{1,8}) \leq \frac{1,8}{(2\sqrt{1,8})^2}$

$P(|X - E(X)| \geq 2\sqrt{1,8}) \leq \frac{1,8}{4 \times 1,8} = \frac{1}{4}$.

La proba que l'écart entre X et E(X) soit au − égal à 2σ est inférieure à $\frac{1}{4}$.

2) $P(|X-E(X)| \geq 3\sqrt{1,8}) \leq \frac{V(X)}{(3\sigma(X))^2} = \frac{1}{9}$

car $(\sigma(X))^2 = V(X)$
$(3\sigma(X))^2 = 9V(X)$

$P(|X-E(X)| \geq 4\sqrt{1,8}) \leq \frac{V(X)}{(4\sigma(X))^2} = \frac{1}{16}$

Constat : qd δ ↗, la proba... ↘.

<u>Remarque</u> : cette inégalité est loin d'être optimale.

B- *<u>Inégalité de concentration</u>*

S_n désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ où chaque variable aléatoire X_i sont identiques et indépendantes et suivent la même loi de probabilité que X.

$M_n = = \frac{S_n}{n}$ désigne la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

> Pour tout réel δ strictement positif, on a : ♥♥♥$p(|Mn - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$. ♥♥♥***(appelée inégalité de concentration).***

<u>Preuve</u> **:** déduction de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire M_n, en se souvenant que : $E(M_n)=E(X)$ et $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$.

$M_n = \frac{S_n}{n}$

Appliquons l'I-B-T à la variable aléatoire M_n :

$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$

$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{\frac{1}{n}V(X)}{\delta^2}$

$P(|M_n - E(X) \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$

<u>Exemple d'utilisation</u>(important)

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle]0,03 ; 0,37[soit supérieure à 0,95.
n_{min}

X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2 signifie que :

$(X = x_i)$	0	1
$p(X = x_i)$	0,8	0,2

$E(X) = 0,2$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ indép et suivent la m̂ loi que X.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Astuce : Le centre de $]0,03 ; 0,37[$ est : $\dfrac{0,03 + 0,37}{2} = 0,2 = E(X)$.

On va appliquer l'inégalité de concentra° à la v.a. M_n.

Or $M_n \in]0,03 ; 0,37[\iff 0,03 < M_n < 0,37$

Donc $0,03 - E(X) < M_n - E(X) < 0,37 - E(X)$

$0,03 - 0,2 < M_n - E(X) < 0,37 - 0,2$

$-0,17 < M_n - E(X) < 0,17$

Donc $|M_n - E(X)| < 0,17$.

Donc on cherche n tq :

$p(|M_n - E(X)| < 0,17) \geqslant 0,95$

Donc $1 - p(|M_n - E(X)| \geqslant 0,17) \geqslant 0,95$

$1 - 0,95 \geqslant p(|M_n - E(X)| \geqslant 0,17)$

$p(|M_n - E(X)| \geqslant 0,17) \leqslant 0,05$

Or d'après l'inégalité de concentra° : $\forall \delta > 0$,

$p(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2}$

Prenons $\delta = 0,17$: rappel : $V(X) = 0,16$.

Donc : $p(|M_n - E(X)| \geqslant 0,17) \leqslant \dfrac{0,16}{n \times 0,17^2}$

Il suffit donc de trouver n tq :

$\dfrac{0,16}{n \times 0,17^2} \leqslant 0,05$

$0,16 \leqslant 0,05 \times n \times 0,17^2$ (car positif)

$n \geq \frac{0,16}{0,05 \times 0,17^2}$ avec $\frac{0,16}{0,05 \times 0,17^2} \simeq 110,7$

Or n est entier, donc $n \geq 111$.

C- Loi faible des grands nombres

S_n désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

$M_n = = \frac{S_n}{n}$ désigne la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel δ strictement positif, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} p(|Mn - E(X)| \geq \delta) = 0$.

Justification et interprétation :

Soit $\delta > 0$: d'après l'inégalité de concentra° appliquée à M_n, on a :

$$p(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par produit ($V(X)$: constante et $\delta > 0$)

$$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{V(X)}{n\delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0.$$

Or $0 \leq p(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$

D'après le th. des gendarmes :

$$\lim\limits_{n \to +\infty} p(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0 \quad \text{où } \delta > 0.$$

La loi des grands nombres dit qu'au plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, au plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de X se rapproche de 0.

Exercice 9

Soit une variable aléatoire X d'espérance 3 et de variance 0,2.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
1) Déterminer un majorant de $P(|M_n - 3| \geq 0{,}1)$ pour $n = 100$, pour $n = 1000$, puis pour $n = 10\,000$. Que constate-t-on ?
2) Démontrer et interpréter le résultat précédent.

$E(X) = 3$
$V(X) = 0{,}2$

$Mn = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ où cq X_i suit la m̄ loi que X.

Rappel : $E(Mn) = E(X) = 3$
$V(Mn) = \frac{V(X)}{n} = \frac{0{,}2}{n}$

1) L'inégalité de concentra° dit que :

$\forall\, \delta > 0,\ p(|Mn - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$

Ici on prend : $\delta = 0{,}1$ et $n = 100$: donc : $p(|M_{100} - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{0{,}2}{100 \times 0{,}1^2} = 0{,}2$

De m̄ : si $\delta = 0{,}1$ et $n = 1000$: $p(|M_{1000} - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{0{,}2}{1000 \times 0{,}1^2} = 0{,}02$

si $\delta = 0{,}1$ et $n = 10000$: $p(|M_{10000} - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{0{,}2}{10000 \times 0{,}1^2} = 0{,}002$.

Constat : Au + n ↗, au + la quantité majorante est proche de 0 !

2) Conséquence de la loi des grands nb !

Exercice 10

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.
On considère que :

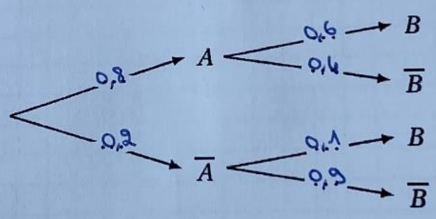
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.

5. On souhaite déterminer la variance de X.

a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.

b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.

c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.
Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.
Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.
On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.

3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.

2. Soit n un nombre entier strictement positif.

Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.

On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

a. Quelle est l'espérance de M_n ?

b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?

c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6,3 \leqslant M_n \leqslant 8,3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

Partie I

2. On cherche ici la valeur de $p(A \cap B)$:

Or $p(A\cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$

3. On cherche ici la valeur $p(B)$:

D'après la formule des proba totales :

$p(B) = p(A\cap B) + p(\bar{A}\cap B)$

$p(B) = 0,48 + 0,2 \times 0,1 = 0,48 + 0,02 = 0,5.$

4. Loi de proba de X_1 :

$(X_1 = x_i)$	0	1
$P(X_1 = x_i)$	0,2	0,8

Donc $E(X_1) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,8$

$E(X_1) = 0,8$

Loi de proba de X_2 :

$(X_2 = x_i)$	0	1
$P(X_2 = x_i)$	0,5	0,5

$E(X_2) = 0,5$

Or $X = X_1 + X_2$

Donc $E(X) = E(X_1 + X_2)$

Par linéarité de l'espérance : $E(X) = E(X_1) + E(X_2)$

$E(X) = 0,8 + 0,5 = 1,3$

En moyenne le candidat peut espérer avoir 1,3 sur 2 à l'ex 1.

5. a. $P(X=0) = P(X_1 + X_2 = 0)$ et $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

$P(X=0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ *

* si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ et si $a+b=0$ alors $a=b=0$.

$P(X=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

$P(X=0) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$

$P(X=2) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = p(A\cap B) = 0,48$

ĉ $X=0$, ou $X=1$ ou $X=2$: on a $P(X=1) = 1 - (P(X=0) + P(X=2))$

$= 1 - (0,18 + 0,48) = 1 - 0,66 = 0,34$

D'où la loi de X :

$(X = x_i)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,18	0,34	0,48

b. $V(X) = 0,18\,(0-1,3)^2 + 0,34\,(1-1,3)^2 + 0,48\,(2-1,3)^2$ $\quad (E(X) = 1,3)$

$V(X) = 0,18 \times 1,69 + 0,34 \times 0,09 + 0,48 \times 0,49$

$V(X) = 0,57$

c. $V(X) = 0,57$

$V(X_1) = 0,2(0-0,8)^2 + 0,8(1-0,8)^2 = 0,16$

$V(X_2) = 0,5(0-0,5)^2 + 0,5(1-0,5)^2 = 0,25$

Donc $V(X_1) + V(X_2) = 0,16 + 0,25 = 0,41$

$0,41 \neq 0,57$, donc $V(X) \neq V(X_1) + V(X_2)$.

Pas surprenant car X_1 et X_2 non indépendantes !

Partie II

1. Y = note du candidat à l'exo (8 q. indép)

Pr cq q° : répondre est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{4}$.

On répète 8 fois de façon indépendante cette m̂ épreuve de Bernoulli.

Donc Y qui est égale au nb de succès obtenus lors de ces 8 répéti°

suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètres : $n = 8$ et $p = \frac{3}{4}$.

2. $P(Y=8) = \binom{8}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{8-8}$

$P(Y=8) = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \left(\frac{3}{4}\right)^8$

3. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(8 ; \frac{3}{4}\right)$ et $E(Y) = np$

$E(Y) = 8 \times \frac{3}{4} = 6$

$V(Y) = np(1-p) = 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

a) Loi de X :

$X = x_i$	0	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) = 2$

Loi de Y :

$Y = y_i$	1	3
$P(Y = y_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$E(Y) = 1,8$

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

b) Valeurs prises par S où $S = X + Y$:

Y \ X	0	2	4
1	1	3	5
3	3	5	7

$S(\Omega) = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$

Loi de S : $P(S = 1) = P((X = 0) \cap (Y = 1))$

$P(S = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

$P(S = 7) = P((X = 4) \cap (Y = 3)) = P(X = 4) \times P(Y = 3)$

$P(S = 7) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

$P(S = 3) = P(((X = 2) \cap (Y = 1)) \cup ((X = 0) \cap (Y = 3)))$

Donc $P(S = 3) = P((X = 2) \cap (Y = 1)) + P((X = 0) \cap (Y = 3))$

$P(S = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

$P(S = 5) = 1 - (P(S = 1) + P(S = 3) + P(S = 7))$

$P(S = 5) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\right)$

$P(S = 5) = 1 - \frac{10}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

D'où la loi de S :

$(S = s_i)$	1	3	5	7
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$

$E(S) = 3,8$

$\sigma(S) \approx 1,90$

donc $V(S) \approx \sigma(S)^2 \approx 1,9^2$

Donc $E(S) = E(X) + E(Y)$ car $3,8 = 2 + 1,8$

Partie III

1. $Z = X + Y$ avec $X \perp Y$

$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(Z) = 1,3 + 6 = 7,3$

$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 0,57 + 1,5 = 2,07$

2. a. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ suivent la m̂ loi de Z

$M_n = \dfrac{Z_1 + \dots + Z_n}{n}$

$E(M_n) = E(Z) = 7,3$

b. $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(Z)}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{V(Z)}}{\sqrt{n}}$

Or $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{2,07}$

Donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\dfrac{2,07}{n}}$

Par suite : $\sigma(M_n) \leq 0,5 \iff \sqrt{\dfrac{2,07}{n}} \leq 0,5 \iff \dfrac{2,07}{n} \leq 0,5^2$

$\sigma(M_n) \leq 0,5 \iff 2,07 \leq 0,25n$ car $n > 0$.

Donc $\dfrac{2,07}{0,25} \leq n$

$n \geq 8,28$ et n entier donc $n \geq 9$

c. On suppose que $n \geq 9$:

Mq $P(6,3 \leq M_n \leq 8,3) \geq 0,75$ dès que $n \geq 9$

Or : $6,3 \leq M_n \leq 8,3$

On centre : $6,3 - E(M_n) \leq M_n - E(M_n) \leq 8,3 - E(M_n)$ avec $E(M_n) = 7,3$

$6,3 - 7,3 \leq M_n - 7,3 \leq 8,3 - 7,3$

$-1 \leq M_n - 7,3 \leq 1$

Ceci équivaut à : $|M_n - 7,3| \leq 1$

Or $P(|M_n - 7{,}3| \leq 1) = 1 - P(|M_n - 7{,}3| > 1)$

Rappel inégalité de concentra° : $\forall \delta > 0,\ P(|M_n - 7{,}3| \geq \delta) \leq \dfrac{Var(M_n)}{\delta^2}$

$\forall \delta > 0,\ P(|M_n - 7{,}3| \geq \delta) \leq \dfrac{2{,}07}{n\delta^2} \leq \dfrac{2{,}07}{9\delta^2}$

car $n \geq 9$ donc $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{9}$

On choisis $\delta = 1$:

$$P(|M_n - 7{,}3| \geq 1) \leq \frac{2{,}07}{9 \times 1^2} = 0{,}23$$

Donc : $1 - P(|M_n - 7{,}3| < 1) \leq 0{,}23$

$\underbrace{1 - 0{,}23}_{0{,}77} \leq P(|M_n - 7{,}3| < 1)$

Donc $P(6{,}3 < M_n < 7{,}3) \geq 0{,}77 > 0{,}75$