

« Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition. » Laurent Schwartz

Chapitre XII

Calcul intégral

I - Idée intuitive de la notion d'aire plane

a) Généralités

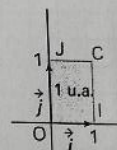
Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire :

- le plan, noté $\mathcal{P}$, est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
- f désignant une fonction, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
- a et b sont deux réels tels que a est inférieur ou égal à b .

Définition 1

On considère qu'une unité de longueur a été choisie pour le calcul des normes.

On appelle **unité d'aire**, que l'on note u.a., l'unité de mesure des aires telle que : $1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$, c'est-à-dire l'aire du rectangle OICJ où I, J et C sont les points définis par : $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OC} = \vec{i} + \vec{j}$.



On sait calculer l'aire de parties du plan telles que les rectangles, les triangles, les disques....

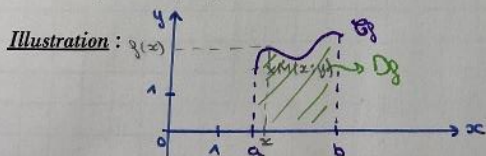
Nous allons apprendre à calculer l'aire de nouvelles parties du plan, c'est l'un des objectifs du calcul intégral.

Définition

Soit f une fonction définie, **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.

Notons D_f le domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$.

On a : $D_f = \{M(x; y) \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.



On dit que D_f est le **domaine situé sous la courbe** représentant f .

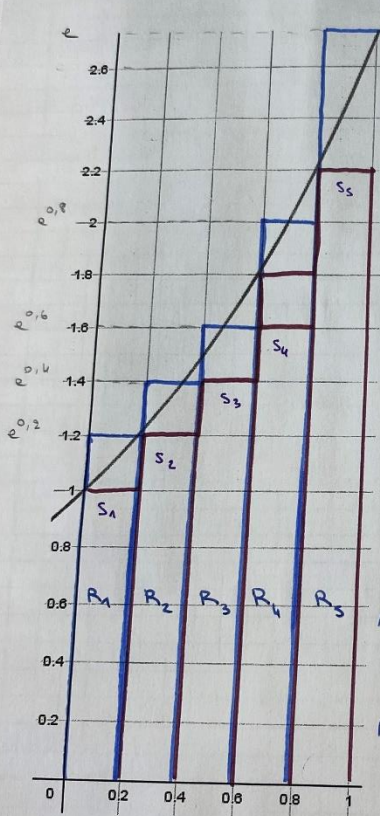
Propriété admise

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, alors le domaine D_f décrit précédemment admet une aire.

Ce résultat d'apparence anodine est délicat à prouver. On va apprendre à calculer l'aire d'un tel domaine.

À titre d'exemple, essayons de calculer l'aire d'un tel domaine : on va par exemple décomposer ce domaine en rectangles, dont on sait facilement calculer les aires.

À l'aide du dessin ci-dessous, proposer, après avoir hachuré D_f , un premier encadrement de l'aire de D_f où $D_f = \{M(x; y) / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$, où $f(x) = e^x$. Utiliser 5 rectangles.



Ex où $g(x) = e^x$

$$A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) + A(R_5) \leq A(D_g)$$

→ chacun des rectangles a pr largeur : $\frac{1}{5} = 0,2$.

$$A(R_1) = 0,2 \times e^0 = 0,2$$

$$A(R_2) = 0,2 \times e^{0,2}$$

$$A(R_3) = 0,2 \times e^{0,4}$$

$$A(R_4) = 0,2 \times e^{0,6}$$

$$A(R_5) = 0,2 \times e^{0,8}$$

$$\text{Donc } 0,2 + 0,2e^{0,2} + 0,2e^{0,4} + 0,2e^{0,6} + 0,2e^{0,8} \leq A(D_g)$$

$$0,2(1 + e^{0,2} + e^{0,4} + e^{0,6} + e^{0,8}) \leq A(D_g)$$

$$\approx 1,55 \leq A(D_g)$$

$$\text{De m : } A(D_g) \leq \sum_{i=1}^5 A(S_i) \text{ avec } A(S_1) = 0,2 \times e^{0,2}$$

$$A(S_2) = 0,2 \times e^{0,4}$$

$$A(S_3) = 0,2e^{0,6}$$

$$A(S_4) = 0,2e^{0,8}$$

$$A(S_5) = 0,2e$$

$$A(D_g) \leq 0,2(e^{0,2} + e^{0,4} + e^{0,6} + e^{0,8} + e)$$

$$\approx 1,90$$

$$\text{Ainsi : } 1,55 \leq A(D_g) \leq 1,90$$

Pour affiner le précédent encadrement, on va partager le domaine en des rectangles de largeur plus petite.

Soit n un entier naturel non nul fixé.

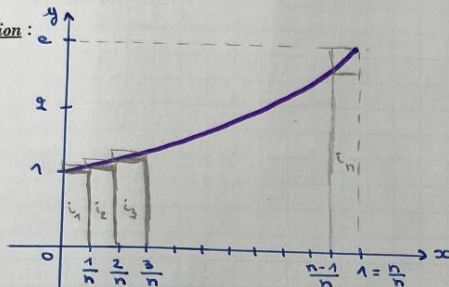
On subdivise l'intervalle $[0; 1]$ en n petits segments de même longueur égale à $\frac{1}{n}$.

Encadrons l'aire de D_f par deux suites (i_n) et (s_n) que l'on va définir :

i_n = somme des aires des n rectangles situés en-dessous de C_f = $\frac{1}{n} \times e^0 + \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{n} \times e^{\frac{n-1}{n}}$

s_n = somme des aires des n rectangles situés au-dessus de C_f = $\frac{1}{n} \times (e^0 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}) + \frac{1}{n} \times e^1$

Illustration :



$$i_n = \frac{1}{n} \times e^0 + \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}} + \dots + \frac{1}{n} \times e^{\frac{n-1}{n}}$$

$$s_n = \frac{1}{n} (e^0 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}) + \frac{1}{n} \times e^1$$

$$\text{Rq: } i_n = \frac{1}{n} (1 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}})$$

$$s_n = \frac{1}{n} (e^0 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} + e^1)$$

$$\text{Donc } s_n = i_n + \frac{e - 1}{n}$$

$$s_n = i_n + \frac{e - 1}{n}$$

Déterminer les limites des deux suites (i_n) et (s_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$$i_n = \frac{1}{n} (e^0 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}})$$

$$i_n = \frac{1}{n} ((e^{\frac{1}{n}})^0 + (e^{\frac{1}{n}})^1 + \dots + (e^{\frac{1}{n}})^{n-1})$$

↳ somme des termes d'une suite géo de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$ ($\neq 1$ car $\frac{1}{n} \neq 0$)

↳ Rappel : Si $q \neq 1$: $S = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1}$

$$S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$i_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 - (e^{\frac{1}{n}})^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \times \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$i_n = (1 - e) \times \frac{1}{n - e^{\frac{1}{n}}}$$

Cherchons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$. Or $\frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} = \frac{-1}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}$

Poseons $x = \frac{1}{n}$: $n \rightarrow +\infty$: $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} = -1.$

Enfin, par limite de produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = (1 - e) \times (-1) = e - 1.$$

$$S_n = i_n + \frac{e-1}{n} \quad \text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e-1}{n} = 0 \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = e-1, \text{ donc}$$

par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e-1$.

Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}^*, i_n \leq A(Dg) \leq S_n$

D'après le th. des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(Dg) = A(Dg) = e-1$ u.a.

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, C_f sa courbe représentative, et enfin D_f le domaine situé sous C_f .

On appelle intégrale de f entre a et b , l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine D_f .

Cette intégrale est notée : $\int_a^b f(x)dx$. On lit : intégrale entre a à b de la fonction f , ou encore, somme de a à b de $f(x)dx$.

Sans entrer dans les détails (cf. cours de l'enseignement supérieur, pour vraiment comprendre ce qu'est une intégrale), tout comme on l'a fait dans l'exemple précédent, l'aire d'un tel domaine peut être obtenue comme limite d'une somme d'aires de rectangles, d'où le nom de somme parfois utilisé au lieu d'intégrale.

Le terme $f(x)dx$ peut être vu comme l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont : $f(x)$ et dx .

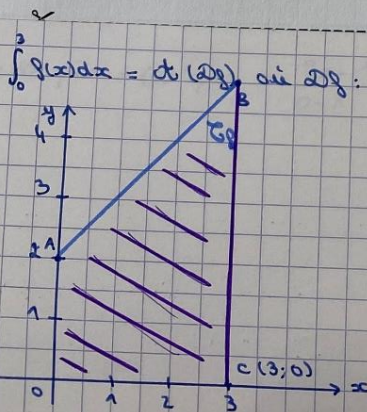
Les nombres a et b sont appelés **les bornes** de l'intégrales : a est la borne du bas, et b la borne du haut.

x est appelée la variable d'intégrale, la lettre désignant la variable n'a pas d'importance et aurait pu s'appeler $t, u, v, \dots$

Le symbole $\int$ est donc l'analogue, pour une variable continue, du symbole $\sum$ pour une variable discrète.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0; 3]$ par : $f(x) = x + 2$. Calculer $\int_0^3 f(x)dx$ après avoir représenté le domaine associé à cette intégrale.



Bg est un segment passant par $A(0; 2)$ et $B(3; 5)$.

$$A(\Delta g) = \int_0^3 (x+2)dx = \text{aire du trapèze } OABC$$

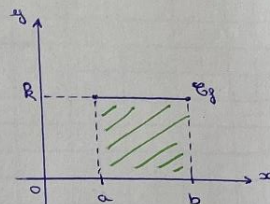
$$= \frac{OA+CB}{2} \times OC$$

$$A(\Delta g) = \frac{2+5}{2} \times 3 = 10,5 \text{ u.a.}$$

Propriétés évidentes de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel $a \in I$, on a :

- $\int_a^a f(x)dx = \dots 0 \dots$
- Si f est constante sur $[a; b]$, et vaut k , alors, $\int_a^b f(x)dx = \dots k \cdot (b-a) \dots$

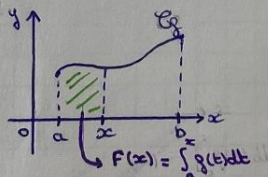


b) Fonction définie par une intégrale

Considérons une fonction f continue et positive, définie sur un intervalle $[a; b]$. Soit x un réel quelconque situé dans $[a; b]$.

5

Hachurer le domaine du plan dont l'aire est : $\int_a^x f(t)dt$. On admet que cette aire ne dépend que de la valeur de x .



On crée donc une fonction, notée F , définie sur $[a; b]$ par :

$$\text{Pour tout réel } x \in [a; b], F(x) = \int_a^x f(t)dt = \mathcal{A}(\Delta x)$$

The Théorème

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$, la fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ est dérivable sur } [a; b], \text{ et, pour tout réel } x \in [a; b], \text{ on a : } F'(x) = f(x).$$

primitive

Preuve :

Ce théorème est admis dans le cas général.

On le démontre ici pour une fonction continue, positive et croissante.

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Pour x fixé, calculons $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ avec $h \neq 0$, $x \in [a; b]$ et $x+h \in [a; b]$.

• **Premier cas : h strictement positif**, soit $a \leq x < x+h \leq b$.

$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[a; x+h]$.

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[a; x]$.

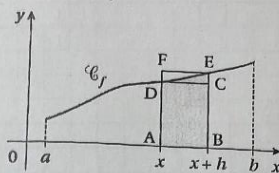
La différence $\Delta = F(x+h) - F(x)$ est donc, par additivité de l'aire, l'aire de la partie du plan coloriée en bleu sur la figure ci-contre.

La fonction f est croissante, donc pour tout z compris entre x et $x+h$: $f(x) \leq f(z) \leq f(x+h)$.

Ce qui permet de dire que Δ est comprise entre $h \times f(x)$, l'aire du rectangle ABCD, et $h \times f(x+h)$, l'aire du rectangle ABEF.

En divisant la double inégalité $h \times f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \times f(x+h)$ par $h > 0$, on obtient :

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$



Comme la fonction f est continue en x , lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.

Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

• **Deuxième cas : h strictement négatif**, soit $a \leq x+h < x \leq b$.

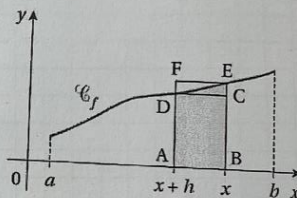
$\Delta = F(x+h) - F(x)$ est l'opposé de l'aire de la partie du plan coloriée en bleu sur la figure ci-contre.

La fonction f est croissante, donc pour tout z compris entre $x+h$ et x : $f(x+h) \leq f(z) \leq f(x)$.

Ce qui permet de dire que $-\Delta$ est compris entre $(-h) \times f(x+h)$, l'aire du rectangle ABCD, et $(-h) \times f(x)$, l'aire du rectangle ABEF.

En divisant la double inégalité $(-h) \times f(x+h) \leq -[F(x+h) - F(x)] \leq (-h) \times f(x)$ par $-h > 0$, on obtient :

$$f(x+h) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x)$$



Comme la fonction f est continue en x , lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.

Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

• D'après l'étude des deux cas, la fonction F est dérivable en tout x de $[a; b]$ et $F'(x) = f(x)$. ■

II - Lien entre primitives et intégrales

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I .

La fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est LA primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque : cela établit que toute fonction continue et positive sur un intervalle admet des primitives.

Preuve :

Déjà vu: $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur I .

$$\text{Et } F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle I .

Ce point est très utile en pratique.
Sa démonstration est plus délicate et sera donc admise.

Théorème (qui permet de calculer des intégrales).

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

♥♥♥♥♥ $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. ♥♥♥♥♥ où F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$.

On convient de noter: $[F(x)]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$.

On écrira donc: ♥♥♥♥♥ $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Cette dernière relation est parfois appelée formule de Newton-Leibniz.

Preuve:

✓

Soit G la primitive de f qui s'annule en a .

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Soit F une quelconque primitive de f sur $[a; b]$.

Il existe $R \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a; b], F(x) = G(x) + R$.

$$\text{Donc } F(b) = G(b) + R = \int_a^b f(t) dt + R$$

$$F(a) = G(a) + R = \int_a^a f(t) dt + R$$

$$\text{Donc } F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + R - R$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

Remarques

Le réel $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie.

On admettra que ce théorème reste vrai pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, même si f n'est pas de signe positif sur $[a; b]$.

Cela amène naturellement à la définition de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a; b]$:

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b deux réels de cet intervalle, et F une primitive de f sur I .

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ une primitive de } f \text{ sur } I. \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$



Bien retenir : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I . En pratique, pour alléger les calculs, on prend systématiquement la constante nulle dans l'expression de F .

Application fondamentale au calcul d'intégrales :

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx ; \int_0^1 e^{-x} dx ; \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3} \right) dx ; \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx ; \int_0^1 3xe^{-x^2} dx ; \int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x} dx ;$$

$$A = \int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$$

$$\text{avec } F(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{3 \times 0^2}{2} + 0 = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{17}{6}$$

$$\int_0^1 (x^2 + 3x + 1) dx = \frac{17}{6}$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 1 \\ F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x$$

$$B = \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\text{Posons } g(x) = e^{-x}$$

Une primitive de g est $F(x) = -e^{-x}$

$$B = \int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = -e^{-1} + 1$$

$$B = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{-1 + e}{e}$$

$$C = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$g(x) = \frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3} \quad \text{avec } 1 \leq x \leq 2$$

$$g(x) = 3 \times \frac{1}{x} - x + x^{-3}$$

$$\text{Donc } F(x) = 3 \ln(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$$

$$F(x) = 3 \ln(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-2}}{2} = 3 \ln(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

$$\text{Donc } F(2) = 3 \ln(2) - 2 - \frac{1}{8} = 3 \ln(2) - \frac{17}{8}$$

$$F(1) = 3 \ln(1) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$\text{Ainsi } C = F(2) - F(1) = 3 \ln(2) - \frac{17}{8} + 1$$

$$C = 3 \ln(2) - \frac{9}{8}$$

$$D = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx$$

$$\text{Soit } f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et } u(x) = x^2+x+4 \quad \text{donc } u'(x) = 2x+1$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\text{Donc } F(x) = \ln(|u(x)|) = \ln(x^2+x+4) \quad \text{car } x^2+x+4 > 0$$

$$D = [\ln(x^2+x+4)]_0^1 = \ln(1+1+4) - \ln(0+0+4) = \ln(6) - \ln(4)$$

$$D = \ln\left(\frac{6}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$E = \int_0^1 3xe^{-x^2} dx$$

$$\text{Posons } f(x) = 3xe^{-x^2} \quad \text{avec } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et } u(x) = -x^2 : u'(x) = -2x$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{3}{-2} \times (-2x) e^{-x^2} = -\frac{3}{2} u'(x) e^{u(x)}$$

$$\text{Donc } F(x) = -\frac{3}{2} e^{u(x)} = -\frac{3}{2} e^{-x^2}$$

$$\text{Donc } E = [F(x)]_0^1 = \left[-\frac{3}{2} e^{-x^2} \right]_0^1$$

$$E = -\frac{3}{2}e^{-1} - \left(-\frac{3}{2}e^0\right) \text{ avec } e^0 = 1$$

$$E = -\frac{3}{2}e^{-1} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$F = \int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx$$

$$\text{Soit } f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x} \text{ où } 1 \leq x \leq e$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times \ln(x) \text{ et } u(x) = \ln(x) \text{ donc } u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + u'(x)u(x)$$

$$\text{Rappel : } P(u, u') = \frac{u^2}{2}$$

$$\text{Donc } F(x) = \ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

$$\text{Donc } \int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx = \left[\ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2 \right]_1^e = \ln(e) + \frac{1}{2}(\ln(e))^2 - 0$$

$$F = 1 + \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{3}{2}$$

Calculatrice : seconde $\int_a^b \square dx$

III - Propriétés de l'intégrale

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tout nombre a et b appartenant à I , on a :

$$\bullet \quad \heartsuit \heartsuit \int_a^a f(x) dx = 0 \heartsuit \heartsuit$$

$$\bullet \quad \heartsuit \heartsuit \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \heartsuit \heartsuit$$

Preuve :

$$\int_a^a f(x) dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$$

Propriété "Relation de Chasles"

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tout nombre a, b et c dans I on a :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Par analogie avec les vecteurs, cette relation est appelée la relation de Chasles.

Preuve :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^c f(x) dx = F(c) - F(b)$$

$$\text{Donc } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x) dx$$

Propriété fondamentale (appelée propriété de linéarité de l'intégrale)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et k un réel quelconque. Pour tous nombres a et b situés dans I , on a :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b k \times f(x) dx = k \times \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{En particulier, } \int_a^b (kf(x) + g(x)) dx = k \times \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Ces propriétés se résument en disant : propriétés de **linéarité de l'intégrale**.

Preuve :

Soit F une primitive de f sur $[a; b]$. De même G " " de g " ".

Donc $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [(F + G)(x)]_a^b \\ \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

a) Déterminer $u_0 + u_1$.

b) Calculer u_1 . En déduire u_0 .

$$a) u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-0x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-1x}}{1+e^{-x}} dx$$

Donc par linéarité de $\int$:

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx$$

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0$$

$$u_0 + u_1 = 1$$

$$b) u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \quad \text{Posons } u(x) = 1+e^{-x} \text{ donc } u'(x) = -e^{-x}$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{-u'(x)}{u(x)} dx$$

$$u_1 = [-\ln(u(x))]_0^1$$

$$u_1 = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) - (-\ln(1+e^0))$$

$$u_1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(2)$$

$$u_1 = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) = \ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e}}\right)$$

$$u_1 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

$$\text{Enfin: } u_0 + u_1 = 1 \text{ et } u_1 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

$$\text{Donc } u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

$$u_0 = \ln(e) - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

$$u_0 = \ln\left(\frac{e}{\frac{2e}{e+1}}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

Signe d'une fonction, signe d'une intégrale et inégalités

Soit a et b deux réels tels que : $a \leq b$.

• ♥♥♥♥♥ Si pour tout réel $x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors... $\int_a^b f(x) dx \geq 0$... (propriété de positivité de l'intégrale). ♥♥♥♥♥

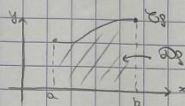
• ♥♥♥♥♥ Si pour tout réel $x \in [a; b]$, $f(x) \leq 0$, alors... $\int_a^b f(x) dx \leq 0$... ♥♥♥♥♥

Preuve :

x -----

1. $\forall x \in [a; b], f(x) \geq 0$.

Or $\int_a^b f(x) dx = \text{ct}(\mathcal{A}_f)$ où :



et $\text{ct}(\mathcal{A}_f) \geq 0$, donc $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

M_1 : Soit F une primitive de f sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Or $\forall x \in [a; b], F'(x) = f(x)$ et $f(x) \geq 0$

Donc $F'(x) \geq 0$

Donc F est une f^e croissante sur $[a; b]$.

Or $a \leq b$ et $F \nearrow$ sur $[a; b]$

Donc $F(a) \leq F(b)$

Donc $F(b) - F(a) \geq 0$

D'où $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Idem avec $F'(x) = f(x) \leq 0$.

Donc $F \searrow$ sur $[a; b]$.

Donc $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ avec $a \leq b$ et $F \searrow$ sur $[a; b]$

donc $F(a) \geq F(b)$

donc $F(b) - F(a) \leq 0$

D'où $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.



On retiendra que lorsqu'on intègre dans le bon ordre (c'est-à-dire quand $a \leq b$), une fonction de signe constant, l'intégrale de cette fonction a le même signe que cette dernière.

♥♥♥♥♥ Propriété (croissance de l'intégrale) ♥♥♥♥♥

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, telles que pour tout réel $x \in [a; b]$, on ait : $f(x) \leq g(x)$.

Alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Retenir : Lorsqu'on intègre dans le bon ordre, l'intégrale conserve le sens des inégalités.

Preuve :

$\forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x)$

Donc $f(x) - g(x) \leq 0$.

Donc par propriété précédente, on a : $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \leq 0$.

Par linéarité de $\int$: $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \leq 0$

donc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Corollaire

Soit m et M deux réels. Si pour tout réel x de $[a; b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$,

alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Preuve :

$\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$

Donc par croissance de l'intégrale : $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$

$[mx]_a^b \leq \int_a^b f(x) dx \leq [Mx]_a^b$

$mb - ma \leq \int_a^b f(x) dx \leq Mb - Ma$

Donc $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Moralité : Pour établir une inégalité concernant une intégrale, on commence tjrs par encadrer la fonction intégrée.

10

Exercice 4

a) Démontrer que : $0 \leq \int_1^e \ln(x) dx \leq e-1$. On commencera par se demander dans quel intervalle x est-il ?

b) Justifier que pour tout réel $t \geq 0$, $\int_0^t x e^{-x} dx \geq 0$.

c1) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

c2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, puis en déduire la nature et la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Remarque : les questions c1 et c2 peuvent être à la base d'un très joli développement au grand oral : la limite d'une somme infinie de nombres positifs de plus en plus petits est-elle toujours finie (à formuler différemment car déjà trop ciblée comme question) ?

L'exemple précédent montre que non, on appelle série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.

Par-contre, la série de Riemann $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ elle converge ! En posant $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ pour tout entier n non nul, on peut facilement montrer que (v_n) est une suite croissante, et que $v_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ en remarquant que : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

d) Vrai ou faux ? : A-t-on : $\int_a^b (f(x))^2 dx = (\int_a^b f(x) dx)^2$? Justifier.

" Si f et g sont continues sur $[0; 1]$ et si $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$, alors $f = g$ sur $[0; 1]$ ".

$$\int_1^e \ln(x) dx : \text{ Ici } 1 \leq x \leq e$$

a) $1 \leq x \leq e$

Donc $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(e)$ car $\ln \uparrow$ sur $[1; e]$.

Donc $0 \leq \ln(x) \leq 1$

Donc par propriété de croissance de l'intégrale : (car $1 \leq e$).

$$\int_1^e 0 dx \leq \int_1^e \ln(x) dx \leq \int_1^e 1 dx$$

$$0 \leq \int_1^e \ln(x) dx \leq [x]_1^e$$

$$0 \leq \int_1^e \ln(x) dx \leq e-1.$$

b) $\int_0^t x e^{-x} dx$ avec $t \geq 0$.

Ici $0 \leq x \leq t$

Donc $0 \leq x e^{-x} \leq x e^{-x}$ car $e^{-x} > 0$

$$0 \leq x e^{-x}$$

Donc par croissance de l'intégrale : $\int_0^t 0 dx < \int_0^t x e^{-x} dx$
 $0 \leq \int_0^t x e^{-x} dx$

c₁) Ici $R \leq x \leq R+1$

Donc $\frac{1}{R} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{R+1}$ par décroissance de la f^o inverse sur $[R; R+1] \subset [0; +\infty[$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_R^{R+1} \frac{1}{R+1} dx \leq \int_R^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_R^{R+1} \frac{1}{R} dx$$

Par linéarité de $\int$: $\frac{1}{R+1} \times \int_R^{R+1} dx \leq \int_R^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{R} \times \int_R^{R+1} dx$

$$\frac{1}{R+1} \times [x]_R^{R+1} \leq \int_R^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{R} \times [x]_R^{R+1}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{R+1} \times [R+1-R] \leq \int_R^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{R} [R+1-R]$$

$$\frac{1}{R+1} \leq \int_R^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{R}$$

c₂) Grâce à c₁) : $\frac{1}{R+1} \leq \left[\ln(x) \right]_R^{R+1} \leq \frac{1}{R}$

Pour $R \geq 1$, $\frac{1}{R+1} \leq \ln(R+1) - \ln(R) \leq \frac{1}{R}$ *

* Pour $R=1$: $\frac{1}{2} \leq \ln(2) - \ln(1) \leq 1$

* Pour $R=2$: $\frac{1}{3} \leq \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$

* Pour $R=n$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

On somme membre à membre ces n inégalités.

Donc : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \leq \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \dots + \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n+1)$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{R=1}^n \frac{1}{R}$$

$$-\ln(n) \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

Ainsi : $\sum_{R=1}^n \frac{1}{R} \geq \ln(n+1)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n \geq \ln(n+1)$ où $M_n = \sum_{R=1}^n \frac{1}{R}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc par th. de comparaison: $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty \quad ; \quad \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty \right)$$

d) Faux: Ct-ea: $a=0$; $b=1$. et $f(x)=x$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \left(\int_0^1 x dx \right)^2 = \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 0 \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Or } \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}$$

Faux: $f(x)=1$
 $g(x)=2x$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \text{ct} (2g)$$

$$\int_0^1 1 dx = 1 = \text{ct} (2g)$$

$$\text{Ainsi } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$$

Pour autant, $f \neq g$!

IV- L'intégration par parties

Voici un **puissant outil** qui permet de calculer certaines intégrales de fonctions écrites sous la forme d'un produit de deux fonctions.

Formule de l'intégration par parties (notée IPP), très importante pour le bac et le supérieur !!!

Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle $[a; b]$, dérivables sur cet intervalle, et telles que u' et v' soient continues sur $[a; b]$.

$$\text{On a : } \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \heartsuit \int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

♥♥♥♥♥

Preuve :

$$\left[u(x)v(x) \right]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{Donc } \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b (u'v + uv')(x) dx$$

On a une primitive de $(uv)'$ est uv .
 Donc : $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$
 Ainsi : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Remarques : On aurait aussi pu donner comme relation : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

La formule de l'intégration par parties permet donc parfois, de calculer l'intégrale d'une fonction qui est écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions.

Exemples d'utilisation

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 xe^x dx \quad ; \quad J = \int_1^e \ln(x) dx \quad (\heartsuit \heartsuit \text{retenez bien l'astuce classique ici} \heartsuit \heartsuit).$$

$$K = \int_1^e (x^2 + 2x)\ln(x) dx$$

2) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer $L = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

$$1) \quad I = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 u(x)v'(x)dx \quad \text{avec : } \begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

Par la formule d'IPP :

$$I = \int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx$$

$$I = 1 \times e^1 - 0 \times e^0 - \int_0^1 e^x dx$$

$$I = e - [e^x]_0^1 = e - (e - e^0)$$

$$I = 1$$

$$J = \int_1^e \ln(x) dx = \int_1^e 1 \times \ln(x) dx$$

↳ astuce du 1 multiplicatif

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = 1 \\ v(x) = x \end{cases}$

D'après la formule des IPP :

$$J = \int_1^e u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x) v(x) dx$$

$$J = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx$$

$$J = e \ln(e) - 1 \ln(1) - \int_1^e 1 dx$$

$$J = e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1$$

$$K = \int_1^e (x^2 + 2x) \ln(x) dx$$

Ponons : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = x^2 + 2x \\ v(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 \end{cases}$

Par IPP :

$$K = [u(x) v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x) v(x) dx$$

$$K = \left[\ln(x) \times \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) dx$$

$$K = \ln(e) \times \left(\frac{e^3}{3} + e^2 \right) - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + x \right) dx$$

$$K = \frac{e^3}{3} + e^2 - \left[\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} + e^2 - \left(\left(\frac{e^3}{9} + \frac{e^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$K = \frac{e^3}{3} + e^2 - \frac{e^3}{9} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{2}{9} e^3 + \frac{e^2}{2} + \frac{11}{18}$$

Exercice 5Soit $x > 0$.

- a) Effectuer une intégration par parties pour calculer : $I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$
 b) En déduire les primitives de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

$$a) I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

$$I(x) = \int_1^x \ln(t) \times \frac{1}{t^2} dt$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ u'(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

Par IPP :

$$I(x) = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t) dt$$

$$I(x) = \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt$$

$$I(x) = -\frac{1}{x} \ln(x) - \ln(1) \times \left(-\frac{1}{1}\right) + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

$$I(x) = -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x$$

$$I(x) = -\frac{\ln(x)}{x} + \left(-\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{1}\right) \right)$$

$$I(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

$$b) x > 0 : f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Soit F une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

$I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ est la primitive de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ qui s'annule lorsque $x=1$.

Donc $I(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1$ est une primitive de f où $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Exercice 6

On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

c) En déduire les valeurs de I_2 et I_3 .

$$a) I_1 = \frac{1}{1!} \int_0^1 (1-x)^1 e^{-x} dx$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-x) e^{-x} dx$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} u(x) = 1-x \\ u'(x) = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x} \end{cases}$$

Par IPP :

$$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx$$

$$I_1 = [(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-1) \times (-e^{-x}) dx$$

$$I_1 = -(1-1)e^{-1} - (-1e^0) - \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$I_1 = 1 - [-e^{-x}]_0^1 = 1 - (-e^{-1} - (-e^0)) = 1 - (-e^{-1} + 1) = 1 + e^{-1} - 1 = e^{-1}$$

$$I_1 = \frac{1}{e}$$

b) Pour établir une relaⁿ de récurrence concernant une suite d'intégrales on tentera en priorité une IPP.

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \times \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = (1-x)^{n+1} \\ u'(x) = 1 \times (n+1) \times (1-x)^n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Par IPP :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \times \left([(1-x)^{n+1} \times (-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n \times (-e^{-x}) dx \right)$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \times (0 - (-e^0)) - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \times (1 - (n+1) \times \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx) \quad (\text{linéarité de } \int)$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} \times \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - \underbrace{\frac{1}{n!}}_{I_n} \times \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

Donc pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

c) Faisons $n=1$ de la q° b):

$$I_2 = \frac{1}{2!} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{e-2}{2e}$$

Faisons $n=2$ de la q° b):

$$I_3 = \frac{1}{3!} - I_2 = \frac{1}{6} - \frac{e-2}{2e} = \frac{e}{6e} - \frac{(3e-6)}{6e} = \frac{-2e+6}{6e}$$

Exercice 7 On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$: $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Calculer u_0 et u_1 .

2. Montrer : $\forall n \geq 0, 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$.

3. Montrer directement que : $\forall n \geq 1, u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$.

En déduire : $\forall n \geq 0, u_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

4. Que vaut la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$, de $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$?

Comment faire pour obtenir une valeur approchée de cette limite à 10^{-3} près ?

$$1) u_0 = \int_0^1 \frac{(1-x)^0}{0!} e^x dx = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

$\downarrow$
 $0! = 1 \text{ et } (1-x)^0 = 1$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{(1-x)^1}{1!} e^x dx = \int_0^1 (1-x) e^x dx$$

Faisons une IPP: $\begin{cases} u(x) = 1-x \\ u'(x) = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$u_1 = [(1-x)e^x] - \int_0^1 (-1)e^x dx$$

$$u_1 = 0 - e^0 + \int_0^1 e^x dx = -1 + [e^x]_0^1 = -1 + e^1 - e^0 = e - 2$$

2) Posons $g(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} e^x$ avec $0 \leq x \leq 1$, alors $1 \geq 1-x \geq 0$.

Donc $0 \leq 1-x \leq 1$

Donc $0 \leq (1-x)^n \leq 1^n$ car $x \mapsto x^n$ croît sur $[0, 1]$.

si $0 \leq x \leq 1$, alors $\frac{0 \leq e^x}{n!} \leq \frac{(1-x)^n \times e^x}{n!} \leq \frac{e^x}{n!}$

Donc $0 \leq g(x) \leq \frac{e^x}{n!}$ car $x \mapsto e^x$ croît sur $[0, 1]$.

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{n!} dx$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!} \times \int_0^1 e^x dx$$

$$\begin{aligned} &= \\ u_0 &= e-1 \end{aligned}$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{e-1}{n!} < \frac{e}{n!} \quad \text{car } e-1 \leq e$$

3) Idem exo 6 par IPP

$$\forall n \geq 1, u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!} \quad (*)$$

(*) Pour $k = n-1$

$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$$

Pour $k = n-2$

$$u_{n-1} = u_{n-2} - \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\text{Pour } k=1: u_1 = u_0 - \frac{1}{1!}$$

Sommons membre à membre ces égalités :

$$u_n - u_{n-1} + \dots + u_1 = u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + u_0 - \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \frac{1}{1!} \right)$$

$$\text{Donc } u_n = e-1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

$$u_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

4) D'après q. 2: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \text{ car } 0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$$

Donc d'après le th. des gendarmes: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\text{on, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - u_n$$

$$\text{on } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - u_n) = e.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

(On cherche n tq: $|u_n - e| \leq 10^{-3}$. on $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$) Hors-pgm
Donc $-e \leq$

V - Compléments

a) Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ non réduit à un point.

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$, le réel noté μ défini par :

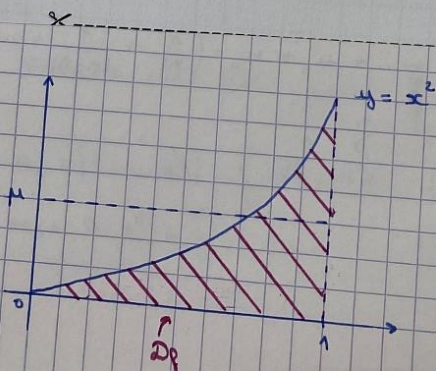
$$\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow \mu(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction carrée sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$f(x) = x^2 \quad \mu = \frac{1}{1-0} \times \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

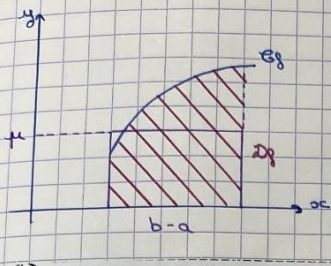
Interprétation géométrique de la valeur moyenne d'une fonction dans le cas d'une fonction continue et positive sur $[a; b]$.



$$\text{Aire}(Dg) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx$$

u est la largeur d'un rectangle d'aire D_f et de longueur $b-a$
ici $1-0=1$

f est continue positive sur $[a; b]$ donc $\int_a^b f(x) dx = \mathcal{A}(D_f)$



Le rectangle de longueur $b-a$ et de largeur u a la même aire que D_f .

Remarque : Soit f est continue sur $[a; b]$, et m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$, que peut-on dire de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$?

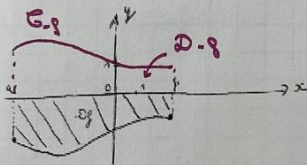
alors $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$ (croissance de l'intégrale)

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ donc $\exists b-a > 0 : \frac{m(b-a)}{b-a} \leq \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)}{b-a}$
 $m \leq f(x) \leq M$

b) Intégrale d'une fonction de signe quelconque sur un intervalle et aire.

a) Cas d'une fonction à valeurs négatives sur $[a; b]$

Soit f une fonction continue et négative sur $[a; b]$, et C_f sa courbe représentative, et D_f le domaine au-dessus de la courbe compris entre les verticales d'équation $x=a$ et $x=b$ et l'axe des abscisses.



On a : $\text{Aire}(D_f) = - \int_a^b f(x) dx$

Preuve :

$\forall x \in [a; b], f(x) \leq 0$

Donc $-f(x) \geq 0$

Donc par ≥ 0 de l'intégrale :

$\int_a^b -f(x) dx = \int_a^b (-f)(x) dx = \mathcal{A}(-f)$

x une symétrie axiale conserve les aires :

$$\text{Donc } \mathcal{A}(\mathcal{D}g) = \mathcal{A}(\mathcal{D}f)$$

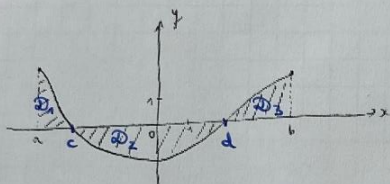
$$\text{Ainsi : } \mathcal{A}(\mathcal{D}g) = \mathcal{A}(\mathcal{D}f) = \int_a^b -g(x)dx.$$

Donc, si f est continue et négative sur $[a; b]$, $\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}(\mathcal{D}f)$

B) Cas d'une fonction de signe variable sur $[a; b]$

Soit f une fonction de signe variable sur $[a; b]$. L'aire du domaine D coloré ci-dessous est donné par :

$$\text{Aire}(D) = \int_a^b g(x)dx = \underbrace{\int_a^c g(x)dx}_{\mathcal{D}_1} + \underbrace{\int_c^d g(x)dx}_{\mathcal{D}_2} + \underbrace{\int_d^b g(x)dx}_{\mathcal{D}_3}$$



$$g(x) \geq 0 \text{ sur } [a; c]$$

$$g(x) \leq 0 \text{ sur } [c; d]$$

$$g(x) \geq 0 \text{ sur } [d; b]$$

$$\int_a^b g(x)dx = \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_3)$$

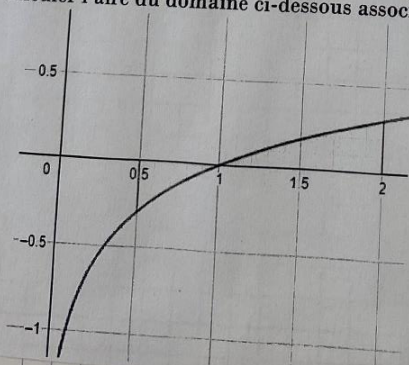
$$\text{On a donc dans cet exemple : } \int_a^b f(x)dx = \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_3)$$

Méthode : On découpe $[a; b]$ en intervalles sur lesquels f garde un signe constant (ce sera toujours possible en terminale), et on se sert de la définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs positives (aire sous la courbe) et de l'intégrale d'une fonction à valeurs négatives (opposé de l'aire au-dessus de la courbe).

De façon plus générale, on peut retenir que : ♥♥ Aire $(D) = \int_a^b |f(x)|dx$. ♥♥

Exemple

Calculer l'aire du domaine ci-dessous associé à la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$.



$$\mathcal{A} = \int_{0.5}^2 |\ln(x)|dx. \quad \text{or } \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \int_{0.5}^1 |\ln(x)|dx + \int_1^2 |\ln(x)|dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{0.5}^1 -\ln(x)dx + \int_1^2 \ln(x)dx$$

On a déjà vu en exo que :

$x \mapsto \ln(x)$ a pour primitive : $x \mapsto x \ln(x) - x$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \left[-x \ln(x) + x \right]_{0,5}^1 + \left[x \ln(x) - x \right]_1^2$$

$$\mathcal{A} = -1 \ln(1) + 1 - (-0,5 \ln(0,5) + 0,5) + 2 \ln(2) - 2 - (1 \ln(1) - 1)$$

$$\mathcal{A} = 1 + 0,5 \ln(0,5) - 0,5 + 2 \ln(2) - 2 + 1$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + 2 \ln(2)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} + 2 \ln(2) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln(2) \text{ u.a.}$$

c) Aire d'une portion du plan autre qu'un domaine.

Propriété Sur $[a; b]$, $\mathcal{C}_f$ au-dessus de $\mathcal{C}_g$ signifie que :

$$\forall x \in [a; b], f(x) \geq g(x) \text{ ou } f(x) - g(x) \geq 0.$$

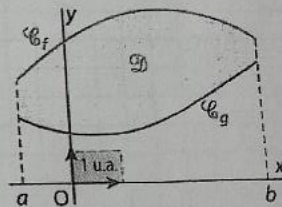
Aire d'un domaine entre deux courbes sur $[a; b]$

Si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$, alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$ est $\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (f - g)(t) dt$.

En effet, lorsque f et g sont positives (voir schéma ci-contre),

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt = \int_a^b (f(t) - g(t)) dt.$$

On admet que ce résultat reste valable dans le cas général.



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b deux réels appartenant à I tels que $a \leq b$.

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur I telles que :

pour tout x appartenant à $[a; b]$, $g(x) \leq f(x)$.

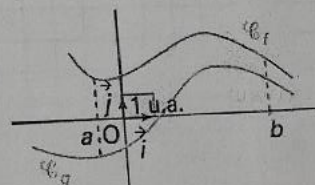
Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, et $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_f$,

$\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$\mathcal{D} = \{M(x; y) \in \mathcal{P} \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}.$

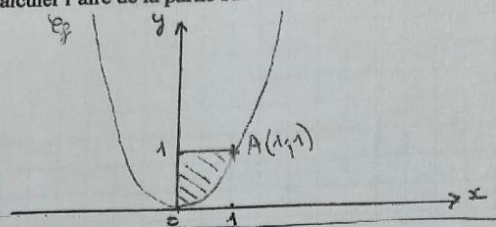
L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$, en u.a., du domaine $\mathcal{D}$ est égale à $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.



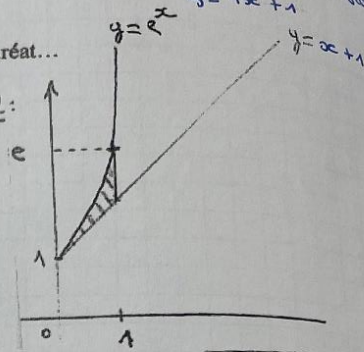
Application : attention, il y a souvent une question de ce genre au baccalauréat...

Exemple: Calculer l'aire de la partie suivante du plan :

soit $f(x) = x^2$



Ex 2:



On doit calculer: $\int_0^1 1 \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$
 $= 1 - \frac{1}{3} - (0)$
 $= \frac{2}{3} \text{ u.a.}$

Ex 2:

e^x est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_{e^x}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes.

En particulier $\mathcal{C}_{e^x}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x + 1$.

Donc $A(\mathcal{D}) = \int_0^1 (e^x - (x + 1)) \, dx$

$A(\mathcal{D}) = \int_0^1 (e^x - x - 1) \, dx$

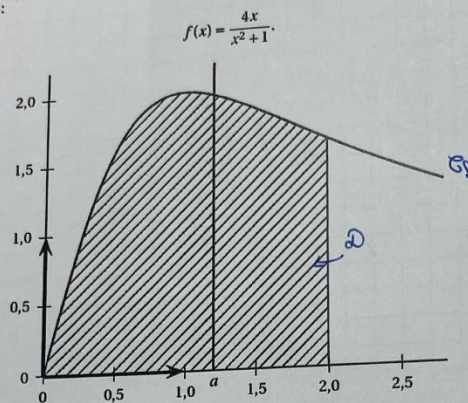
$A(\mathcal{D}) = \left[e^x - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = (e - \frac{1}{2} + 1) - (e^0 - \frac{0^2}{2} + 0)$

$A(\mathcal{D}) = e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2} \text{ u.a.}$

Exercices sur l'intégration

Exercice 1

La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie par :



La valeur exacte du réel positif a tel que la droite d'équation $x = a$ partage le domaine hachuré en deux domaines d'aires égales est :

Réponse A: $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Réponse B: $\sqrt{\sqrt{5}-1}$

Réponse C: $\ln 5 - 0,5$

Réponse D: $\frac{10}{9}$

Soit D_1 le domaine sous f et les abscisses sont comprises entre 0 et a .
 $x \geq 0$, donc $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ est à valeurs positives sur $[0; +\infty[$.

$$A_1(a) = \int_0^a \frac{4x}{x^2 + 1} dx = \left[2 \ln(x^2 + 1) \right]_0^a \quad \text{primitive de } f(x)$$

$$A_1(2) = 2 \ln(2^2 + 1) - 2 \ln(0^2 + 1) = 2 \ln(5) \text{ u.a.}$$

Soit D_2 le domaine sous f et les abscisses sont comprises entre a et 2 .

On cherche $a \geq 0$ tq :

$$A_1(a) = \frac{1}{2} \times A_1(2)$$

$$\int_0^a \frac{4x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \times 2 \ln(5) = \ln(5)$$

$$\left[2 \ln(x^2 + 1) \right]_0^a = \ln(5)$$

$$2 \ln(a^2 + 1) - 2 \ln(0^2 + 1) = \ln(5)$$

$$2\ln(a^2+1) = \ln(5)$$

$$\ln(a^2+1) = \frac{\ln(5)}{2} = \ln(\sqrt{5})$$

$$\text{Donc } e^{\ln(a^2+1)} = e^{\ln(\sqrt{5})}$$

$$a^2+1 = \sqrt{5}$$

$$a^2 = \sqrt{5}-1$$

Or $a > 0$, donc $a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$. Réponse b.

16

Exercice III (exercice fondamental dans la démarche utilisée)

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

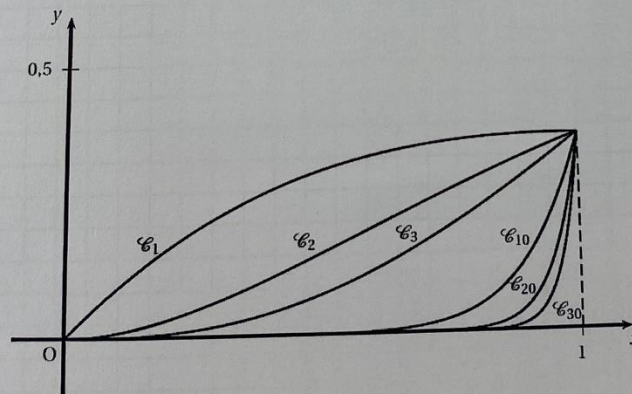
1. Calculer I_1 .

2. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2,$

$\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.

$\mathcal{C}_n$: courbe représentative sur $[0, 1]$ de la f° f_n définie par $f_n(x) = x^n e^{-x}$



- Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
- Démontrer cette conjecture.
- En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$.

$$1. I_1 = \int_0^1 x^1 e^{-x} dx = \int_0^1 x e^{-x} dx$$

Faisons une IPP en posant

$$\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v'(x) = e^{-x} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

u, u', v, v' sont continues sur $[0, 1]$.

$$\text{Donc } I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx$$

$$I_1 = [x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$I_1 = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$I_1 = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + (-e^{-1} - (-e^0)) = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

2. a. g_n est continue et positive sur $[0, 1]$.

Donc $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$ représente l'aire du domaine D_n situé sous la courbe g_n et entre les abscisses 0 et 1.

Il semblerait que (I_n) soit décroissante car l'aire des domaines D_n semble diminuer lorsque n augmente.

$D_{n+1} \subset D_n$ pr cq $n \geq 1$.

b. Mq (I_n) décroît: (méthode de la +)

$$n \geq 1$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x} - x^n e^{-x}) dx \text{ par linéarité de } \int$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx$$

Or $0 \leq x \leq 1$ donc $x-1 \leq 0$, et $x \geq 0$ donc $x^n \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc on a:

$$\forall x \in [0, 1], x^n e^{-x} (x-1) \leq 0.$$

Donc par croissance de l'intégrale ($0 \leq 1$):

$$\int_0^1 x^n e^{-x} (x-1) dx \leq \int_0^1 0 dx$$

$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

Donc (I_n) décroît.

c. $I_n = \text{ct}(\mathcal{D}_n)$ et une aire est positive ou nulle.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$, donc (I_n) est minorée par 0.

D'après q. b), (I_n) décroît.

Donc (I_n) converge d'après le th. de convergence des suites monotones.

d. Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$: calculons l .

$$\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \text{ et } 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{donc } 0 \geq -x \geq -1 \quad \text{car } -1 \leq 0$$

$$\text{donc } -1 \leq -x \leq 0$$

$$\text{donc } e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0 \quad \text{car exp croît sur } [-1; 0] \subset \mathbb{R}.$$

donc (petite d'info) : $0 \leq e^{-x} \leq 1$ (encadrement + large).

Donc $\hat{=}$ $x^n \geq 0$ vu que $0 \leq x \leq 1$

$$0 \times x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n \quad \text{donc par croissance de l'f.}$$

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

Donc d'après le th. des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercice IV

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = ae^{ax} + a.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x) dx.$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.

2. On pose dans cette question $a = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = e^x + 1.$$

a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.

b. Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.

3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ?
Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

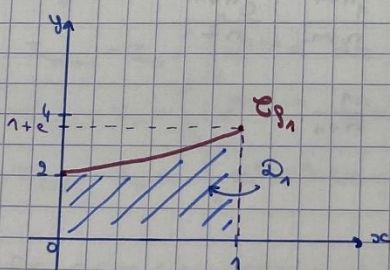
$$0 \leq a \leq 1$$
$$f_a(x) = ae^{ax} + a \quad \text{ou } x \in \mathbb{R}$$
$$I(a) = \int_0^1 f_a(x) dx$$

1) Ici $a = 0$:

$$I(0) = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

2) Ici $a = 1$: donc $f_1(x) = e^x + 1$.

a. f_1 croît sur $[0; 1]$:



$$I(1) = \int_0^1 f_1(x) dx$$

avec $f_1(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$.

Donc $I(1) = \text{aire}(Q_1)$.

$$b. I_1 = \int_0^1 (e^x + 1) dx = [e^x + x]_0^1 = e^1 + 1 - (e^0 + 0) = e + 1 - 1 = e$$

$I_1 \approx 2,7$ arrondi à 0,1 près.

3) $0 \leq a \leq 1$

$$I(a) = \int_0^1 (ae^{ax} + a) dx$$

On cherche s'il existe $a \in [0, 1]$ tq : $I(a) = 2$.

$$I(a) = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 (ae^{ax} + a) dx = 2$$

$$\Leftrightarrow [e^{ax} + ax]_0^1 = 2$$

$$\Leftrightarrow e^{a \times 1} + a \times 1 - (e^{a \times 0} + a \times 0) = 2$$

$$\Leftrightarrow e^a + a - 1 = 2$$

$$I(a) = 2 \Leftrightarrow e^a + a - 3 = 0$$

Soit g la g^e définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = e^x + x - 3$.

$I(a) = 2 \Leftrightarrow g(a) = 0$: cherchons les annula^{rs} de g sur $[0, 1]$.

Or g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(x) = e^x + 1$.

Or $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 1 > 0$, donc $g'(x) > 0$.

Donc g est strict. croissante sur $[0, 1]$.

et

x	0	1
$g(x)$	-2	$e-2$

$$g(0) = e^0 - 3 = -2$$

$$g(1) = e + 1 - 3 = e - 2$$

- g est continue sur $[0, 1]$ car dérivable.
- g est strict $\uparrow$ sur $[0, 1]$.
- $-2 \leq 0 \leq e-2$ car $e \approx 2,7$
 $e-2 \approx 0,7$, donc $e-2 \geq 0$.

Donc d'après le CTVI, il existe une unique solⁿ à l'éqⁿ $g(x) = 0$ sur $[0, 1]$.

Notons α cette solⁿ.

Par méthode des balayages :

pas égal à 0,01

x	$g(x)$
0,79	-0,001
0,80	0,035

Donc $0,79 < \alpha < 0,80$: encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice II

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$1. u_0 = \int_1^2 \frac{1}{x} \ln(x) dx$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^2 u'(x) u(x) dx$$

$$u_0 = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^2$$

$$p(u) = \frac{u^2}{2}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x} \ln(x) \text{ a pr primitive : } x \mapsto \frac{1}{2} (\ln(x))^2$$

$$u_0 = \frac{1}{2} (\ln(2))^2 - \frac{1}{2} (\ln(1))^2$$

$$u_0 = \frac{1}{2} (\ln(2))^2$$

Interpréta°:

$$\text{Soit } f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ où } 1 \leq x \leq 2$$

$$\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2) \text{ par } \uparrow \text{ sur } [1; 2]$$

$$\text{Donc } f(x) \geq 0 \text{ sur } [1; 2]$$

Donc u_0 est l'aire du domaine situé sous f entre les abscisses 0 et 1.

2. $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq x \leq 2$

$$\text{donc } \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(2) \text{ car } \ln \uparrow \text{ sur } [1; 2]$$

$$0 \leq \ln(x) \leq \ln(2)$$

$$\text{Or } \hat{=} \frac{1}{x^{n+1}} > 0 \text{ (car } x \geq 1): \frac{0}{x^{n+1}} \leq \frac{\ln(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{\ln(2)}{x^{n+1}}$$

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{\ln(2)}{x^{n+1}}$$

3. Par croissance de l'intégrale: $\int_1^2 0 dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2) dx$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} dx$$

↳ linéarité de $\int$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \int_1^2 x^{-n-1} dx$$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \left[\frac{x^{-n}}{-n} \right]_1^2$$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \left(\frac{2^{-n}}{-n} - \frac{1^{-n}}{-n} \right)$$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \left(-\frac{1}{n \times 2^n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

4. $0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$

Or $2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Donc par somme: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n} = 0$.

Donc par produit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

Donc par théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

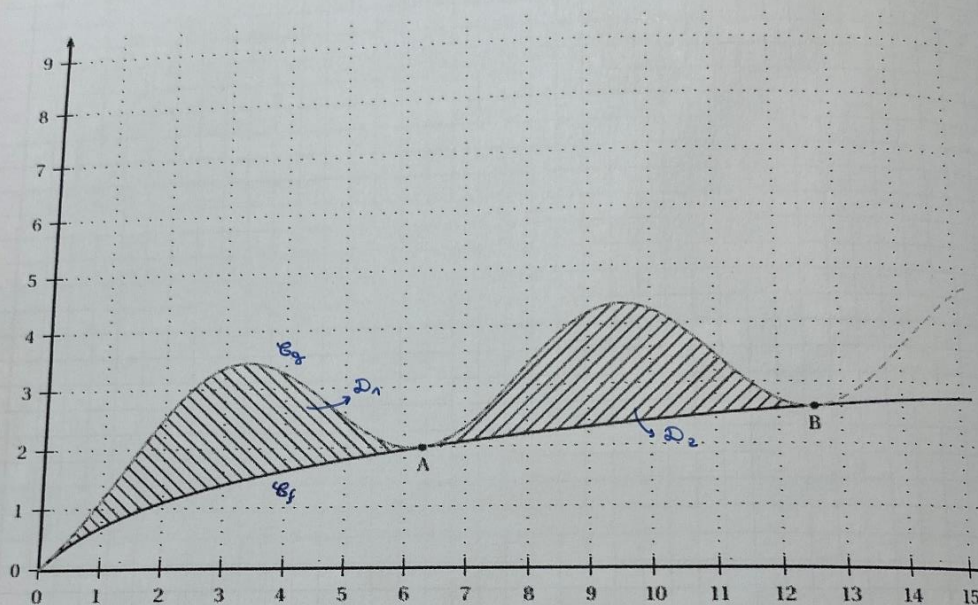
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g .

Ces courbes sont données en annexe 1.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique. *



Ma $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[0; +\infty[$.

Or $g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$ et $f(x) = \ln(x+1)$

Donc pour $x \geq 0$: $g(x) - f(x) = 1 - \cos(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leq 1$, donc $1 - \cos(x) \geq 0$, donc $g(x) - f(x) \geq 0$, donc

$\mathcal{C}_g$ au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[0; +\infty[$.

Donc $\mathcal{A}(D_1) = \int_0^{x_A} (g(x) - f(x)) dx$ où x_A est l'abscisse du pt A.

Recherchons x_A :

$A \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$, donc : $f(x_A) = g(x_A)$

Donc $\ln(x_A + 1) = \ln(x_A + 1) + 1 - \cos(x_A)$

Donc $\cos(x_A) = 1$

Donc $x_A = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Or A est le "1^{er}" pt d'intersecⁿ de C_f et C_g à abscisse strict positive.

Donc $x_A = 2\pi$

Donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(x)) dx = \left[x - \sin(x) \right]_0^{2\pi}$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = 2\pi - \sin(2\pi) - (0 - \sin(0))$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = 2\pi$ u.a.

$\cos' = -\sin$
$\sin' = \cos$
$\int \cos = \sin$
$\int \sin = -\cos$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = \int_{2\pi}^{x_B} (g(x) - f(x)) dx = \int_{2\pi}^{x_B} (1 - \cos(x)) dx$

avec x_B : solⁿ strict > à x_A et succédant à x_A de $\cos(x) = 1$.

Donc $x_B = 4\pi$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = \int_{2\pi}^{4\pi} (1 - \cos(x)) dx = \left[x - \sin(x) \right]_{2\pi}^{4\pi}$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = 4\pi - \sin(4\pi) - (2\pi - \sin(2\pi))$

$\mathcal{A}(\mathcal{D}_2) = 4\pi - 2\pi = 2\pi$ u.a.

Donc $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$.

Exercice V (Là on fait de la belle Mathématiques !)

122 Irrationalité du nombre e

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1. Calculer I_1 .

2. n est un nombre entier naturel tel que $n \geq 1$.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[0; 1]$,

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n.$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

3. À l'aide de la méthode d'intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1.$$

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

$$k_n = n! e - I_n.$$

a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n .

b) Calculer k_1 . Démontrer par récurrence que pour tout nombre n de $\mathbb{N}^*$, k_n est un nombre entier naturel.

c) Avec les questions 4. b) et 2. b), démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, le nombre $n! e = k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.

5. a) p et q sont deux nombres entiers naturels non nuls.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq q$, le nombre $\frac{n! p}{q}$ est un entier naturel.

b) En déduire alors que le nombre e est irrationnel.

La découverte des nombres irrationnels (ou incommensurables) remonte sans doute à l'époque de Pythagore avec le calcul de la longueur de la diagonale du carré de côté 1, cette longueur étant égale à $\sqrt{2}$. L'irrationalité du nombre e a été prouvée par Leonhard Euler en 1737.

$$1) I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx.$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{1-x} = e \times e^{-x} \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$$

Par IPP :

$$I_1 = \left[-x e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{1-x}) dx$$

$$I_1 = -1e^0 + \int_0^1 e^{1-x} dx$$

$$I_1 = -1 + \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + (-e^0 - (-e^1))$$

$$I_1 = -1 - 1 + e^1 = e - 2.$$

$$2) a) x \in [0, 1] \text{ c-à-d : } 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{Donc : } -1 \leq -x \leq 0$$

$$\text{Donc : } 0 \leq 1-x \leq 1$$

Donc $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$ par 1 de l'exp sur $\mathbb{R}$.
 $1 \leq e^{1-x} \leq e$

Donc: $x^n \times 1 \leq x^n \times e^{1-x} \leq x^n \times e$ car $x^n \geq 0$ vu que $x \geq 0$.
 Donc $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$

b) $\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 ex^n dx$ par 1 de l'intégrale.

$$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx$
 $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ u'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$
 $\begin{cases} v'(x) = e^{1-x} \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-e^{1-x}) dx$$

$$I_{n+1} = -1e^0 + (n+1) \times \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$$

4) a) $R_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1)!e - ((n+1)I_n - 1)$

$$R_{n+1} = (n+1)!e - (n+1)I_{n+1}$$

$$R_{n+1} = (n+1) \times n!e - (n+1)I_{n+1}$$

$$R_{n+1} = (n+1)(n!e - I_n) + 1$$

$$R_{n+1} = (n+1)R_n + 1$$

b) $R_1 = 1!e - I_1 = e - (e-2) = 2$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: " $R_n \in \mathbb{N}$ "

→ Initialisa°: pour $n=1$: $R_1=2$ et $2 \in \mathbb{N}$, donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

→ Héridite: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $\mathcal{P}(n)$ est vraie:

h. de réc: $R_n \in \mathbb{N}$

Or $R_{n+1} = (n+1)R_n + 1$, et par h. de réc. $R_n \in \mathbb{N}$

$$n+1 \in \mathbb{N}$$

$$1 \in \mathbb{N}$$

Or $\mathbb{N}$ est stable par $+$ et $\times$.

Donc $R_{n+1} \in \mathbb{N}$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

→ Conclusion: Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n \in \mathbb{N}$.

c) Rappel: 4b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n \in \mathbb{N}$.

$$2b) \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} < I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Soit $n \geq 2$:

$$R_n = n!e - I_n$$

$$\text{Donc } n!e = R_n + I_n$$

$$\text{Or } \frac{1}{n+1} < I_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \text{et } n \geq 2, \text{ donc } n+1 \geq 3 \text{ donc } \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } 0 < \frac{1}{n+1} < I_n \leq \frac{e}{3} < 1 \quad \text{et } e \approx 2,718 \text{ donc } e < 3 \text{ donc } \frac{e}{3} < 1$$

$$\text{Ainsi : } 0 < I_n < 1$$

$$\text{Donc } I_n \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Donc } \hat{=} R_n \in \mathbb{N}, R_n + I_n \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Ainsi } n!e \notin \mathbb{N}.$$

5) a) $p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \geq q$.

$$\text{Or } n! = 1 \times 2 \times \dots \times q \times \dots \times n$$

$$\text{Donc } \frac{n!}{q} = 1 \times 2 \times \dots \times (q-1) \times (q+1) \times \dots \times n \quad (\text{entier naturel car produit d'entiers naturels})$$

$$\text{Or } p \in \mathbb{N}^*, \text{ donc } \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N} \quad (\text{produit de 2 entiers naturels})$$

b) Par l'absurde : supposons $e = \frac{p}{q}$ où p, q entiers avec $n \geq q$.

$$\text{Donc } n \cdot e = \frac{n \cdot p}{q}$$

$$n \cdot e \notin \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \frac{n \cdot p}{q} \in \mathbb{N}$$

Donc contradictoire : $n \cdot e$ serait à la fois entier et non entier.

Donc e n'est pas quotient de 2 entiers.

Donc e irrationnel.