« En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres. » Charles Hermite

Chapitre X — ***Dénombrement et combinatoire***

I – Généralités et vocabulaire

Définition

Intuitivement, un ensemble désigne une famille "d'objets" distincts appelés les éléments de l'ensemble.

Un ensemble peut être formé de nombres, de lettres, de fruits, d'êtres humains…….

Soit n est un entier naturel, et E un ensemble composé de n éléments.

On dit que E est un ensemble fini, et le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de E, et noté $card(E)$ ou encore parfois, #(E) ou même $|E|$. Ici, $card(E) = n$.

Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on commence par mettre une accolade, puis les différents éléments de l'ensemble, séparés à chaque fois par un point-virgule, et enfin on referme l'accolade.

Dénombrer signifie *compter le nombre d'éléments* d'un ensemble.

Exemples

$E = \{a ; b ; m ; p\}$ est un ensemble fini de cardinal égal à .4. : $card(E) = 4$.

L'élément m appartient à l'ensemble E, ce qui se note : $m \in E$

Par-contre, l'élément z n'appartient pas à l'ensemble E, ce qui se note : $z \notin E$

$F = \{-1 \ ; \ 2{,}5 \ ; \ 6 \ ; \ \pi \ ; \ \frac{1}{9}\}$ est un ensemble fini de cardinal égal à .5. : $card(F) = 5$..

Remarques : Il existe des ensembles qui ne sont pas finis, comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ par-exemple !

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note : $\varnothing$.

L'ordre des éléments dans un ensemble n'intervient pas : $\{a ; b ; c\} = \{b ; a ; c\}$

$\{1 \ ; \ 2\} = \{2 \ ; \ 1\}$.

Deux *ensembles sont égaux* lorsqu'ils contiennent *exactement les mêmes éléments*.

Il n'y a ***pas de répétitions d'éléments*** au sein d'un ensemble : par exemple, on n'écrira pas : $\cancel{\{a ; a\}}$ mais $\{a\}$!

Définition

Deux ensembles sont ***disjoints*** lorsqu'ils n'ont ***aucun élément en commun***, c'est-à-dire que ***leur intersection est vide***.

Pour dire que des ensembles A et B sont disjoints on notera : $A \cap B = \varnothing$: on lira : A *inter* B est vide ($\cap$ est le symbole désignant l'intersection).

Par exemple, $A = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3\}$; $B = \{6 \ ; \ 17\}$: A et B sont disjoints.

Définitions

Soit E un ensemble.

On appelle partie de E (ou encore sous-ensemble de E), tout ensemble F dont chacun des éléments appartiennent aussi à E.

On dit que F est inclus (ou contenu) dans E et on note cela : $F \subset E$.

Exemple

$E = \{a\,;e\,;i\,;o\,;u\,;y\}$, et $F = \{e\,;u\}$: on a $F \subset E$. De même, $\{0\ ;1\} \subset \{0\ ;\ 1\ ;\ 5\}$.

Rappelons enfin que :

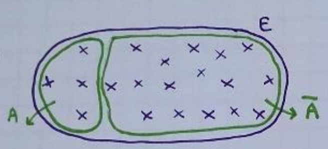
- L'intersection de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, (lire A inter B) est l'ensemble des éléments appartenant simultanément à A et à B.

- La réunion de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ (lire A union B) est l'ensemble dont les éléments appartiennent à au moins un des deux ensembles A ou B. Rq : $A \cap B \subset A \cup B$

- Si E est un ensemble et A un sous-ensemble de E, le complémentaire de A dans E, noté $\bar{A}$, est l'ensemble formé par tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

$\complement_E A = \bar{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$.

Illustration :



Exemple

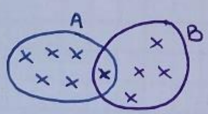
i) Si $A = \{e\,;f\,;g\,;h\}$ et $B = \{f\,;t\,;u\}$, alors : $A \cap B = \{f\}$ et $A \cup B = \{e\,;f\,;g\,;h\,;t\,;u\}$

ii) Si $E = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 8\ ;\ 11\}$ et $A = \{2\ ;\ 3\ ;\ 11\}$, déterminer $\bar{A}$. $\bar{A} = \{0\,;1\,;8\}$

Remarque

Attention, lorsqu'on a deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, il est fréquent que A ne soit pas inclus dans B et que B ne soit pas inclus dans A.

Illustration :



$A \not\subset B$ et $B \not\subset A$

Définitions

Soit E un ensemble.

Une *partie de E* constituée *d'un seul élément* est appelée un ***singleton***.

Par exemple, si E = {chien ; chat ; poisson}, F = {chien} est un singleton.

Si $E = \{-8\ ;\ 5\ ;\ 3\}$, $F = \{5\}$ est un singleton.

Quel est le nombre de singletons d'un ensemble E ayant pour cardinal n ? n

Si E contient au moins deux éléments, on appelle paire toute partie de E *constituée d'exactement deux éléments.*

Par exemple, $\{2\ ;\ 3\}$; {chien ; chat} ; {trèfle ; cœur} sont des exemples de paires.

L'ensemble dont les éléments sont les différentes parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$ et appelé ensemble des parties de E.

Exemples

Déterminer l'ensemble des parties de l'ensemble E dans chacun des cas suivants, et préciser le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ dans chacun des cas suivants :

i) $E = \{1\}$

ii) $E = \{1\ ;\ 2\}$

iii) $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$

iv) $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}$.

i) $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\ ;\ \{1\}\}$: $card(\mathcal{P}(E)) = 2$

ii) $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\ ;\ \{1\}\ ;\ \{2\}\ ;\ \{1\ ;\ 2\}\}$: $card(\mathcal{P}(E)) = 4$

iii) $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{c\}\ ;\ \{a\ ;\ b\}\ ;\ \{b\ ;\ c\}\ ;\ \{a\ ;\ c\}\ ;\ \{a\ ;\ b\ ;\ c\}\}$: $card(\mathcal{P}(E)) = 8$

iv) $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{c\}\ ;\ \{d\}\ ;\ \{a\ ;\ b\}\ ;\ \{a\ ;\ c\}\ ;\ \{a\ ;\ d\}\ ;\ \{b\ ;\ c\}\ ;\ \{b\ ;\ d\}\ ;\ \{c\ ;\ d\}\ ;$
$\{a\ ;\ b\ ;\ c\}\ ;\ \{b\ ;\ c\ ;\ d\}\ ;\ \{a\ ;\ c\ ;\ d\}\ ;\ \{a\ ;\ b\ ;\ d\}\ ;\ \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\}\}$: $card(\mathcal{P}(E)) = 16$

Remarques : si $E = \varnothing$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$: en particulier, $card\ (\mathcal{P}(E)) = 1$.

Quelle conjecture légitime peut-on émettre sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, lorsque E est un ensemble de cardinal n ? 2^n

Définition

Soit E un ensemble non vide, et k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On appelle *k-liste* de E (*k -liste* est une abréviation de liste de longueur k), ou encore *k-uplet* de E, une *liste ordonnée* formée de k éléments (non nécessairement distincts) de E.

Les éléments d'une telle liste ordonnée sont appelés coordonnées, ou encore composantes.

On note avec des ***parenthèses*** un *k-uplet*, chacun de ses éléments étant séparés du suivant par une virgule ou un point-virgule.

Exemples

Si $E = \{0\ ;\ 1\}$, alors :

$(0\ ;\ 1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est une 4-liste (ou 4-uplet) de E, $(0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ est un autre 4-uplet (*attention l'ordre des éléments est fondamental dans une k-liste*).

$(0\ ;\ 1)$ est une 2-liste de E et $(1\ ;\ 0)$ est une autre 2-liste de E.

$(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est une 3-liste de E, $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est un autre 3-uplet de E.

Citer un octet de E, c'est-à-dire une 8-liste d'éléments de E : (0;1;1;0;1;1;1;1)

Concrètement, un code de carte bleue est une 4-liste de l'ensemble des chiffres.

Remarque : dans un *k-uplet*, il peut donc y avoir ***répétition*** d'un ou plusieurs éléments, et l'***ordre*** des éléments est ***fondamental***.

Définition

Une *2-liste* est appelé un ***couple***.

Attention, l'ordre des éléments dans un couple est fondamental : $(a\ ;b) \neq (b\ ;a)$: penser aux coordonnées d'un point dans le plan !

Les composantes d'un couple peuvent être identiques ! C'est le cas du couple $(0\ ;\ 0)$!

Une *3-liste* est appelé un ***triplet*** : par exemple, en géométrie dans l'espace, on a vu qu'un point peut être repéré à l'aide d'un triplet de nombres réels.

$(6\ ;\ 2{,}5\ ;\ 3)$ est un exemple de triplet de réels.

Définition

Soit E et F deux ensembles non vides (non nécessairement finis).

Le produit cartésien des ensemble E et F, que l'on note $E \times F$ (lire E croix F) est l'ensemble formé par tous les couples $(x\ ;y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$E \times F = \{(x\ ;y)\ /\ x \in E, y \in F\}$. (Le slash / signifie tel que lorsqu'il est écrit dans un ensemble).

Le symbole × (croix) ne doit pas être confondu avec celui de la multiplication !!

Exemples

1) $E = \{a\ ;b\ ;c\}$ et $F = \{b\ ;e\}$.

Déterminer le produit cartésien : $E \times F = \{(a;b);(a;c);(b;b);(b;e);(c;b);(c;e)\}$

2) Ici, $E = \{3\ ;\ 2\ ;\ 1\}$ et $F = \{0\ ;\ 1\}$. Déterminer les produits cartésiens $E \times F$, puis $F \times E$.

A-t-on $E \times F = F \times E$?

2679

2) $E \times F = \{(3;0);(3;1);(2;0);(2;1);(1;0);(1;1)\}$

$F \times E = \{(0;3);(0;2);(0;1);(1;3);(1;2);(1;1)\}$

$E\times F \neq F \times E$ car $(3;0) \in E\times F$ et $(3;0) \notin F \times E$

On retiendra donc que le produit cartésien d'ensembles ..n'est...pas..commutatif.................

3) Soit $C = \{(6\ ;\ 2)\ ;\ (6\ ;\ 4)\ ;\ (5\ ;\ 2)\ ;\ (5\ ;\ 4)\ ;\ (10\ ;\ 2)\ ;\ (10\ ;\ 4)\ ;\ (3\ ;\ 2)\ ;\ (3\ ;\ 4)\}$

Ecrire l'ensemble C sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles. $C = \{3;5;6;10\} \times \{2;4\}$

Si $E = F$, on a : $E \times F = E \times E$ qui est noté E^2.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble formé par tous les couples de réels (géométriquement $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points du plan !). $\mathbb{R}^2 = \{(x\ ;\ y)\ /\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

__Remarques__ : on peut étendre la définition du produit cartésien à plus de deux ensembles :

Si E, F, G désignent trois ensembles, le produit cartésien $E \times F \times G$ (lire E croix F croix G) est l'ensemble des triplets de la forme $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$.

__Exemple__ : Déterminer $E \times F \times G$ sachant que : $E = \{a\}$, $F = \{b\ ;\ c\}$ et $G = \{a\ ;\ b\ ;\ d\}$.

$E \times F \times G = \{(a;b;a);(a;b;b);(a;b;d);(a;c;a);(a;c;b);(a;c;d)\}$

Si $E = F = G$, alors $E \times F \times G = E \times E \times E = E^3$.

Par exemple, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble formé par tous les triplets de réels (géométriquement, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points de l'espace).

__Plus généralement__ : (définition du produit cartésien de k ensembles) :

Si k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E_1, E_2, ...E_k sont des ensembles non vides, on appelle produit cartésien des ensembles E_1, E_2, ...E_k, l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times ..... \times E_k$, dont les éléments sont les *k-uplets* de la forme $(a_1\ ;\ a_2\ ;......;\ a_k)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, ..., $a_k \in E_k$

$E_1 \times E_2 \times ..... \times E_k = \{(a_1\ ;\ a_2\ ;......;\ a_k)\ /\ a_1 \in E_1,\ a_2 \in E_2,\ ....,\ a_k \in E_k\}$.

__II- Principes simples de dénombrement__

__A-Le principe additif__

n et p sont deux entiers naturels.

Soit E et F deux ensembles finis et ***__disjoints__*** tels que : $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Le nombre d'éléments de l'ensemble $E \cup F$ est égal à .n.+.p.

On a donc, ***lorsque E et F sont disjoints*** : $card(E \cup F)$ = .card.(E).+.card.(F)

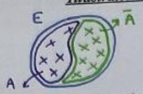
En pratique, si vous avez deux sacs de billes, une façon de compter le nombre total de billes que vous possédez est de compter le nombre de billes de chaque sac, puis d'additionner ces deux cardinaux.

Exemple

Si $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{y ; z\}$, alors, comme E et F sont disjoints, on a : $card(E \cup F) = 3 + 2 = 5$

En particulier, si A est un sous-ensemble d'un ensemble fini E, on a : $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$

Illustration et justification :



$A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cap \bar{A} = E$

Donc d'après le principe additif : $card(A) + card(\bar{A}) = card(E)$

$card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$

De même le principe additif s'étend à plus de deux ensembles :

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_p$ sont p ensembles finis et *deux à deux disjoints*, alors :

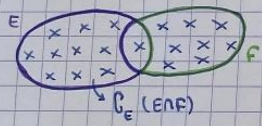
$card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + \ldots + card(E_p) = \sum_{i=1}^{n} card(E_i)$

Rigoureusement on note : $card\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card(E_i)$

Revenons au cas général de deux ensembles finis E et F, ***non nécessairement disjoints*** :

On a : $card(E \cup F) = card(E) + card(F) - card(E \cap F)$.....

Illustration et preuve :



$E \cup F = C_E(E \cap F) \cup F$

disjoints

Donc : $card(E \cup F) = card(C_E(E \cap F)) + card(F)$

$card(E \cup F) = card(E) - card(E \cap F) + card(F)$

Exemple

1) Dans un club de sport de 90 adhérents, 35 pratiquent le tennis, 24 pratiquent le football et 8 pratiquent chacun de ces deux sports.

a) Déterminer le nombre d'adhérents pratiquant au moins un des deux sports (parmi tennis et football).

b) En déduire le nombre d'adhérents du club ne pratiquant ni tennis ni football.

c) Déterminer le nombre d'adhérents du club pratiquant un seul des deux sports parmi tennis et football.

a) $\text{card}(T \cup F) = \text{card}(T) + \text{card}(F) - \text{card}(T \cap F)$
$\text{card}(T \cup F) = 35 + 24 - 8 = 51$

b) On cherche $\text{card}(\overline{T} \cap \overline{F})$:

$\text{card}(\overline{T} \cap \overline{F}) = \text{card}(\overline{T \cup F}) = \text{card}(E) - \text{card}(T \cup F) = 90 - 51 = 39$

c) On cherche ici : $\text{card}((T \cap \overline{F}) \cup (\overline{T} \cap F)) = \text{card}(T \cap \overline{F}) + \text{card}(\overline{T} \cap F) = 27 + 16 = 43$

avec $T = \underbrace{(T \cap \overline{F}) \cup (T \cap F)}_{\text{disjoints}}$

$\underbrace{\text{card}(T)}_{35} = \text{card}(T \cap \overline{F}) + \underbrace{\text{card}(T \cap F)}_{8}$

$\text{card}(T \cap \overline{F}) = 35 - 8 = 27$

De m̂ : $\text{card}(\overline{T} \cap F) = 24 - 8 = 16$

2)

a) Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un même ensemble fini E.

Déterminer une formule donnant $\boldsymbol{card}(A \cup B \cup C)$.

b) 30personnes mangent dans un restaurant : 26 ont pris un plat (A), 14 une entrée (B), et 20 un dessert (C).

6 ont pris "entrée, plat, dessert", 4 ont pris "entrée, plat", et 3 ont seulement pris une entrée.

Aucune personne n'a pris qu'un dessert.

Combien de personnes n'ont pris qu'un plat ? 3

2) a) $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}((A \cup B) \cup C)$

$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$ avec $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$: intuitif

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

b) 14 : entrée = entrée seule ∪ (ent, pl, dessert) ∪ (ent, pl) ∪ (ent, D)
3 : entrée seule
6 : entrée, plat, dessert
4 : ent, plat

Donc 1 pers a pris entrée et dessert.

Dessert : 20 → 6 e ; p ; d
→ 1 e ; d
→ 13 d ; p

26 plats → 6 e ; p ; d
→ 4 e ; p
→ 13 d ; p.

26 - (6 + 4 + 13) = 3 plat unique

B - Le principe multiplicatif

Principe multiplicatif :

n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

Soient E et F deux ensembles finis et non vides tels que $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Alors le produit cartésien $E{\times}F$ est un ensemble fini et on a : $card(E{\times}F) = n.x.p$

En effet, $card(E{\times}F)$ peut être vu comme le nombre de cases à remplir à l'aide de couples, dans un tableau à double entrée contenant, par exemple, en ligne les éléments de E et en colonne ceux de F.

Exemple

Si $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{1 ; 2\}$: $card\,(E \times F) = \ldots$

E \ F	1	2
a	$(a ; 1)$	$(a ; 2)$
b	$(b ; 1)$	$(b ; 2)$
c	$(c ; 1)$	$(c ; 2)$

$E{\times}F$ est l'ensemble formé par les six couples écrits dans ce tableau !

On aurait aussi pu schématiser le produit cartésien par un arbre également :

Remarque : le principe multiplicatif se généralise au produit cartésien de plusieurs ensembles :

Si E_1, E_2, ...E_k sont des ensembles finis non vides :

$card(E_1 \times E_2 \times \ldots\times E_k) = card(E_1)\times card(E_2)\times\ldots\times card(E_k)$.

Exemples

1) A la cantine un repas simple est constitué d'une entrée et d'un plat.

La cantine propose trois entrées et deux plats. Déterminer le nombre de repas simples différents que vous pouvez constituer.

2) Un repas complet est composé d'une entrée, un plat et un dessert.

Vous avez le choix entre trois entrées, deux plats, et 4 desserts. Dénombrer combien de repas complets différents on peut constituer.

1) 3 choix d'entrée possibles
2 choix de plats possibles

Il y a $3 \times 2 = 6$ repas simples.

$E = \{e_1 ; e_2 ; e_3\}$ $P = \{P_1 ; P_2\}$

Un repas est un couple $(x ; y)$ où $x \in E$ et $y \in P$

On cherche ici $card(E \times P) = card(E) \times card(P) = 3 \times 2 = 6$

2) Il y a $3 \times 2 \times 4 = 24$ repas complets.

Propriété

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n, et k un entier naturel non nul.

Le nombre de k-listes (ou *k-uplets*) de E est égal à ...n^k..., c'est le cardinal du produit cartésien E^k.

Preuve : Par récurrence sur k ! $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k)$

Exercice 1

a) Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à partir de l'alphabet usuel formé de 26 lettres ?

b) On dispose de 3 tiroirs dans une commode, et on veut y ranger 5 caleçons. Dénombrer combien de rangements on peut faire de ces 5 caleçons.

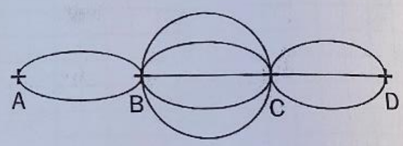
c) Un code d'immeuble est constitué de 4 chiffres ou de 4 chiffres suivi d'une une lettre prise parmi les lettres A et B.

Dénombrer le nombre total de codes possibles dans cet immeuble.

d) Un QCM est constitué de 6 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, et une seule est exacte.

Dénombrer de combien de façons différentes on peut répondre à ce QCM, en cochant systématiquement une réponse par question.

e) De combien de façons différentes peut-on répondre à ce QCM si on s'autorise de ne pas répondre à une question lorsqu'on n'est pas sûr de soi ?



g) On considère le diagramme ci-contre.

Combien d'itinéraires différents conduisent de A à D (sans passer deux fois par un même point) ?

h) Combien y-a-t-il de couples (respectivement de triplets) dans un ensemble à n éléments ($n \geq 3$).

i) n étant un entier naturel, combien y-a-t-il de *n-uplets* de l'ensemble $\{0 \ ; \ 1\}$?

a) (26 choix ; 26 choix ; 26 choix)

Autant que de triplet de l'ensemble $E = \{a ; b ; c ; \dots ; z\}$: card$(E) = 26$

Donc il y en a $26^3 = 17576$ mots de 3 lettres.

b) $\square$ $\square$ $\square$ $(c_1 ; c_2 ; c_3 ; c_4 ; c_5)$

t_1 t_2 t_2

Donc il y a $3^5 = 243$ façons de les placer.

c) $C = Q \cup L$ → codes à 4 chiffres suivi d'une lettre (A ou B)

codes à 4 chiffres

union disjointe

ensemble de ts les codes d'immeuble

Or card(Q) = 10^4 (autant que de 4-listes d'éléments de $E = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Et card(L) = $10^4 \times 2 = 20\,000$ $(c_1 ; c_2 ; c_3 ; c_4 ; 1)$

10 chiffres 2 choix

Donc (p^{ce} additif) : card(C) = card(Q) + card(L) = 10 000 + 20000 = 30 000.

d) $(x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 ; x_6)$

4 choix

Il y a autant de façons de répondre que de 6-listes d'éléments de l'ensemble B (de cardinal 4).

Donc : 4^6 façons

Donc 4096 façons.

e) On cherche les 6-listes d'éléments de l'ensemble : $\{A ; B ; C ; D ; \emptyset\}$

Donc : 5^6 façons

Donc 15625 façons.

g) $A \to B$: 2 choix
$B \to C$: 5 choix
$C \to D$: 3 choix

Par p^{ce} multiplicatif : $2 \times 5 \times 3 = 30$ chemins pour aller de A à D.

h) $n \geqslant 3$. E est de cardinal n.

$(c_1 ; c_2)$ donc autant que 2 listes de E, càd : n^2 couples !

n choix

$(c_1 ; c_2 ; c_3)$ donc autant de triplets que de 3-listes de E càd n^3 triplets.

i) $(c_1 ; c_2 ; \dots ; c_n)$ → 2 choix

2 choix 2 choix

Par p^{ce} multiplicatif, il y a : 2^n n-uplets de E.

Théorème **(*nombre de parties d'un ensemble fini*).**

Soit n un entier naturel.

Un ensemble fini E de cardinal n possède 2^n parties distinctes, c'est-à-dire : $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Preuve : Nous donnerons en fin de chapitre une preuve des plus naturelles de ce résultat.

En attendant, voici, à titre culturel, une démonstration par récurrence de ce résultat :

Par récurrence sur n :

Notons, pour tout entier naturel n, $Q(n)$ la propriété suivante : " un ensemble à n éléments admet 2^nparties distinctes".

Initialisation : pour $n = 0$, si $card(E) = 0$, alors $E = \varnothing$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$, donc $card(\mathcal{P}(E)) = 1$.

Or $2^0 = 1$, donc $card(\mathcal{P}(E)) = 2^0$, et par suite, $Q(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit E un ensemble à n éléments. On suppose que $Q(n)$ est vraie, c'est-à-dire qu'un ensemble E à n éléments possède exactement 2^n parties distinctes.

Soit E' un ensemble à $n+1$ éléments. Montrons que $card(\mathcal{P}(E')) = 2^{n+1}$.

Listons E' : $E' = \{x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n, x_{n+1}\} = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\} \cup \{x_{n+1}\} = E \cup \{x_{n+1}\}$ où $E = \{x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n\}$ est un ensemble de cardinal n.

Les parties de E' sont de deux sortes : celles qui contient l'élément x_{n+1} et celles qui ne contiennent pas cet élément : ↳ sous-ensemble

- Les parties de E' contenant l'élément x_{n+1} sont au nombre de : 2^n (autant que de parties d'un ens. à n éléments) d'après h. réc.
- Les parties de E' ne contenant pas l'élément x_{n+1} sont au nombre de : 2^n (on exclut x_{n+1}, il reste n élém. pr créer notre partie).

Notons F (respectivement G) l'ensemble des parties de E' correspondant au premier tiret (respectivement, second tiret) : F et G sont disjoints car une partie ne peut pas contenir l'élément x_{n+1} et ne pas contenir cet élément !

De plus, $F \cup G = E'$, *donc*, d'après le principe additif, on a donc : $card(E') = card(F) + card(G)$
$= 2^n + 2^n = 2^n(1+1) = 2^n \times 2$
$= 2^{n+1}$

Exemple

Dans un ensemble à 8 éléments combien y-a-t-il de parties distinctes au total ? $2^8 = 256$ parties !

C- Arrangements et permutations

1) La notion de factorielle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On appelle factorielle n (ou encore n factorielle), le nombre noté $n!$, qui est égal au produit de tous les nombres entiers de 1 à n.

Ainsi : $\boxed{n\,! = 1\times 2\times\dots\times n}$

Par exemple : $1\,! = 1$; $2\,! = 1\times2 = 2$; $3\,! = 1\times2\times3 = 6$; $4\,! = 1\times2\times3\times4 = 24$.

Combien vaut 5! ? $5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$.

A l'aide de la calculatrice, trouver la valeur de 11 ! (Taper : $\boxed{math}$ puis dans $\boxed{PROB}$ se trouve le symbole ! de la factorielle).

Attention, les valeurs prises par n ! augmentent très vite avec n, votre calculatrice n'arrive plus à afficher une valeur approchée de n ! dès que $n \geq 70$.

On convient que : $0\,! = 1$.

Pour tout entier naturel n, on a : ♥♥ $\boxed{(n+1)\,! = (n+1) \times n!}$ ♥♥ (Relation fondamentale)

Pourquoi la relation précédente au fait ?

$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1)$

$(n+1)! = n! \times (n+1)$

ex : $6! = 6 \times 5!$

$8! = 8 \times 7!$

Exercice 2

1) Simplifier au mieux les écritures suivantes :

$A = \frac{10!}{7!}$; $B = \frac{3!}{6!}$; $C = \frac{10!}{3! \times 8!}$; $D = \frac{7!-5!}{4!}$

$E = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ où n est entier naturel. $F = \frac{n!}{(n-2)!}$ où n est un entier supérieur à 2.

Pour G et H, n est un entier supérieur à 1 : $G = \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$, et $H = \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$.

2) Ecrire à l'aide d'un produit ou quotient de factorielles uniquement, chacune des expressions suivantes :

$A = 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$; $B = n(n+1)(n+2)$; $C = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4}$; $D = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{7 \times 6 \times 5}$

$E = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$, où $2 \leq k \leq n$.

1) $A = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

$B = \frac{3!}{6!} = \frac{\cancel{3!}}{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}} = \frac{1}{120}$

$C = \frac{10!}{3! \times 8!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{6 \times \cancel{8!}} = 15$

$D = \frac{7!-5!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4! - 5 \times 4!}{4!}$

$D = \frac{\cancel{4!}\,(7 \times 6 \times 5 \times 4 - 5)}{\cancel{4!}} = 205$

$E = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

Dénominateur commun : $(n+1)!$ avec $(n+1)! = (n+1) \times n!$

$E = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

$F = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

$G = \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{(n-1)!}{(n+2)(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

$H = \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \times n!}{n!} - \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n+1-n = 1$.

2) $A = 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

$A = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4} = \frac{10!}{4!}$

$B = n(n+1)(n+2)$

$B = \frac{(n-1)! \times n(n+1)(n+2)}{(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

$C = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6! \times 3!}{6 \times 5 \times 4 \times 3! \times 6!} = \dfrac{10! \times 3!}{(6!)^2}$

$E = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

$E = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \times (n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Exercice 3

On considère l'algorithme ci-contre, où n est un entier naturel non nul.

```
f ← 1
Pour i allant de 1 à n
  | f ← f* i
Fin Pour
```

1. Déterminer ce que contient la variable f en fin d'algorithme pour $n = 4$. 24

2. Quel est le rôle de cet algorithme ? Il permet de calculer $n!$ pour n entier non nul choisi par l'utilisateur.

3) Compléter le programme en Python ci-dessous afin que la fonction factorielle retourne en sortie le nombre $n!$, où n est un entier non nul quelconque) :

```
def factorielle(n):
    P=1
    for i in range(.1.,n+1):
        P=.P*i
    return(.P.)
```

$\rightarrow 1 \leq i < n+1 \iff 1 \leq i \leq n$
car n entier

2) Définition (arrangement)

Soient k et n des entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$, et E un ensemble à n éléments.

On appelle ***k-arrangement*** de E (qui est une abréviation d'arrangement de k éléments de E) ou encore ***k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E***, tout k-uplet de E formé d'éléments de E ***deux à deux distincts*** (c'est-à-dire ***tous différents, aucune répétition d'élément***).

Exemple

Si $E = \{1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; 4\}$, alors $(2 \; ; \; 4 \; ; \; 1)$ est un 3-arrangement de E.

$(1 \; ; \; 2 \; ; \; 4)$ est un autre 3-arrangement de E différent du précédent.

Comme pour les k-listes, ***l'ordre des éléments est fondamental dans un k-arrangement.***

Propriété

Soient k et n des entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$, et E un ensemble à n éléments.

Le nombre de ***k-arrangements*** de E est égal à : ..$n(n-1)\ldots\times(n-k+1)$..... (Produit de k facteurs).

En utilisant des factorielles, on a : $n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Preuve : Ecrire un *k-uplet* d'éléments de E deux à deux distincts revient à choisir d'abord dans E un premier élément : n choix sont possibles.

Ce choix étant fait, on a alors $n-1$ choix possible pour le second élément du *k-uplet* (pas de répétition !).

Ainsi de suite, les positions $1,2,\ldots,k-1$ du k-uplet étant occupées par un élément de E, il reste donc pour le dernier éléments du *k-uplet*, $n-(k-1)$ éléments de E comme choix possibles.

Dénombrer les k-uplets d'éléments de E deux à deux distincts revient à chercher le cardinal du produit cartésien suivant constituant E :

$E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_k$ où : $E_1 = E$ (choix du 1° élément *du k-uplet*, noté x_1) ; $E_2 = E_1 - \{x_1\}$ donc $card\ (E_2) = n-1$.

etc..... $E_k = E_1 - \{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_{k-1}\}$, donc $card(E_k) = n-(k-1)$.

D'après le principe multiplicatif, on a donc : $\boldsymbol{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}$ *k-uplets* d'éléments deux à deux distincts dans E.

Exercice 4

a) Sur un clavier numérique, combien y-a-t-il de codes à quatre chiffres distincts ?

b) Combien de mots de 7 lettres sans aucune lettre répétée peut-on écrire à l'aide de l'alphabet français ?

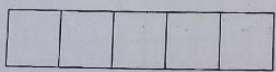
c) A une compétition participent 20 athlètes. En fin de compétition un podium est constitué d'une médaille d'or, une médaille d'argent et une médaille de bronze.

Déterminer le nombre de podium différents qu'on peut réaliser avec ces 20 athlètes.

d) Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire une première boule de l'urne, puis sans la remettre, on tire une seconde boule de l'urne, et enfin sans remettre les boules tirées on procède à un troisième tirage de boule de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages possibles de ces trois boules de l'urne, en tenant compte de l'ordre.

e) On considère le motif suivant.



Combien y a-t-il de façons de colorier le motif :
a. à l'aide de quatre couleurs ?
b. à l'aide de six couleurs, sans utiliser deux fois la même couleur ?
c. à l'aide de trois couleurs sans que deux cases adjacentes ne soient de la même couleur ?

a) □□□□ 10 ch. 9 ch 8 ch. 7 ch. Autant que de 4-arrangements de E où E = {0 ; 1 ; 2 ; ... ; 9}.

Il y a : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

b) $E = \{a ; b ; \dots ; z\}$: card $(E) = 26$.

"mot" $= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$

7 lettres

x_1 : 26 ch ; x_2 : 25 ch ; x_3 : 24 ch ; x_4 : 23 ch ; x_5 : 22 ch ; x_6 : 21 ch ; x_7 : 20 choix

Donc il y a : $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 = \dfrac{26!}{19!}$

$\to$ 3315312000

c) $(1^{er} ; 2^{nd} ; 3^e)$

1^{er} : 20ch ; 2^{nd} : 19ch ; 3^e : 18ch

Il y a : $20 \times 19 \times 18 = 6840$ podiums possibles.

(Autant que 3-arrangements d'un ensemble E de cardinal 20).

d) $(b_1 ; b_2 ; b_3)$

b_1 : 10 choix ; b_2 : 9ch ; b_3 : 8ch

Autant que de triplet d'éléments 2 à 2 distincts, de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

Donc $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles.

e) a. Autant que de 5 listes de l'ensemble E formé par les 4 couleurs
càd : $4^5 = 2024$ façons de colorier les 5 cases.

b. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

6ch 5ch 4ch 3ch 2ch

Autant que de 5 arrangements de E' formé par les 6 couleurs.

Donc : $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ façons $\neq$.

c. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

3ch 2ch 2ch 2ch 2ch

$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^4 = 48$.

3) Permutations

Définition

n est un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

Une ***permutation de E*** est un ***n-uplet*** d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemples

Si $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, alors le triplet $(b\ ;\ a\ ;\ c)$ est une permutation de E, $(c\ ;\ b\ ;\ a)$ est une autre permutation de E.

Déterminer toutes les permutations de l'ensemble E et préciser leur nombre.

(a;b;c) ; (a;c;b) ; (b;a;c) ; (b;c;a) ; (c;a;b) ; (c;b;a)

> ***Propriété***
>
> ***♥Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) est égal à : ..n!..♥***

Preuve : Il suffit d'appliquer la propriété précédente qui donne le nombre de k-uplets de E lorsque $k = n$.

Le nombre de n-arrangements de E, c'est-à-dire le nombre de permutations de E est égal à :

$n(n-1)\ldots\ldots(n-n+1) = n(n-1)\ldots.\times 1 = n!$

Remarque : dans une permutation, l'ordre des éléments est fondamental, et tous les éléments de E figurent une fois et une seule au sein de cette permutation.

Exercice 5

1a) Combien de mots de 5 lettres (ayant un sens ou pas) peut-on former avec les 5 lettres du mot *CHIEN* ?

Culture : ces mots sont appelés des anagrammes du mot CHIEN, c'est-à-dire des mots s'écrivant avec exactement les mêmes lettres que celles du mot CHIEN.

1b) Parmi ces mots, combien commencent par une voyelle ?

2) 10 chevaux font une course. Combien y-a-t-il d'ordre d'arrivée possibles (en supposant qu'il n'y a pas d'ex-aequo et que tous terminent la course) ?

3) Lucie souhaite ranger horizontalement sur un même étage de sa bibliothèque ses 4 livres de Mathématiques différents, 3 livres de Physique différents et 2 livres de SVT distincts.

a) Dénombrer le nombre de façon de ranger tous ses livres.

b) Combien existe-t-il de façons différentes de ranger tous ses livres en les regroupant par matière ?

3) Si l'on faisait une photo des 89 valeureux élèves ayant choisi la spécialité maths au LAB durant l'année scolaire 2023-2024, placés sur un banc rectiligne suffisamment long, de combien de façons pourrait-on les placer sur ce banc ?

Comparer au nombre d'atomes de l'univers estimé à 10^{80}.

1a) $5! = 120$

1b) $\square \; \underbrace{\square \; \square \; \square \; \square}$

voyelle = E ou I ⇒ 2 choix

on doit écrire une permuta° des 4 lettres restantes càd 4! possibles

Donc d'après le principe multiplicatif, on a : $2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$ tels mots.

2) $10! = 3628800$

3) a) Lucie a $4+3+2 = 9$ livres.

Donc il y a $9!$ façons de placer les 9 livres sur l'étagère càd 362880.

b) On cherche le nb de permuta° des 3 matières M, PC, SVT : il y a $3! = 6$ façons de fabriquer l'ordre des matières.

Pour chacune des matières, il reste à permuter chacun de ses livres :

Maths : 4! permuta°
PC : 3! permuta°
SVT : 2! permuta°

Donc par p^{e} multiplicatif, il y a :
$N = 3! \times 4! \times 3! \times 2!$
$N = 6 \times 24 \times 6 \times 2 = 1728$ façons de placer les livres par matières.

3) Autant que de permuta° d'un ensemble à 89 éléments : $89!$.

Soit de l'ordre des $10^{136} >> 10^{80}$

Exercice 6

On prendra pour longueur d'une année 365 jours.

1) Dans une classe de 23 élèves, déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves qui aient la même date d'anniversaire (indépendamment de l'année de naissance).

Donner la valeur exacte à l'aide de factorielles, puis une valeur approchée au centième près (utiliser Python, votre calculatrice risque d'être en dépassement de capacité sinon).

2) Reprendre cette question avec une classe de 31 élèves, puis une autre classe de 35 élèves, puis une assemblée de 50 personnes.

Ces résultats vous surprennent-ils ?

1) A = "Au - 2 élèves de classe st nés un m̂ j".

$\bar{A}$ = "Aucun des élèves n'est nait le m̂ j".

$p(\bar{A}) = \dfrac{\text{nb de cas favorables à la réalisa° de } \bar{A}}{\text{nb total de cas}}$

$p(\bar{A}) = \dfrac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 343}{365^{23}}$ → card $(\bar{A})$

card $(\bar{A})$ = nb d'arrangements de 23 éléments pris ds un ensemble E de cardinal 365.

card $(\bar{A}) = \dfrac{365!}{342!}$

$p(\bar{A}) = \dfrac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}}$

Donc $P(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \dfrac{365!}{342! \times 365^{23}}$

$P(A) \approx 0{,}507$.

2) 31 élèves : $p(A) = 1 - \dfrac{365!}{334! \times 365^{31}}$

$p(A) \approx 0{,}73$

35 élèves : $p(A) \approx 0{,}814$

4) Combinaisons

Définition

Soit n un entier naturel et E un ensemble à n éléments et k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

On appelle ***combinaison de k éléments de E toute partie*** (= sous-ensemble de E) ***ayant k éléments, (c'est-à-dire de cardinal k).***

Exemple

Si $E = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$, alors $\{1\ ;5\}$ est une combinaison de deux éléments de E.

$\{5\ ;\ 1\}$ désigne la même combinaison que $\{1\ ;\ 5\}$!

D'après le paragraphe initial sur les ensembles, on peut donc dire que :

Remarques fondamentales

- *Dans une combinaison, l'ordre des éléments n'intervient pas !*
- *Dans une combinaison, il n'y a aucune répétition d'élément !*
- *Si $p > n$, alors il n'y a aucune (= 0) combinaison de p éléments dans un ensemble de cardinal n.*

Notation

Le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi les n éléments de E se note : $\dbinom{n}{k}$ et se lit :

k parmi n. Le nom savant de $\dbinom{n}{k}$ est coefficient binomial.

Exemple

Soit $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$. Ici, $card(E) = ..3...$, donc $n = .3.$

1*a*) Ecrire la liste des combinaisons de E formées d'un seul élément : $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$

1*b*) Combien y a-t-il de telles combinaisons ? En déduire la valeur de $\binom{3}{1} = 3$

2) Ecrire la liste des combinaisons de E formées de *deux* éléments. Combien y-en-a-t-il ? En déduire la valeur de $\binom{3}{2}$. $\{a\,;b\}$; $\{a\,;c\}$; $\{b\,;c\}$. Il y a 3 paires de E. Dans $\binom{3}{2} = 3$.

3) Ecrire la liste des combinaisons de E formées de 3 éléments. En déduire la valeur de $\binom{3}{3} = 1$

$\{a\,;b\,;c\}$

4) Combien vaut $\binom{3}{0}$? Pourquoi ? Nb de parties de E ayant pour cardinal 0 : il y en a une seule : $\emptyset$. Donc $\binom{3}{0} = 1$.

✂---

Exercice 7

Trouver les valeurs de : $\binom{n}{n}$; $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{1}$ en expliquant votre démarche.

$\binom{n}{n} = 1$ car si E est de cardinal n, E contient un seul sous-ensemble de cardinal n : E lui m̂.

$\binom{n}{0} = 1$ car $\emptyset$ est le seul sous-ensemble de E de cardinal 0.

$\binom{n}{1} = n$ car il y a n singleton ds tt ensemble de cardinal n.

Nous allons établir une relation fondamentale permettant de calculer la valeur de $\binom{n}{k}$.

Propriété clé

Soient n et k deux entiers naturels tels que : $0 \le k \le n$.

♥♥ $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ♥♥

Remarque *: si $k \ge 1$, alors* $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots\times 2}$ (*notation en extension*).

Preuve :

✂---

Soit E un ensemble de cardinal n et $0 \leqslant k \leqslant n$.

→ démo° Christophe Bertault

Cas particulier récurrents : ♥♥ $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$; si $n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ♥♥

Calculer (sans calculatrice), la valeur exacte de $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 6} = \frac{720}{6} = 120.$

Remarque : sur T.I, pour avoir la valeur précédente, on tapera la séquence suivante :

10 $\boxed{math}$ $\boxed{PROB}$ $\boxed{3}$: Combinaison 7 : à l'écran s'affichera ${}_7C_{10}$ et en faisant entrée on a le résultat.

Attention à mettre en premier le cardinal de l'ensemble E (ici 10) !

Exercice 8

Dans le groupe de terminale maths G3, il y a 31 élèves, et on doit choisir trois élèves pour représenter la classe pour une réunion. Déterminer combien de choix on peut faire.

Autant que de façons de choisir 3 éléments ds un ensemble de cardinal 31 càd : $\binom{31}{3} = \frac{31!}{3! \times 28!} = \frac{31 \times 30 \times 29 \times 28!}{6 \times 28!} = 31 \times 5 \times 29 = 4495.$

Exercice 9

1) On a un jeu de belote formé de 32 cartes deux à deux distinctes. Une main de 5 cartes est un ensemble de 5 cartes prises simultanément dans le jeu et dans lequel l'ordre n'importe pas.

Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes dans le jeu de belote ?

2) Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant 3 cœurs et 2 piques ? On rappelle qu'il y a 8 cœurs et 8 piques dans le jeu de belote.

1) Il y a : $\binom{32}{5}$ mains de 5 cartes de ce jeu.

Avec la machine : $\binom{32}{5} = 201\,376$

2) Il y a : $\binom{8}{3}$ façons de choisir les 3 coeurs (8 coeurs en tt ds le jeu),

et $\binom{8}{2}$ façons de choisir les 2 piques ds le jeu (8 piques).

$\frac{32!}{5! \times 27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120}$

Donc d'après le p^ce multiplicatif il y a : $\binom{8}{3} \times \binom{8}{2}$ mains de 5 cartes contenant 3 coeurs et 2 piques :

$\frac{8!}{3! \times 5!} \times \frac{8 \times 7}{2}$

$\frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5!}{\cancel{6} \times 5!} \times 28 = 56 \times 28 = 1568$

$p(\text{mains avec } 3 \heartsuit \text{ et } 2 \spadesuit) = \frac{1568}{201376} \approx 0{,}008.$

Exercice 10 *(où comment faire rêver les examinateurs au grand oral…)*

Remplir une grille de loto consiste à choisir cinq numéros de 1 à 49 (l'ordre ne compte pas) et un numéro chance de 1 à 10.

a) Combien de grilles différentes de loto peut-on remplir ?

b) Calculer la probabilité de gagner le gros lot, c'est-à-dire d'obtenir les cinq numéros et le numéro chance sortis lors du tirage. Et celle d'avoir "seulement" les cinq numéros ?

Commentaires (2€ la grille) ? On pourra calculer l'espérance associée à la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur faisant une grille.

c) Combien de grilles sont constituées uniquement de nombres pairs ?

a) On choisit 5 n° parmi 49, donc $\binom{49}{5}$ façons de procéder, et on a $\binom{10}{1} = 10$ choix possibles pour le n° chance.

Donc d'après le p^ce multiplicatif, il y a :

$\binom{49}{5} \times 10 = 19\,068\,840$ grilles de lotos.

b) p = proba de gagner le gros lot

$$p = \frac{1}{19068840} = \binom{5}{5} \times \binom{1}{1}$$

$$p \approx 5 \times 10^{-8}$$

p' = proba d'avoir les 5 n° gagnants et pas le n° chance

$$p' = \frac{\binom{5}{5} \times \binom{9}{1}}{19068840} = \frac{1 \times 9}{19068840}$$

$$p' \approx 5 \times 10^{-7}$$

Espérance négative

c) 2 ; 24 ; 36 ; 40 ; 18

Il y a 24 valeurs prises de 1 à 49.

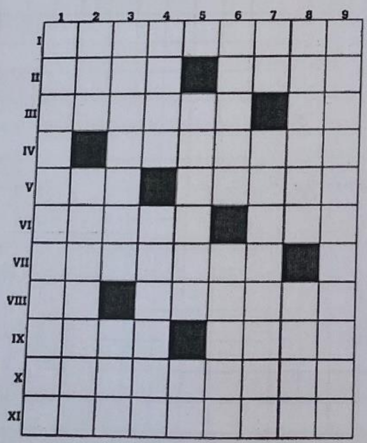
On doit choisir 5 n° parmi les 24 càd $\binom{24}{5}$ possible et pr le n° chance on a 5 choix possibles (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10).

Donc par p^ce^ × on a :

$5 \times \binom{24}{5} = 212520$ telles grilles.

Exercice 11

La grille rectangulaire ci-contre est une grille de mots croisés :



1) Déterminer le nombre de ces grilles contenant exactement 8 cases noires.

2) Combien de grilles n'ont aucun coin noir ?

3) Combien de grilles ont exactement deux coins en noir ?

1) Taille = 9×11 donc 99 cases.

On veut 8 cases noires sur ces 99 cases.

Il y a $\binom{99}{8}$ grilles avec 8 cases noires.

Avec la machine : $\binom{99}{8} \approx 1{,}71 \times 10^{11}$

2) Il y a 95 $(= 99-4)$ cases qui ne sont pas des coins.

On doit donc choisir 8 cases parmi ces 95 là.

Donc $\binom{95}{8}$ grilles sans aucun cases noires.

$\binom{95}{8} \approx$

3) Il y a $\binom{4}{2}$ façons de colorier en noir 2 c, càd 6 façons.

Il reste à choisir 6 cases noires restantes parmi 95 $(= 99-4)$ càd $\binom{95}{6}$.

Donc par p^{ce} multiplicatif, il y a : $\binom{4}{2} \times \binom{95}{6}$ façons d'avoir une grille avec 8 cases noires et 2 en coin.

$\binom{4}{2} \times \binom{95}{6} = 6 \times \binom{95}{6}$ (environ 5×10^9).

Exercice 12

Dans une classe comportant 16 filles et 13 garçons, on doit élire un bureau formé de 4 élèves.

a) Combien peut-on former de bureaux si on n'impose aucune contrainte ?

b) Combien y-a-t-il de tels bureaux respectant la parité ?

a) Il y a ds cette classe : $13 + 16 = 29$ élèves.

On peut former autant de bureaux de 4 personnes avec les élèves de cette classe qu'il y a de sous ensemble de cardinal 4 d'un ensemble à 29 éléments càd $\binom{29}{4}$.

$\binom{29}{4} = \frac{29!}{4!\,25!} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{24} = 23\,751.$

b) Parité : Autant de filles que de garçons, càd ici : 2 filles - 2 garçons.

Il y a $\binom{16}{2}$ choix de duo de filles et $\binom{13}{2}$ choix de duos pr mecs.

Donc par p^ce multiplicatif, il y a : $N = \binom{16}{2} \times \binom{13}{2} = \frac{16 \times 15}{2} \times \frac{13 \times 12}{2} = 9360$ bureaux respectant la parité.

Exercice 13

1*a*) On trace 7 droites du plan de telle sorte que deux droites quelconques tracées ne soient jamais parallèles et que trois droites quelconques tracées ne soient jamais concourantes.

Dénombrer le nombre total de points d'intersection qui apparaissent sur la figure.

1*b*) Sept équipes s'affrontent lors d'un tournoi, chacune devant rencontrer une fois et une seule toutes les autres.

Dénombrer combien de parties on va devoir organiser. (De deux façons différentes).

2) A partir de la grille ci-contre, déterminer :

Le nombre total de triangles (éventuellement aplatis) que l'on peut construire et dont les sommets sont des points de la grille ci-dessus.

1a) Il y a autant que de choix de 2 droites sécantes donnant un point d'intersec° parmi 7.

Donc $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ pts d'intersec°.

1b) Il y a $6+5+4+3+2+1$ matchs, soit 21 matchs.

M_2 : Autant de matchs que de paires d'un ensemble à 7 elts

$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$

2) Autant que de sous-ensemble à 3 elts pris parmi les 16 sommets.

$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \times 13!} = \frac{16 \times 15 \times 14}{6} = 560$ triangles

Exercice 14

Un code formé de six chiffres est tapé sur un clavier numérique (constitué des dix chiffres).

a) Combien de tels codes contiennent exactement deux fois le chiffre 1 ?

b) Combien de codes ont leurs chiffres rangés par ordre strictement croissant ? (Par exemple, 2-4-5-7-8-9 est un tel code).

c) Combien de codes comporte un seul chiffre répété exactement trois fois ?

d) Combien de codes comportent un chiffre répété au moins deux fois ? $\geqslant 2$

a) L'ordre des chiffres est ici fondamental.

On place les 2 chiffres 1 : $\binom{6}{2} = 15$ choix possibles.

Pour chacune des 4 cases restantes on a donc le choix entre 9 chiffres donc 9^4 choix possibles pour remplir ces cases.

Donc par p^ce multiplicatif, il y a : $\binom{6}{2} \times 9^4 = 15 \times 6561 = 98415$.

Il y a 98415 codes à 6 chiffres ayant exactement deux 1.

b) Ces codes ont leurs chiffres 2 à 2 $\neq$.

Il y a $\binom{10}{6}$ façons de choisir 6 chiffres parmi 10.

Une fois ces 6 chiffres choisis, on les range par ordre croissant (de 1 seul façon de faire).

Donc au total : $\binom{10}{6} \times 1 = 210$ codes à 6 chiffres par ordre croissant.

c) ex : 132335
870881

On choisit le chiffre qui va être répété 3 fois : 10 choix st possibles : $\binom{10}{1}$

On place ensuite ce chiffre répété 3 fois : il y a $\binom{6}{3}$ placement de ces chiffres répétés soit 20 placements possibles.

Reste à placer 3 chiffres ds les cases restantes, en s'interdisant de choisir le chiffre déjà répété 3 fois et en s'interdisant ainsi 3 autres chiffres identiques.

codes formés de 3 chiffres autre que celui répété et 3 id

Il y a $9 \times 9 \times 9 - 9$

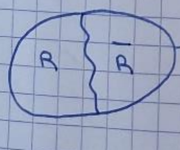
Donc d'après le p^ce multiplicatif, il y a :

$10 \times 20 \times (9^3 - 9) = 200 \times 720 = 144\,000$ codes à 6 chiffres dt 1 seul est répété 3 fois.

d) ex : 565573
333333
225566
225567

R = " le code a un chiffre répété au - 2 x "

$\overline{R}$ = " le code n'a aucun chiffre répété au - 2 x "
= " le code a ses 6 chiffres 2 à 2 $\neq$ "



Ω codes à 6 chiffres : $card(\Omega) = 10^6 = 1000000$.

et $card(\overline{R})$ = arrangement de 6 elts parmi 10

$card(\overline{R}) = \frac{10!}{4!} = 151200$ codes.

Enfin, card (B) = card (Ω) - card $(\bar{B})$

card $(B) = 1000000 - 151200 = 848800$.

Exercice 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Déterminer le nombre de diagonales (= segment reliant deux sommets non consécutifs) d'un polygone convexe à n côtés.

On choisit un sommet : il y a n choix possibles.

De ce sommet choisi partent $n-3$ diagonales (on exclut 3 sommets : celui choisi et les 2 adjacents).

Par p^{ce} multiplicatif et unicité de cq diagonale, il y a : $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

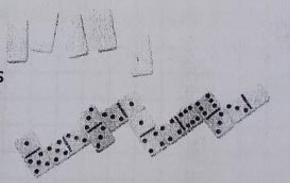
M_2 : On choisit 2 sommets parmi n : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tels choix.

Il faut retirer les n paires de sommets consécutifs.

Donc au total on a : $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 16

Un jeu de dominos classique comprend 28 pièces différentes. Chaque joueur en pioche une poignée de sept au début de la partie.



0) Expliquer pourquoi il y a 28 pièces dans le jeu, sachant que chaque domino est constitué de deux cases portant un numéro de 1 à 6 ou aucun numéro (case blanche), et que chaque domino est présent en un seul exemplaire.

a) Combien y a-t-il de tirages de sept dominos possibles ?

b) Dans le cas de deux joueurs, combien y a-t-il de tirages possibles (un tirage est l'ensemble de toutes les pièces tirées par les joueurs) ?

0)

2 caractères $\neq$	2 caractères identiques

$\binom{7}{2} = 21$

il y en a 7 (de blanc à 6)

Donc card({dominos}) $= 21 + 7 = 28$.

a) On doit choisir 7 dominos parmi 28 donc $\binom{28}{7}$ choix càd 1 184 040.

b) Autant que de façons de piocher $2 \times 7 = 14$ dominos parmi 28,

donc $\binom{28}{14} = 40\,116\,600$.

Exercice 17

Dans un immeuble on doit composer un code à cinq chiffres pour ouvrir la porte.

Dans ce code, il y a deux fois le chiffre 1, deux fois le chiffre 3 et une fois le chiffre 5.

a) Combien de tels codes différents y-a-t-il ?

b) Combien de codes commencent par 1 et terminent par 3 ?

ex : 11335
51313

On place le 5 (non répété) : 5 choix possibles

Il y a $\binom{4}{2}$ choix de posi° des deux 1.

Enfin $\binom{2}{2}$ choix de la posi° des deux 3.

Par p^{ce} multiplicatif, il y a $N = \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 5 \times 6 \times 1 = 30$ tels codes.

b) $\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 3 \times 2 \times 1 = 6$ tels codes.

placement du second 1 — placer le 5 — placer le dernier 3

Exercice 18

Dénombrer les anagrammes des mots suivants :

a) POINTER *b)* ARCHIMEDIEN *c)* DENOMBREMENT

↳ 7 lettres 2 à 2 ≠ ↳ 11 lettres, 2i et 2e ↳ 12 lettres ↳ 3E, 2N, 2M

a) Il y a $7! = 5040$ anagrammes de POINTER (on écrit ttes les permuta° possibles des lettres de ce mot).

b) placements des 2 I : $\binom{11}{2}$ choix $= \frac{11\times 10}{2} = 55$

placements des 2 E : 2 parmi les $11-2 = 9$ cases restantes vides.

$\binom{9}{2}$ choix $= \frac{9\times 8}{2} = 36$ choix

Reste à placer les 7 autres lettres qui sont 2 à 2 ≠ sur les 7 places restantes donc on doit écrire ttes les permuta° de ces 7 lettres donc 7! possibles.

D'après le p^ce ×, on a : $\binom{11}{2}\times\binom{9}{2}\times 7! = 9979200$ anagrammes de ce mot.

c) $\binom{12}{3}\times\binom{9}{2}\times\binom{7}{2}\times 5! = 19958400$

↳ plt des 3E ↳ plct des 2N ↳ placement des 2M

Exercice 19

i et j désignent des entiers naturels. Quel est le cardinal de l'ensemble : $\{(i\,;j)\,/\,1\le i<j\le n\}$?

Pour le carré vert : n^2 point en tout

n point en diagonales à exclure ($i=j$).

Il y a autant de point au dessus de la diagonale qu'au dessous.

Donc $n^2 = n + 2\times \text{card}(\Omega)$

$\text{card}(\Omega) = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

M_2 : On doit choisir 2 entiers distincts de $[\![1;n]\!]$ et les classer par ordre ↑.

$\binom{n}{2}$ choix 1 seule façon pr 2 entiers

$\binom{n}{2}\times 1 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 20 Un bit est une unité qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

On appelle *octet* tout ensemble ordonné formé de 8 bits.

a) Donner le nom mathématique d'un octet.

b) Combien y-a-t-il d'octets différents en tout ?

c) Combien d'octets commencent par 0 et finissent par 1 ?

d) Combien d'octets contiennent exactement trois 1 ?

e) Combien d'octets contiennent plus de 0 que de 1 ?

a) ex : $(1,0,0,1,1,1,0,0)$

8listes de l'ensemble E où $E = \{0 ; 1\}$.

b) Il y a $2^8 = 256$ octets en tout : autant que de 8listes de E.

c) $\boxed{0}\ \underbrace{\square}_{2ch}\ \underbrace{\square}_{2ch}\ \underbrace{\square}_{2ch}\ \underbrace{\square}_{2ch}\ \underbrace{\square}_{2ch}\ \underbrace{\square}_{2ch}\ \boxed{1}$

Donc on a $2^6 = 64$ octets commençant par 0 et terminant par 1.

d) $\square\ \square\ \boxed{1}\ \square\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \square\ \square$

Il y a $\binom{8}{3}$ posi° possibles des trois 1.

Pour chacune des 5 cases restantes, 1 seul choix : 0.

Donc $\binom{8}{3}$ tels octets.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{6} \times \cancel{5!}} = 56.$$

e) $(0,0,0,0,0,0,0,0)$; $(1,1,1 ; 0,0,0,0)$

" + de 0 que de 1" (avec 8 caractères revient à :

$8 > 0$
$7 > 1$
$6 > 2$
$5 > 3$
$\downarrow \quad \downarrow$
$0 \quad 1$

$\Omega = C_8 \perp\!\!\!\perp C_7 \perp\!\!\!\perp C_6 \perp\!\!\!\perp C_5$

union disjointe

C_i = code avec i 0.

$\text{card}(\Omega) = |C_8| + |C_7| + |C_6| + |C_5|$

avec $|C_8| = \binom{8}{8} = 1$ $\qquad |C_6| = \binom{8}{6} = 28$

$|C_7| = \binom{8}{7} = 8$ $\qquad |C_5| = \binom{8}{5} = 56$

card $(\Omega) = 1 + 8 + 28 + 56 = 93$

Propriété de symétrie du nombre de combinaisons

Soient n et k deux entiers naturels tels que : $0 \leq k \leq n$. *Alors* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Preuve :

***Méthode 1** : évidente, par le calcul, en utilisant les factorielles :*

Si $0 \leq k \leq n$ alors $0 \leq n-k \leq n$:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \times (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

***Méthode 2** : (préférable)*

Soit E un ensemble a n éléments, vu que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}$ *est donc le nombre de parties de E constituées de k éléments distincts de E.*

Or, à chacune des parties de E constituée de k éléments distincts correspond une unique partie de E contenant tous les autres éléments de E, au nombre de $n-k$ *(appelée la partie complémentaire de la partie choisie dans E).*

Il y a donc autant de parties de E à k éléments que de parties de E à $n-k$ *éléments.*

Or le nombre de parties de E à $n-k$ *éléments est égal à :* $\binom{n}{n-k}$

D'où la relation.

Exemple

Calculer astucieusement : $\binom{30}{29}$; $\binom{9}{7}$.

$\binom{30}{29} = \binom{30}{30-29} = \binom{30}{1} = 30$

$\binom{9}{7} = \binom{9}{9-7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$

***Propriété** : relation du triangle de Pascal*

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n-1$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ou $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

***Preuve** : **Méthode 1** : avec du calcul et des factorielles :*

$$D = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$D = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$D = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

Prenons à dénominateur commun : $k!(n-k)!$

On réduit à ce m̂ dénominateur :

$$D = \frac{(n-1)! \times k}{(k-1)!(n-k)! \times k} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-1-k)! \times (n-k)}$$

$$D = \frac{(n-1)! \times k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k)!}$$

$$D = \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}$$

$$D = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \times n}{k!(n-k)!}$$

$$D = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

<u>Méthode 2</u> : (par le dénombrement, donc préférable).

Soit E un ensemble à n éléments, où $n \geq 1$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$.

On sait que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E à k éléments distincts.

Soit x un élément quelconque de l'ensemble E :

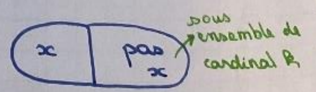
Il existe deux sortes de parties de E à k éléments distincts :

Celles qui contiennent l'élément x et celles qui ne contiennent pas l'élément x.

Or les parties de E à k éléments contenant l'élément x sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$: en effet, fabriquer une partie de E à k éléments revient à adjoindre à l'élément x $k-1$ autres éléments de $E - \{x\}$.

Les parties de E à k éléments ne contenant pas l'élément x sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$: en effet, fabriquer une parie de E à k éléments ne contenant pas l'élément x revient à fabriquer une partie à k éléments d'un ensemble qui contient $n-1$ éléments.

D'après le principe additif, on a donc : (dessin). Donc $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$



En fait la formule précédente donne un algorithme pour calculer de proche en proche, à l'aide d'un tableau les coefficients binomiaux.

Pour ce faire, on se souvient que : $\binom{0}{0} = 1$ et que pour tout entier n, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

Considérons le tableau à double entrée suivant :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	$*$ 2	1	0	0	0	0
3	1	$**$ 3	3	1	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0
6	1	6	15	20	15	6	1

$* = \binom{2}{1}$

Or $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$ → Pascal

$** = \binom{3}{1}$

et $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$

On complète donc la colonne correspondant à $k = 0$ avec des 1 et la diagonale correspondante à $k = n$ avec des 1 : au-dessus de la diagonale précédente, on ne met rien (car si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$, donc cette partie- là du tableau n'a aucun intérêt (vous pouvez la remplir de 0 si le cœur vous en dit !).

On complète ce tableau grâce à la relation de *Pascal* que l'on réécrit en :

ligne n colonne k → ; → ligne n, colonne k + 1

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} : \textit{nouveau coefficient binomial}$$

<u>*Par exemple*</u> :

Compléter alors ce tableau de proche en proche.

Pourquoi le nom de triangle de Pascal ?

On peut représenter comme suit les coefficients binomiaux, et un triangle apparait alors clairement :

En première ligne, un seul coefficient, 1 qui représente le nombre $\binom{0}{0}$.

En seconde ligne, deux coefficients qui sont respectivement de gauche à droite : $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$

En troisième ligne, trois coefficients qui sont respectivement de gauche à droite : $\binom{2}{0};\binom{2}{1};\binom{2}{2}$.

Ainsi de suite…on peut compléter ce dernier avec autant de lignes que l'on veut.

Triangle de Pascal donnant les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour tous entiers k et n tels que : $0 \leq k \leq n \leq 10$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

<u>Propriété</u>

Pour tout entier naturel n, on a : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

<u>Preuve</u> :

On retrouve en particulier que le nombre total de parties d'un ensemble E de cardinal n est égal à :

On prend un sous ensemble E de cardinal n : il y a $\binom{n}{0}$ parties de E à 0 elts.
$\binom{n}{1}$ " " 1 elts
⋮
$\binom{n}{k}$ " " k elts où $0 \leq k \leq n$.
⋮
$\binom{n}{n} = 1$ partie à n elts de E

Or cf avant, ds un ensemble E de cardinal n il y a en tt 2^n parties de E.

D'où : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 21

n est un entier naturel non nul, et E un ensemble de cardinal n.

Soit p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$, et A une partie de E à p éléments.

1) Quel est le nombre de parties de E qui sont disjointes de A ? Autant que de parties ds un ensemble $n-p$ càd $n-p$.

2) Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement un unique élément de A ?

↳ $\binom{p}{1} \times 2^{n-p}$

1 elt de A ; ↳ nb de partie de $\bar{A}$

Complément (hors programme, à réserver aux maths expertes).

Propriété *(formule du binôme de Newton, formule sur la page d'accueil de www.maths-mancini.fr)*

Pour tous réels a et b, et tout entier naturel n, on a la relation suivante, appelée formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuve *: (prévoir de la place)*

Exemples d'utilisation :

i) Pour $n = 2$, que retrouve-t-on ?

ii) Ecrire la formule du binôme de newton pour $n = 3$.

iii) Développer et réduire : $(x+1)^5$; $(2x-y)^4$.

iv) Développer $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ .En déduire que dans un ensemble de cardinal n, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

v) Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre : $(\sqrt{5}+1)^{2n}+(\sqrt{5}-1)^{2n}$ est entier.

vi) n est un entier naturel non nul.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^n$.

En calcul ant de deux façons différentes la dérivée de f, établir que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

Retrouver directement cette dernière relation, par le dénombrement, en prouvant au préalable la formule " du capitaine " : pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

✎ En pratique ✎ Un problème de dénombrement, ça peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

Tirages successifs AVEC REMISE = LISTES	Tirages successifs SANS REMISE = ARRANGEMENTS	Tirages SIMULTANÉS = COMBINAISONS

On dispose de n personnes.

On doit former une équipe de k joueurs ($k \leq n$) et une pers jouera le rôle de capitaine.

Comment procéder ?

$\binom{n}{k}$: nb de façons de choisir k joueurs parmi n pers.

Puis $\binom{k}{1}$ choix possibles du capitaine d'équipe.

Donc $\binom{k}{1}\binom{n}{k} = k \times \binom{n}{k}$: nb de façons d'avoir une équipe de k joueurs avec 1 capitaine.

M_2 : On désigne d'abord le capitaine : $\binom{n}{1} = n$ choix.

Ensuite pr créer une équipe de k joueurs (on en a déjà 1).

Il reste à choisir $k-1$ joueurs parmi $n-1$ donc $\binom{n-1}{k-1}$.

D'où $n.\binom{n-1}{k-1}$ choix.

D'où : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$: formule du capitaine.

Terminons par cet exercice plus subtil qu'il ne parait !

Exercice 10.19. Sur un clavier d'ordinateur il y a 80 touches que l'on suppose équiprobables.

a) Un singe tape au hasard sur le clavier, déterminer la probabilité pour qu'il tape

Et ta soeur ? ⇧e⇧t_ta_soeur_⇧ ? : il doit appuyer sur 16 touches ds l'ordre écrit.

b) On répète l'expérience précédente 10^8 fois quelle est la probabilité de trouver au moins une fois le phrase dans la production ?

a) $\frac{1^{16}}{80^{16}} = \frac{1}{80^{16}} \approx 3{,}5.10^{-31}$

b) 1 - proba de (Aucun ETS au cours de 10^8 tapés de séquences de 16 caractères)

$1 - \left(\frac{80^{16}-1}{80^{16}}\right)^{10^8}$