Chapitre 11	Fonctions de référence.

I- Quelques propriétés remarquables

A-Fonctions paires, fonctions impaires

Définition

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite symétrique par rapport à 0 ou encore centré en 0, si pour tout réel x appartenant à D, son opposé $-x$ appartient également à D.

Exemple : L'intervalle [-4 ; 4] est symétrique par rapport à 0.

Par-contre, l'intervalle [-2 ; 3] n'est pas un intervalle symétrique par rapport à 0.

♥♥♥ *Définition* (fonction paire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que ***f* est paire** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D, **ET** pour tout réel x appartenant à D, ……………………..

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

f est-elle paire sur [-1 ; 3] ?

2) La fonction i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = x^2 + 2x - 1$ est-elle paire sur $\mathbb{R}$?

✂---

Propriété

Soit f une fonction paire définie sur un ensemble D.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est ……………………………………………..

Réciproquement, si la courbe d'une fonction admet pour axe de symétrie l'axe des ordonnées sur un intervalle D, alors f est une fonction paire.

Justification : Observons d'abord que si $M(x\,;y)$, alors le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées est le point M' avec M'(….. ; …..).

♥♥♥ ***Définition*** (fonction impaire)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

On dit que ***f est impaire*** lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

♥♥♥

D est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire, pour tout réel x appartenant à D, $-x$ appartient à D, ET pour tout réel x appartenant à D, ……………………

Exemples

1) Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3$. Montrer que f est impaire sur ℝ.

f est-elle paire sur [-1 ; 3] ?

2) Démontrer que la fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = x^3 - 4x$ est impaire sur ℝ.

✂---

Propriété

Soit f une fonction impaire définie sur un ensemble D.

Dans un repère, la courbe représentative de f est ……………………………………………..

Réciproquement, si la courbe d'une fonction f admet pour centre de symétrie l'origine du repère, alors f est impaire.

Remarques : il est bon de garder à l'esprit qu'en général, une fonction n'est ni paire ni impaire sur un intervalle.

Si une fonction n'est pas paire sur un intervalle, cela ne signifie pas pour autant qu'elle est impaire sur cet intervalle ! Regardez la fonction i des exemples précédents !

Le vocabulaire est ici malheureux, les termes paire et impaire pour une fonction ne sont pas contraires l'un de l'autre !

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions définies sur ℝ qui sont à la fois paires et impaires sur ℝ.

II- Fonctions de références

A) Les fonctions affines

Définition : On appelle fonction affine, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

On rappelle que la courbe représentative d'une fonction affine est une droite.

Propriété fondamentale : sens de variation des fonctions affines.   **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.**   **1) Si $a > 0$, alors f ……………….…… sur $\mathbb{R}$.**   **2) Si $a < 0$, alors f ………………….…. sur $\mathbb{R}$.**   **3) Si $a = 0$, alors f ………………….…. sur $\mathbb{R}$.**

Illustration et preuve :

✂---

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

Etudier son sens de variation, et dresser son tableau de variations.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[-4 \; ; \; 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \; si \; x \in [-4; 1] \\ -x + 2 \; si \; x \in [1; 3] \\ 3x - 10 \; si \; x \in [3; 5] \end{cases}$

Construire la courbe représentant f dans un repère orthonormé $(O \; ; I \; ; J)$.

✂---

B) La fonction carrée

Rappel : la fonction carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Nous avons déjà vu que dans un repère orthogonal la courbe représentant f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie car f est paire sur $\mathbb{R}$.

Propriété

♥♥ *La fonction carrée est **décroissante** sur……………………et **croissante** sur…………………………*♥♥

Preuve : Plaçons-nous sur l'intervalle $]-\infty \; ; \; 0]$: soient a et b deux réels tels que : $a \leq b \leq 0$.

Comparons $f(a) = a^2$ et $f(b) = b^2$: or $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, et par donnée, $a \leq b$ donc $a - b \leq 0$ et vu que $a \leq 0$ et $b \leq 0$, $a + b \leq 0$ (somme de deux réels négatifs).

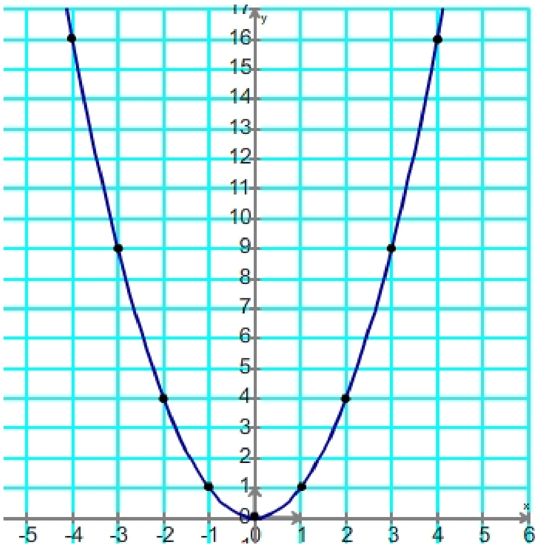
Donc d'après la règle des signes d'un produit, $(a - b)(a + b) \geq 0$, c'est-à-dire $f(a) - f(b) \geq 0$, et donc $f(a) \geq f(b)$: ainsi f est décroissante sur l'intervalle$]-\infty\ ;\ 0]$.

Sur $[0\ ;\ +\infty[$: *même type de démonstration que vous pouvez faire seul à titre d'exercice !*

✂---

Bien avoir en tête l'allure de la courbe représentative de cette fonction, ainsi que son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗



__Remarques__ : la fonction carrée a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, et on retrouve que pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse.

__Exercice 3__

a, b, c et d désignent quatre nombres réels.

Compléter dans chaque cas par l'information la plus précise possible, en justifiant :

1) Si $a \geq 3$, alors a^2............

2) Si $b \leq -\sqrt{2}$, alors b^2.........

3) *Si* $-5 \leq c \leq -2{,}5$ alors .... c^2..............

4) Si $-3 \leq d \leq 2$, alors ....d^2..............

✂---

Propriété ♥♥♥♥

Soit k un nombre réel.

Considérons **l'équation :** $\boldsymbol{x^2 = k}$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

♥♥***Si k < 0***, alors cette équation n'a…………………………………………………………………………..

♥♥***Si k = 0***, alors cette équation a pour unique solution……………………………………………………..

♥♥***Si k >0***, alors cette équation a deux solutions : …………….. ……………………………………………

♥♥Enfin, lorsque $k > 0$, l'inéquation : $x^2 < k$ admet pour solutions……………………………………………

Remarque : cela doit facilement se retrouver mentalement en visionnant la courbe représentative de la fonction carrée !!

Preuve :

✂---

Exercice 4

Résoudre mentalement les équations et inéquations suivantes d'inconnue x appartenant à $\mathbb{R}$:

a) $x^2 = 3$ *b)* $x^2 = -6$ *c)* $x^2 = 12$ *d)* $x^2 < 25$ *e)* $x^2 \geq 36$.

✂---

Complément : équations du second degré moins triviales

Lemme : pour tous réels x et a : $\boldsymbol{x^2 + ax}$ **= …………………………………**

Preuve :

✂---

Exemple : transformer comme dans le lemme : $x^2 + 4x$; $x^2 - x$

✂---

Application : utiliser cette technique pour résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$x^2 + 4x + 3 = 0$; $x^2 - x + 1 = 0$; $5x^2 + 3x - 4 = x^2 - x + 2$.

✂---

Remarque : avec cette technique, vous pouvez résoudre toutes les équations du second degré de la forme : $x^2 + bx + c = 0$ *où* b *et* c *sont des réels.*

En se ramenant à un coefficient des x^2 *égal à 1 au préalable, vous pouvez même résoudre toutes les équations du second degré de la forme :* $ax^2 + bx + c = 0$*, en commençant par factoriser par* a *!*

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $x^2 + 5x + 3 = 0$.

C) La fonction racine carrée

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

Elle ne prend que des valeurs positives ou nulles.

Propriété

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow$

Preuve : Soient a et b deux réels tels que : $0 \leqslant a \leqslant b$: on sait que $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$.

Ainsi, $0 \leqslant a \leqslant b$ s'écrit encore sous la forme : $(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$.

Or, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs ou nuls, donc rangés dans le même ordre que leurs carrés (par croissance de la fonction carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$).

Par suite on a : $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ et la fonction racine carrée croit sur $[0\ ;\ +\infty[$.

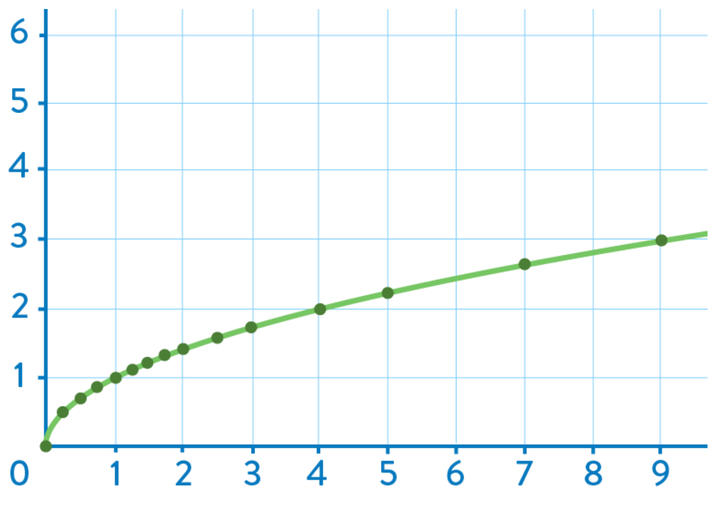
On retiendra donc que : ♥♥ $\boxed{0 \leqslant a \leqslant b \text{ équivaut à } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.}$

En effet : si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a *:* $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Réciproquement, si $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, alors comme les nombres $\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{b}$ sont positifs, et que la fonction carrée croît sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a :
$(\sqrt{a})^2 \leqslant (\sqrt{b})^2$ c'est-à-dire*:* $(0 \leqslant)\ a \leqslant b$.

x	$f(x) = \sqrt{x}$ à 0,1 près.
0	0
0.25	0.5
0.5	0.7
0.75	0.9
1	1
1.25	1.1
1.5	1.2
1.75	1.3
2	1.4
2.5	1.6
3	1.7
4	2
5	2.2
7	2.6
9	3

<ins>Courbe représentative de la fonction racine carrée</ins> :



Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

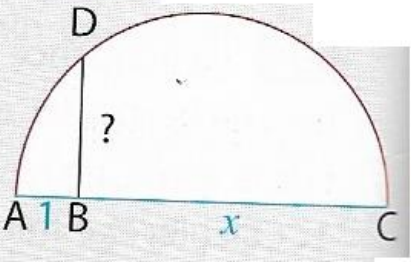
a) $\sqrt{x} < 2{,}5$; *b)* $\sqrt{x} - 4 \geq 0$; *c)* $\sqrt{x} = -1$

d) $3 - 4\sqrt{x} \leq 1$; *e)* $\sqrt{x} \geq -1$; *f)* $\dfrac{7}{\sqrt{x}} = 5$.

✂---

Exercice 6

A, B et C sont trois points alignés tels que AB = 1 et BC = x.
Le point D appartient à un demi-cercle de diamètre [AC] et le segment [BD] est perpendiculaire à [AB].
Exprimer la longueur BD en fonction de x.



✂---

Exercice 7

Sans calculatrice, comparer les réels : $a = \sqrt{\sqrt{5} - 1}$ et $b = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$.

✂---

Exercice 8

Etudier, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies par : $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

✂---

D) La fonction cube

On rappelle que le cube d'un réel x est le nombre $x \times x \times x$ que l'on note x^3.

Par exemple, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Définition : La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

Conséquence de la définition : la fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$, donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

En effet, pour tout réel x, $-x$ est réel et $f(-x) = (-x)^3 = (-1x) \times (-1x) \times (-1x) = (-1)^3 \times x^3 = -x^3 = -f(x)$

Propriété

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

Preuve :

Soient a et b deux réels tels que : $a \leq b$.

Comparons $f(a) = a^3$ et $f(b) = b^3$ en étudiant le signe de la différence $f(a) - f(b)$:

Or, $f(a) - f(b) = a^3 - b^3$.

Nous allons vérifier que pour tous réels a et b, on a les deux points suivants :

1) la factorisation suivante : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2) $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2$.

Pour le point 1), on développe naïvement :

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$ *(les termes de même couleurs se simplifient, on rappelle que le produit des réels est commutatif, donc $a^2b = ba^2$ et $ab^2 = b^2a$).*

Pour le point 2), on développe avec la première identité remarquable, puis on réduit le membre de droite :

$$(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + 2\,a \times \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}.$$

Grâce à 1) et 2), on peut donc dire que pour tous réels a et b, on a :

$$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 = (a-b)\left((a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \right).$$

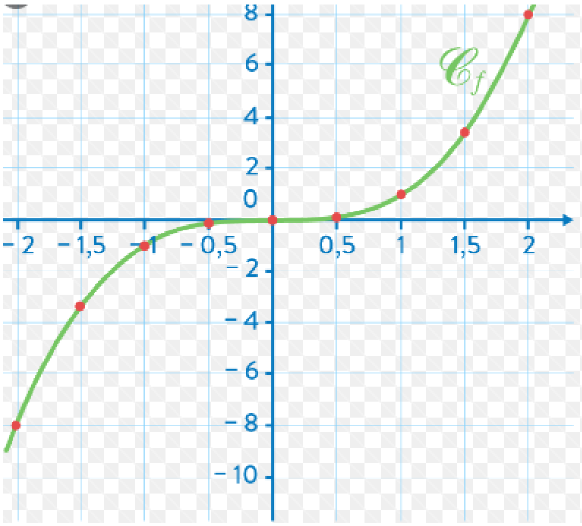
Or, si $a \leq b$, alors $a - b \leq 0$, et $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ en tant que somme de deux termes positifs (le carré d'un réel est toujours positif ou nul et $\frac{3}{4} > 0$).

Par suite d'après la règle des signes d'un produit, $(a-b)\left((a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \right) \leq 0$.

Donc $f(a) - f(b) \leq 0$, donc $f(a) \leq f(b)$. Par suite $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

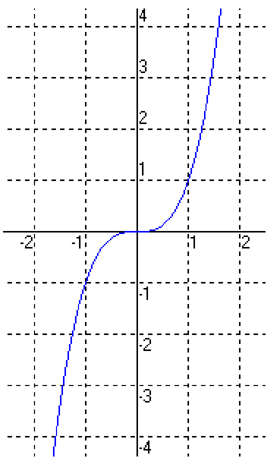
Tracé : grâce à une calculatrice ou un ordinateur on obtient la courbe représentative de la fonction cube :

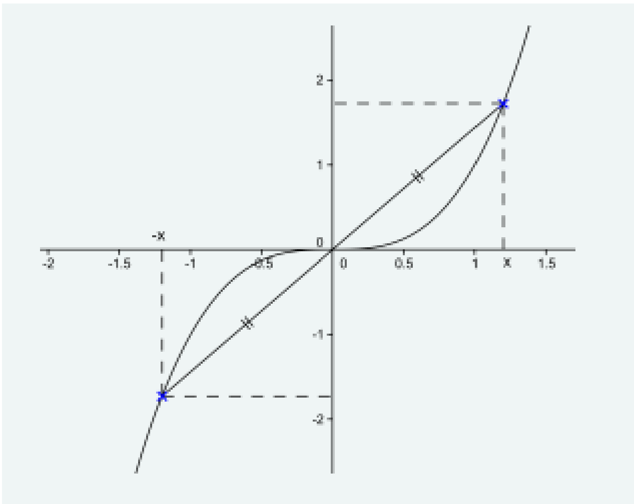
(Attention, le repère ci-dessous n'est pas orthonormé !)



x	x^3
− 2	− 8
− 1,5	− 3,375
− 1	− 1
− 0,5	− 0,125
0	0
0,5	0,125
1	1
1,5	3,375
2	8

En repère orthonormé :





Propriété

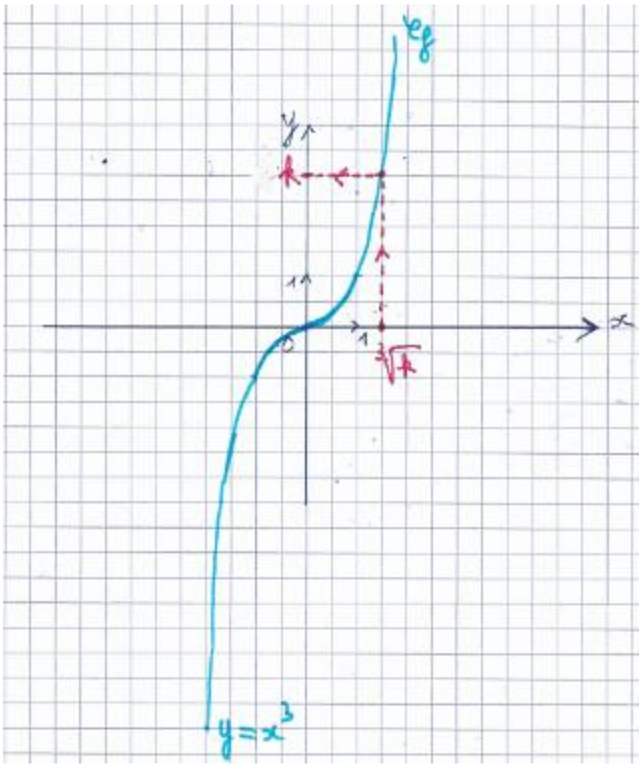
Soit k un nombre réel.

Considérons **l'équation :** $\boldsymbol{x^3 = k}$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

Cette équation admet une unique solution réelle, appelée la racine cubique de k et notée $\sqrt[3]{k}$

L'inéquation : $\boldsymbol{x^3 < k}$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $]-\infty\ ;\ \sqrt[3]{k}\ [$.

L'inéquation : $\boldsymbol{x^3 > k}$ a pour ensemble de solutions l'intervalle : $]\ \sqrt[3]{k}\ ;\ +\infty\ [$.



Preuve : admis en classe de seconde.

On retiendra que pour tout réel x, $(\sqrt[3]{x})^3 = x$: l'unique réel qui élevé au cube est égal à x est la racine cubique de x.

Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$
$\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[3]{4}$ a une écriture décimale avec une infinité de chiffres après la virgule : $\sqrt[3]{4} \approx 1,587401052$

C'est là que la notation $\sqrt[3]{4}$ a toute sa pertinence !

Calculer mentalement : $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{-64}$

Réponse :

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$x^3 = 21$; $x^3 < 1$; $-125 \leq x^3 < 0,216$

✂---

Propriété (position relative de courbes représentatives de fonctions de référence).

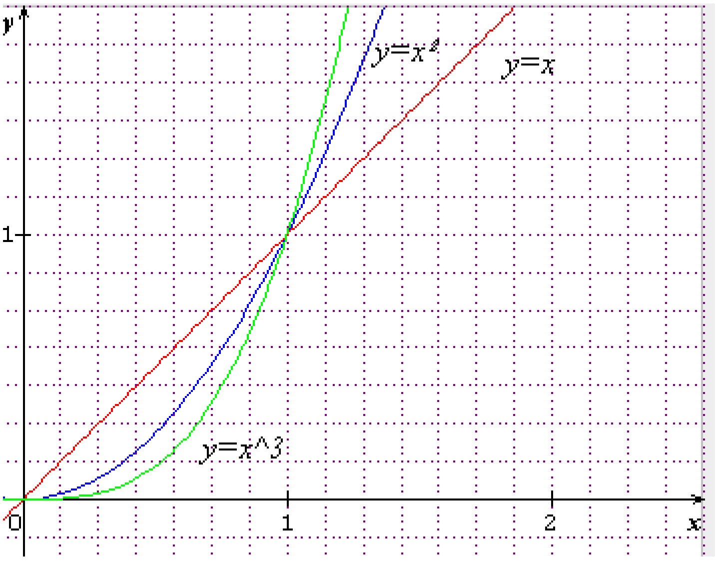
- ***Pour tout réel x tel que** : $0 \leq x \leq 1$, on a : $x^3 \leq x^2 \leq x$*

Donc sur l'intervalle $[0\,;1]$, la courbe représentative de la fonction cube est située en dessous de celle de la fonction carrée, elle-même située en dessous de celle de la fonction identité (fonction qui à tout réel x associe ce même réel x).

- ***Pour tout réel x tel que $x \geq 1$, on a : $x^3 \geq x^2 \geq x$***

Donc sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, la courbe représentative de la fonction cube est située au- dessus de celle de la fonction carrée, elle-même située au-dessus de celle de la fonction identité.

Illustration et preuve :



Preuve :

Si $0 < x \leq 1$, alors en multipliant par x chacun des membres de cette inégalité, il vient : $\mathbf{0 < x^2 \leq x}$, et en refaisant la même action, il vient que : $\mathbf{0 < x^3 \leq x^2}$.

Par suite, par transitivité de la relation $<$, on a : $\mathbf{x^3 \leq x^2 \leq x}$.

Même principe si $x \geq 1$.

Exercice 10

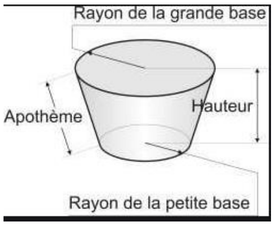
a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4x^3 < 5x$.

b) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3$ et $g(x) = 5x$.

✂---

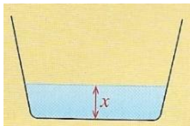
Exercice 11

Un chaudron a la forme d'un cône tronqué (figure ci-dessous) :



Le rayon du disque de la petite base mesure 10 cm et le rayon du disque de la grande base mesure 20 cm. Enfin, la hauteur (= segment dont les extrémités sont les centres de chacun des disques de base) est mesure 30 cm.

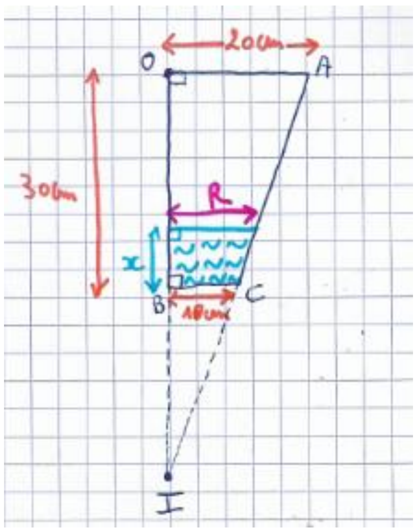
On remplit d'eau ce chaudron qui est vide au départ. On appelle x la hauteur d'eau dans le chaudron (dessin en coupe), et enfin V la fonction qui à x associe le volume d'eau contenu dans le cône tronqué rempli à la hauteur x.



Le but de cet exercice est de donner l'expression de $V(x)$ en fonction de x.

a) A quel intervalle (noté I) le nombre x appartient-il ?

Le dessin ci-dessous est une coupe du demi-cône tronqué précédent :



b) Etablir que $IB = 30\ cm$ puis que $R = \frac{x}{3} + 10$.

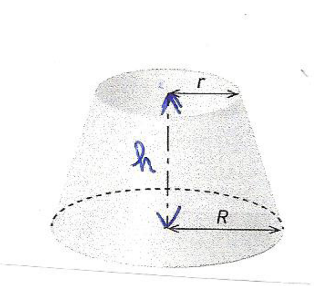
c) En déduire que pour tout réel x appartenant à I, $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x^3}{9} + 10x^2 + 300x\right)$.

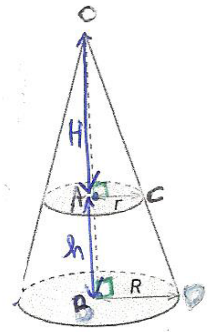
Indication : le volume de l'eau s'obtient en faisant la différence entre les volumes de deux cônes de la figure précédente et en utilisant la question *b)* !!!!

d) L'eau arrivant à mi-hauteur, le récipient contiendra-t-il plus ou moins de 5 litres d'eau ?

Complément (DM) :

On se propose en complément, de déterminer une relation donnant le volume d'un tronc de cône (ou cône tronqué), en fonction de r, R et h, où r est le rayon du petit disque du cône tronqué, R celui du grand disque du cône tronqué, et h la hauteur du cône tronqué.





H = OA = hauteur du cône ôté.
h = hauteur du cône tronqué

0) Etablir, pour tout réel R et r, l'identité suivante : $R^3 - r^3 = (R - r)(R^2 + Rr + r^2)$.

1a) A l'aide du théorème de *Thalès de Milet*, établir que $\frac{H}{H+h} = \frac{r}{R}$.

1b) En déduire l'expression de H en fonction de r, R et h. (On vous demande d'isoler H dans la relation du *1a)*).

2a) Exprimer le volume du cône tronqué, noté V, en fonction de r, R, h, H, puis à l'aide de la question *2b)*, en déduire que $V = \frac{\pi h}{3} \times (\frac{R^3}{R-r} - \frac{r^3}{R-r})$.

✂---

E) La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété

La fonction inverse décroit sur chacun des intervalles $]-\infty\,; 0[$ et $]0\,; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	‖	↘

La double barre du tableau de variation rappelle que f n'est pas définie lorsque $x = 0$, car la division par 0 n'existe pas.

Preuve :

Dire que f décroit sur $\mathbb{R}^*$ est faux, expliquons pourquoi :

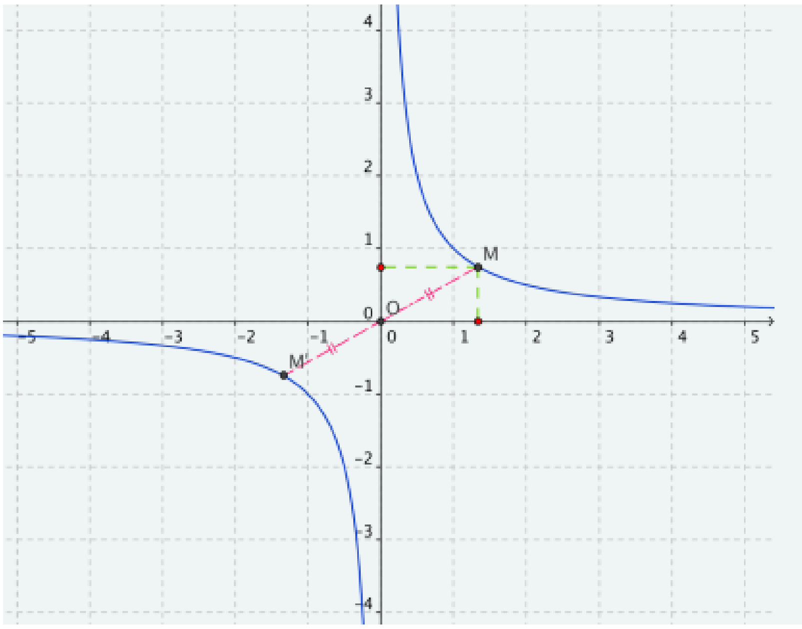
Remarque : la fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$, donc l'origine O du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée une hyperbole.

Tableau de valeurs

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	0	$0,25$	$0,5$	1	2	4
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	-0,25	-0,5	-1	-2	-4	■	4	2	1	0,5	0,25

Courbe représentative de la fonction inverse :



La courbe représentative de la fonction inverse rencontre-t-elle les axes du repère ? Justifier.

Applications :

1) Sans faire aucun calcul, comparer : *a)* $\dfrac{1}{0,24}$ et $\dfrac{1}{015}$; *b)* $\dfrac{1}{-0,99}$ et $\dfrac{1}{-1,01}$

2) Sachant que $-3 \leqslant x < -1$, que peut-on dire de $\dfrac{1}{x}$? Justifier.

3) Sachant que $2 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 5$, donner un encadrement de x en justifiant.

✂---

Exercice 12

L'aire d'un rectangle vaut 3 m^2. On sait que sa longueur est comprise entre 2,1 m et 2,2 m.

Déterminer un encadrement de sa largeur. Les bornes de l'encadrement seront exprimées en cm.

***Exercice** 13*

Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation : $\frac{1}{x} > -2$.

✂--

Exercice 14

Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x-1}$

✂--

Exercice 15

Un motard se rend d'un point A à un point B, distants de 10 km, à la vitesse de 60 km/h.

Il effectue le trajet retour de B vers A à la vitesse de x km/h. ($x>0$).

On note $f(x)$ la vitesse moyenne, en km/h sur l'ensemble du trajet A -> B -> A.

a) Calculer la durée t_1 (en heures) du trajet aller, puis la durée t_2 (en heures) du trajet retour en fonction de x. En déduire que $f(x) = \dfrac{120x}{x+60}$.

b) En déduire la vitesse moyenne sur le trajet si la vitesse moyenne au retour vaut $x = 40$ km/h.

Le résultat obtenu est-il déroutant ?

c) A quelle vitesse le motard doit-il effectuer le trajet retour pour que sa vitesse moyenne soit égale à 70 km/h ?

d) Est-il possible pour le motard d'avoir une vitesse moyenne de 120 km/h sur l'aller-retour ?

e) Vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x) = 120 - \dfrac{7200}{x+60}$.

f) Ecrire un enchaînement, puis déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;+\infty[$.