Partie 2

VI- Orthogonalité dans l'espace

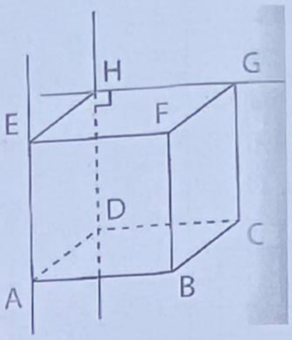
A- Généralités

Définition

Deux droites de l'espace sont ***orthogonales*** lorsque *leurs parallèles respectives menées d'un point quelconque* de l'espace sont ***perpendiculaires.***

Exemple

Dans le cube ci-contre, (AE) et (GH) sont orthogonales :



Pourquoi ? Prenons E : la // à (GH) passant par E est (EF).

Or (AE) ⊥ (EF) car AEFB est un carré.
Donc (AE) et (HG) sont orthogonales.
(FB) et (DC) sont orthogonales.

Remarque

Les termes *"perpendiculaires"* et *"orthogonal"* sont souvent confondus : c'est un <u>abus !</u>

En effet, deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes, alors que deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et *a fortiori*, pas nécessairement sécantes.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sont orthogonaux s'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

Dans l'exemple précédent, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.

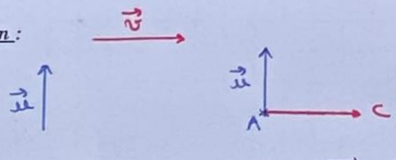
B) Produit scalaire dans l'espace

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ***de l'espace***.

Nous allons voir qu'il est licite de parler de produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On va se ramener à la définition du produit scalaire de deux vecteurs situés dans un MEME PLAN.

Fixons un point A quelconque de l'espace.
On sait qu'il existe alors un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, et un unique point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Illustration :



Avec ce choix de représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont situés dans un même plan, le plan (ABC).

Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan (ABC).

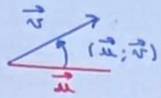
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

Propriété : Toutes les propriétés du produit scalaires énoncées dans le plan s'étendent à l'espace :

En particulier :

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, on a la formule bien pratique :

♥♥♥ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$ ♥♥♥



2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Cette propriété fondamentale est d'un usage récurrent dans les exercices. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3) Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est par définition le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même : $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$.
Grâce à la formule bien pratique 1), on a donc : $\vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$

En particulier, pour tous points A et B, ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$ ♥♥♥

4) Enfin, les règles de calcul du produit scalaire du plan s'étendent à l'espace :
Pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif). $\cos(\vec{u}.\vec{v}) = \cos(\vec{v}.\vec{u})$

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$. (Distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs).

Pour tout réel k, $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.

5)

$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ (L_1)

$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ (L_2)

En particulier, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Ces dernières formules sont appelées formules de polarisation, et expriment le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.

Preuve : il suffit de considérer un plan (P) tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans (P), et d'appliquer les règles du produit scalaires vues dans le plan en première.

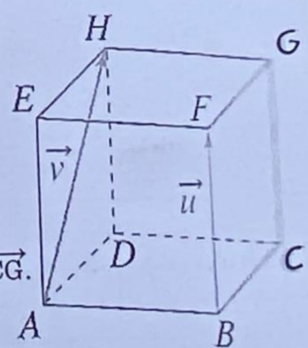
Pour la 5) : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$ $\left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.

Exemple

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

a) Calculer $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AH}$.

b) En utilisant la décomposition : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}$, calculer : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CG}$.



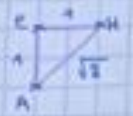
vecteurs coplanaires

a. $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AE}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| \times \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH})$

égaux

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = AE \times AH \times \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH})$

Or $AE = 1$



(Pythagore)

Et $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH}) = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$

b. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}) \times \overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG}\,(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH})$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BF} + \underbrace{\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{FE}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{EH}}_{0}$

car vecteurs orthogonaux — car $\overrightarrow{CG} \perp \overrightarrow{EH}$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF}^2 = \|\overrightarrow{BF}\|^2 = 1^2 = 1$

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$

Définition

Une base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace est dite ***orthonormée*** lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$, et de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple : dans le cube précédent, citer une base orthonormée de l'espace.

Un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est la donnée d'un point O de l'espace et d'une base orthonormée $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

Nous travaillerons dans toute la suite du chapitre <u>exclusivement dans des repères orthonormés</u>.

Théorème ***(utile pour le bac, et en mécanique ...)***

Si l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

1) ♥♥♥ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ = produit abscisses + pdt ordonnées + pdt des côtes ♥♥♥

En particulier, $\|\vec{u}\| =$ (fondamental, à bien retenir).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ ou encore $xx' + yy' + zz' = 0$

En particulier, deux droites de l'espace respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonales si et seulement si : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2) Si $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, alors :

♥♥♥ $AB = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2 + (z_{\overrightarrow{AB}})^2}$ ♥♥♥

Preuve

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donc : $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$.

*)

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

développement le plus ...

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i}.x'\vec{i}) + (x\vec{i}).(y'\vec{j}) + (x\vec{i}).(z'\vec{k}) + (y\vec{j}).(x'\vec{i}) + (y\vec{j}).(y'\vec{j}) + (y\vec{j}).(z'\vec{k})$
$+ (z\vec{k}).(x'\vec{i}) + (z\vec{k}).(y'\vec{j}) + (z\vec{k}).(z'\vec{k})$.

$\vec{u}.\vec{v} = xx'(\vec{i}.\vec{i}) + (xy')\vec{i}.\vec{j} + (xz')\vec{i}.\vec{k} + yx'(\vec{j}.\vec{i}) + (yy')\vec{j}.\vec{j} + (yz')\vec{j}.\vec{k}$
$+ (zx')\vec{k}.\vec{i} + (zy')\vec{k}.\vec{j} + (zz')(\vec{k}.\vec{k})$

or $\vec{i} \perp \vec{j}$, donc $\vec{i}.\vec{j} = 0 = \vec{j}.\vec{i}$; $\vec{j} \perp \vec{k}$, donc $\vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ donc $\vec{i}.\vec{k} = 0 = \vec{k}.\vec{i}$.

Ensuite :

formule de Physique!

$\vec{u}.\vec{v} = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'\|\vec{k}\|^2$ CAR $\vec{i}.\vec{i} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{i}\| \times \cos(0)$.
idem pour $\vec{j}.\vec{j}$ et $\vec{k}.\vec{k}$.

$(\vec{i}\,;\vec{i}) = 0\,[2\pi]$

Donc $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$

**)

Faisons $\vec{v} = \vec{u}$:

$\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et comme $\|\vec{u}\| \geq 0$, on a :

$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ #

***)

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$: alors $\vec{u}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et la relation # conduit au

résultat voulu : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$ ∎

Exercice 9

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un R.O.N de l'espace, et (d) et (d') les droites qui ont pour R.P. respectives :

$$(d) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2+t \end{cases} \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{et } (d') : \begin{cases} x = -1-s \\ y = 5 \\ z = 2+s \end{cases} \text{avec } s\in\mathbb{R}.$$

Démontrer que (d) et (d') sont orthogonales.

Par lecture des R-P données :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ dirige (d)

et

$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ dirige (d')

Or $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' = 1\times(-1) + 2\times 0 + 1\times 1 = 0.$

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ st orthogonaux.

Donc (d) et (d') sont orthogonales.

Exercice 10 ***(hyper classique)***

Soit A(0 ; 1 ; 2), B(1 ; -1 ; 3) et C(-1 ; 2 ; 0) des points d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A = 1-0 \\ y_B - y_A = -1-1 = -2 \\ z_B - z_A = 3-2 = 1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-0 = -1 \\ 2-1 = 1 \\ 0-2 = -2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz' = 1\times(-1) + (-2)\times 1 + 1\times(-2) = -5$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ avec $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -5$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$

Donc : $-5 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$

$-5 = 6 \times \cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$

$\cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \dfrac{-5}{6}$

Donc $\cos(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) \approx 146°$

Exercice 11

toutes ses arêtes st de m longueur

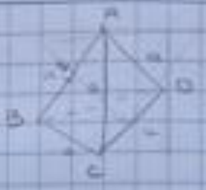
Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a, et I le milieu de [AB].

a) Exprimer en fonction de a chacun des produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par ce procédé, on peut démontrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre <u>régulier</u> sont orthogonales.

a)



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ car $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3} = 60°$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ car ABD est aussi équilatéral de côté a.

b) $\overrightarrow{AB}$ dirige (AB) ; $\overrightarrow{CD}$ dirige (CD).

Mq : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

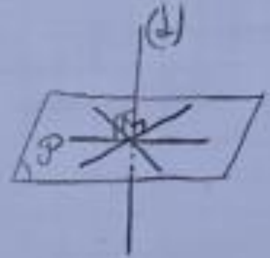
Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ donc (AB) et (CD) st orthogonales.

VII – Vecteur normal à un plan

Définition

Une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'elle est orthogonale à ***toutes*** les droites du plan $\mathcal{P}$.

Illustration :



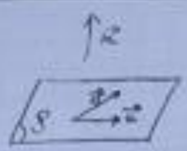
Définition

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, et $\vec{n}$ un vecteur <u>non nul</u> de l'espace.
On dit que $\vec{n}$ est un <u>vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$</u> s'il est orthogonal à tout vecteur du plan $(\mathcal{P})$.

Propriété

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace.
$\vec{n}$ est normal au plan $(\mathscr{P})$ si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$.

Preuve :



Le sens direct est évident : si $\vec{n}$ est normal au plan $(\mathscr{P})$, alors, par définition, il est orthogonal à tous les vecteurs du plan $(\mathscr{P})$, donc en particulier, il est orthogonal à deux quelconques vecteurs non colinéaires de $(\mathscr{P})$.
Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathscr{P})$:
Alors, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ forme une base de $(\mathscr{P})$ vu que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan $(\mathscr{P})$: vu que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de $(\mathscr{P})$, $\vec{w}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe des réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
On veut prouver que $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, donc on calcule naturellement le produit scalaire $\vec{n}.\vec{w}$:

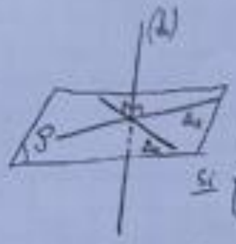
$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\,\vec{n}.\vec{u} + b\,\vec{n}.\vec{v} = a \times 0 + b \times 0 = 0$ car $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et de même, $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

Ainsi, $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux pour tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathscr{P})$, donc par définition, $\vec{n}$ est normal à $(\mathscr{P})$.

Corollaire (fréquemment utilisé en pratique dans les exercices de type bac)

Pour qu'une droite de l'espace soit orthogonale à un plan $(\mathscr{P})$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes contenues dans $(\mathscr{P})$.

Illustration



Si Δ_1 et Δ_2 sécantes et contenues dans $\mathscr{P}$
(d) et (Δ_1) orthogonales
(d) et (Δ_2) orthogonales

Alors (d) et ($\mathscr{P}$) sont orthogonaux

Remarque

Il est fondamental, dans le corollaire précédent, d'avoir deux droites sécantes. Pourquoi ?

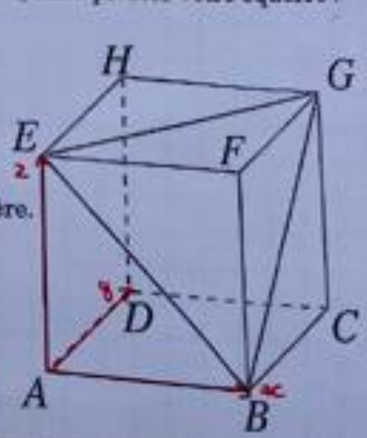
Tracer deux droites parallèles sur une feuille de papier, et avec votre équerre, mettez un côté de l'angle droit sur l'une d'elle, pensez-vous que le deuxième côté de l'angle droit de l'équerre soit toujours orthogonal à la seconde droite ??????????? Si vous pensez que oui, faite pivoter votre équerre !

Exercice important (XXL)

ABCDEFGH est un cube muni du R.O.N. $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ dans ce repère.

b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BED).



a) $A(0;0;0)$; $G(1;1;1)$

$B(1;0;0)$; $E(0;0;1)$; $D(0;1;0)$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G - x_A = 1 \\ y_G - y_A = 1 \\ z_G - z_A = 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AG}$ dirige (AG).

Le plan (BED) est dirigé par $(\overrightarrow{BE} ; \overrightarrow{ED})$.

Mq $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et au vecteur $\overrightarrow{ED}$.

Calculons : $\begin{cases} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = xx' + yy' + zz' = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0 \\ \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{BE} \text{ st orthogonaux} \\ \overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{ED} \text{ st orthogonaux} \end{cases}$

Conclusion : $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ ne st pas colinéaires.

Donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ à savoir le plan (BED).

Exercice 12

Soit ABCD un tétraèdre régulier, et I le milieu de [AB].

a) Par des arguments de géométrie de collège, démontrer que la droite (AB) et le plan (ICD) sont orthogonaux.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

a) Or un triangle équilatéral, les droites remarquables st confondues.
Ici (CI) est la hauteur issue de C du triangle ABC.
Donc (AB) et (CI) st en particulier orthogonales.
De m : (AB) et (ID) st orthogonales.
Donc & (CI) et (ID) st sécantes en I, (AB) est orthogonale au plan (CID).

b) (AB) est orthogonale au plan (CID), donc orthogonale à chacune

---

VIII-Equations cartésiennes d'un plan

Propriété XXXXI.

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et A un point de l'espace muni d'un R.O.N. $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

1) Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\vec{n}$ et $\vec{AB}$ st orthogonaux càd tq $\vec{n}\cdot\vec{AB} = 0$.

2a) ♥♥♥Tout plan $\mathcal{P}$ ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une <u>équation cartésienne</u> de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.♥♥♥

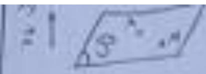
2b) ♥♥♥Réciproquement, si $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, alors l'ensemble

$\mathcal{P} = \{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ /\ ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.♥♥♥

<u>Preuve</u> : écrite sur la feuille ci-jointe.

$2x + 3y + z - 1 = 0$

↳ plan dt $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan et $A(0;0;1) \in \mathcal{P}$.



1) $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal à $(\mathcal{P})$ et $A\in(\mathcal{P})$.

$M\in(\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Notons $A(x_0;y_0;z_0)$ et $M(x;y;z)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $\quad M\in(\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$M\in(\mathcal{P}) \iff ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0 \iff ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$ [illegible] $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

Ainsi, $M\in(\mathcal{P}) \iff \underbrace{ax+by+cz+d=0}_{\text{appelée une équation cartésienne de } (\mathcal{P})}$

2) $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et $(\mathcal{P})=\{M(x;y;z)\,/\,ax+by+cz+d=0\}$

Montrons d'abord que $(\mathcal{P})\neq\emptyset$

Vu que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, on peut sans perte de généralité supposer que $a\neq0$.

Si $y=z=0$, $ax+by+cz+d=0$ s'écrit donc $ax+d=0$, donc $x=-\frac{d}{a}$ $(a\neq0)$.

Ainsi, $A(-\frac{d}{a};0;0)\in(\mathcal{P})$, donc $(\mathcal{P})\neq\emptyset$

Soit $M(x;y;z)\in(\mathcal{P})$, on a donc $ax+by+cz+d=0$.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-\frac{d}{a})\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{d}{a}\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=(x+\frac{d}{a})\times a+y\times b+z\times c=ax+by+cz+d$ car $M\in(\mathcal{P})$, $ax+by+cz+d=0$

Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ [illegible] $(\mathcal{P})$ est le plan passant par A et admettant $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Exemples

$x-2y+z+3=0$ est l'équation d'un plan car cette dernière, qui se réécrit sous la forme :
$1x+(-2)y+1z+3=0$ est de la forme : $ax+by+cz+d=0$ avec : $a=1$; $b=-2$; $c=1$ et $d=3$ et que $(1\,;-2\,;1)$ n'est pas le triplet nul. Mieux, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Comment trouve-t-on les coordonnées d'un point appartenant à ce plan ?

Donnez à deux des inconnues de son choix les valeurs de son choix, et en résolvant l'équation, on obtient la valeur de la troisième inconnue.

Par exemple, je fais $x=0$ et $y=0$ dans la relation : $x-2y+z+3=0$ ce qui donne : $0-0+z+3=0$ donc $z=-3$ et par suite, le point $A(0\,;\,0\,;\,-3)$ appartient au plan d'équation $x-2y+z+3=0$.

Enfin un plan contient une infinité de points !!! Par exemple, ici, $B(1\,;\,0\,;\,-4)$ $C(-3\,;\,0\,;\,0)$ $D(4\,;\,2\,;\,-3)$ sont des points appartenant au plan d'équation : $x-2y+z+3=0$. !
Trouvez les coordonnées d'un autre point appartenant à ce plan !!

Remarques

Cas particuliers importants :

Le plan d'équation $x = 0$ correspond au plan $(O ; \vec{j} ; \vec{k})$ car $x = 0$ s'écrit : $1x + 0y + 0z = 0$ donc $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est normal à ce plan.

Le plan d'équation $y = 0$ correspond au plan $(O ; \vec{i} ; \vec{k})$ ... $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal à ce plan ...

Le plan d'équation $z = 0$ correspond au plan $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ... Rq : $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est normal à ce plan

Que dire de deux plans qui ont des vecteurs normaux égaux (ou colinéaires) ? → Ils sont parallèles.

Exercice 13 *(le basique, à maîtriser parfaitement)*

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ un R.O.N. de l'espace, et $A(1 ; 0 ; 2)$, $B(3 ; 1 ; -1)$ et $C(0 ; 0 ; 4)$.

On admet que A, B et C ne sont pas alignés.

1a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
↳ synonyme : orthogonal

1b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (☛ Question qui tombe avec une probabilité égale ou supérieure à 0,9999 au bac…).

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point K milieu de [AC].

3) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{P}$ suivant :
$\mathcal{P} = \{M(x ; y ; z) / \ x - y + z + 4 = 0\}$.

4) On appelle plan médiateur du segment [BC] le plan $\mathcal{M}$ passant par le milieu I de [BC] et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{M}$.

A, B, C non alignés, de ils forment un unique plan : le plan (ABC).

1.a) $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

Mq $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Or $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = xx' + yy' + zz' = 2\times 2 + (-1)\times 1 + 1\times(-3) = 4 - 1 - 3 = 0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-1) + (-1)\times 0 + 1\times 2 = -1 + 2 = 0\end{cases}$

Donc n est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui ne sont colin.

Donc n est normal au plan (ABC).

1.b) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), donc une équa° cartésienne du plan est :

$2x + (-1)y + 1z + d = 0$

$2x - y + z + d = 0$

Or $C(0;0;4) \in (ABC)$ donc $2x_C - y_C + z_C + d = 0$

donc $2\times 0 - 0 + 4 + d = 0$

$4 + d = 0$

$d = -4$

Ainsi une éq° cartésienne de (ABC) est donc :

$2x - y + z - 4 = 0$.

2) (d) est orthogonale au plan (ABC) et (d) passe par le point K = milieu de [AC]

$\begin{cases} \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ est normal au plan (ABC)} \\ \text{(d) est orthogonale au plan (ABC)} \end{cases}$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$K\left(\frac{-1+0}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{2+4}{2}\right)$ car K est le milieu de [AC].

$K\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 3\right)$

Récapitulatif : (d) passe par $K\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 3\right)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d)

Donc une R-P de (d) est :

$\begin{cases} x = 2t + \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = t + 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

3) $\mathcal{P} = \{M(x;y;z) \mid x - y + z + 4 = 0\}$

$x - y + z + 4 = 0$ est une éq° cartésienne de la forme :

$ax + by + cz + d = 0$ avec $(a;b;c) = (1;-1;1)$

Or $(1;-1;1) \neq (0;0;0)$ donc $\mathcal{P}$ est un plan.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Or +, $Q(0;0;-4)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ car : $0-0-4+4=0$!

Donc $\mathcal{P}$ est le plan passant par $Q(0;0;-4)$ et qui admet $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

d)

Le plan médiateur de [BC] est le plan M tq :

$\begin{cases} I = \text{milieu de } [BC] \text{ appartient à } M \ (**) \\ \vec{BC} \text{ est normal au plan } M \ (*) \end{cases}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}$ est normal à M, donc M a pour éq° cartésienne :

(*) $-3x-y+5z+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$

(**) I = milieu de [BC], donc $I\left(\frac{3+0}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{-1+4}{2}\right)$

$$I\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$$

$I\left(\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right) \in M$ donc $-3x_I - y_I + 5z_I + d = 0$

donc $-3\times\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 5\times\frac{3}{2} + d = 0$

$$\frac{-9}{2} - \frac{1}{2} + \frac{15}{2} + d = 0$$

$$\frac{5}{2} + d = 0$$

$$d = \frac{-5}{2}.$$

M a pour E.C : $-3x-y+5z-\frac{5}{2}=0$

Exercice Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

a) Démontrez que les points $A(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $B(-3\ ;\ -1\ ;\ 7)$ et $C(3\ ;\ 2\ ;\ 4)$ définissent un plan $\mathcal{P}$.

b) Démontrer que la droite (d) dont une R.P. est : $\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

c) En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

d) Soit $D(1\ ;0\ ;5)$. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.

e) Déterminer les coordonnées du point H intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

a) $A(2;1;3)$, $B(-3;-1;7)$ et $C(3;2;4)$

Mq A, B et C ne sont pas alignés.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\frac{x_{\vec{AB}}}{x_{\vec{AC}}} = \frac{-5}{1} = -5$ et $\frac{y_{\vec{AB}}}{y_{\vec{AC}}} = \frac{-2}{1} = -2$

$-5 \neq -2$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colin.

Donc A, B et C non alignés et forment un unique plan.

b) Méthode : Mq (d) est orthogonale à 2 vecteurs non colin. de $\mathcal{P}$.

Par lecture de la RP donnée : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ dirige (d)

Mq $\begin{cases}\vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC}\end{cases}$

Or $\vec{u}\cdot\vec{AB} = xx' + yy' + zz' = 2\times(-5) + (-3)\times(-2) + 1\times 4 = 0$

Donc $\vec{u} \perp \vec{AB}$.

De m. : $\vec{u}\cdot\vec{AC} = 2\times 1 + (-3)\times 1 + 1\times 1 = 0$.

Donc $\vec{u} \perp \vec{AC}$

Par suite, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne st pas colin., et que $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ on a : $\vec{u}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

Donc (d) est orthogonale à $\mathcal{P}$.

VIII- Projeté orthogonal

A Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d.

↳ H : projeté orthogonal de A sur la droite (d).

Remarques : • Le plan passant par M et orthogonal à d est unique.
• Lorsque $M \in d$, le projeté orthogonal de M sur d est le point M.

Propriété - Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite d.

Démonstration

• Si $M \in d$, alors $MH = 0$ et H est le point de d le plus proche de M.
• Si $M \notin d$, alors pour tout point M' de d, le triangle MHM' est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de d le plus proche de M.

B Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{P}$.

Remarque : lorsque $M \in \mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M.

Propriété - Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration

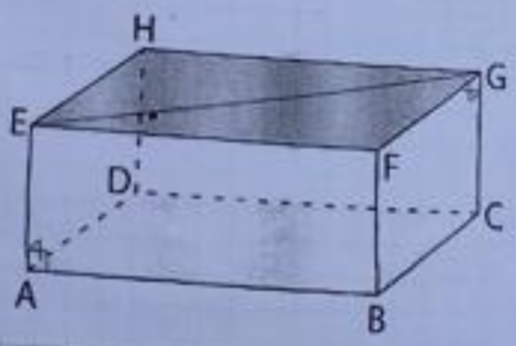
• Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
• Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M' de $\mathcal{P}$, le triangle MHM' est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.

Exemple

Dans le pavé droit ABCDEFGH, ci-contre, déterminer :

a) Le projeté orthogonal du point H sur le plan (ABC).

b) Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG).



a) le point D.

b) le point

Exercice 1

Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ un R.O.N. de l'espace.

Soit (d) la droite passant par $A(1\,;-2\,;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ et $B(-15\,;-10\,;4)$.

On se propose de déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur la droite (d).

a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par B et orthogonal à (d).

b) En déduire les coordonnées du point H.

c) Calculer la distance du point B à la droite (d).

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ dirige (d) et $\mathcal{P}$ est orthogonal à (d) donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Par suite une E.C de $\mathcal{P}$ est : $-3x+1y+4z+d=0$

Or $B(-15;-10;4)\in\mathcal{P}$, donc : $-3x_B+1y_B+4z_B+d=0$

$$-3\times(-15)+(-10)+4\times4+d=0$$

$$51+d=0$$

$$d=-51.$$

Donc $\mathcal{P}$ a pour équa° : $-3x+y+4z-51=0$.

b) M_1 : Donnons une RP de (d) :

$$\begin{cases}x=1-3t\\y=-2+t\\z=1+4t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$$

Soit $H(x_H\,;y_H\,;z_H)$ le projeté orthogonal de B sur (d).

*) $H\in(d)$

**) $\overrightarrow{BH}\perp\vec{u}$

$\iff$ $x_H=1-3t$, $y_H=-2+t$, $z_H=1+4t$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}x_H+15\\y_H+10\\z_H-4\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$

$$-3(x_H+15)+(y_H+10)+4(z_H-4)=0$$

$$-3(1-3t+15)+(-2+t+10)+4(1+4t-4)=0$$

$$9t+t+16t-48+8-12=0$$

$$26t=52$$

$$t=\frac{52}{26}=2.$$

Enfin : $\begin{cases} x_H = 1 - 3 \times 2 = -5 \\ y_H = -2 + 2 = 0 \\ z_H = 1 + 2 \times 2 = 5 \end{cases}$ $H(-5;0;5)$.

M_2 : $H = (d) \cap \mathcal{P}$ ......

c) La distance du point B à la droite (d) n'est autre que BH.

Or $B(-15;-10;4)$ et $H(-5;0;5)$.

$\vec{BH}\begin{pmatrix}10\\10\\5\end{pmatrix}$ donc $BH = \|\vec{BH}\| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{225} = 15$ u.l.

Exercice 16

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(3 ; 1 ; -2)$ de de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$.

a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$, parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point $B(-5 ; 0 ; 7)$.

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, donc une éq° cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$4x + 6y + 3z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Or $A(3;1;-2) \in \mathcal{P}$ donc : $4 \times 3 + 6 \times 1 + 3 \times (-2) + d = 0$

$12 + d = 0$

$d = -12$.

Donc une E.C de $\mathcal{P}$ est : $4x + 6y + 3z - 12 = 0$.

b) Des plans // ont des vecteurs normaux égaux (ou égaux).

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ st // et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$ est également normal à $\mathcal{P}'$.

Donc une E.C. de $\mathcal{P}'$: $4x + 6y + 3z + d' = 0$ où $d' \in \mathbb{R}$.

Or $B(-5;0;7) \in \mathcal{P}'$, donc : $4 \times (-5) + 6 \times 0 + 3 \times 7 + d' = 0$

$$1 + d' = 0$$

$$d' = -1$$

P' a pour E.C. : $4x + 6y + 3z - 1 = 0$.

Exercice [illegible]

Soit $A(1\,;-5\,;3)$, $B(2\,;-4\,;4)$, $C(-1\,;-2\,;2)$ et $D(18\,;\ -3\,;25)$ quatre points de l'espace.

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-4\,;-1\,;5)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-1\\5\end{pmatrix}$

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Vérifier que le point $H(-2\,;-8\,;0)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

1\. a. ABC est rectangle en A ssi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1=1\\-4+5=1\\4-3=1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz' = 1\times(-2) + 1\times 3 + 1\times(-1) = -2+3-1 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et par suite ABC est un triangle rectangle en A.

b. ABC rectangle en A, donc $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB \times AC}{2}$.

Or $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ u.l.

$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$ u.l.

Donc $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{14}}{2} = \dfrac{\sqrt{3\times 14}}{2} = \dfrac{\sqrt{42}}{2}$ u.a.

c) $\vec{u}$ dirige (D) et (D) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$,
donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Donc $\mathcal{P}$ a pr équa° cartésienne : $2x + (-3)y + 1z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$$2x - 3y + z + d = 0$$

Or $A(1;2;3) \in \mathcal{P}$, donc : $2x_A - 3y_A + z_A + d = 0$

$$2\times 2 - 3\times 1 + 3 + d = 0$$

$$4 + d = 0$$

Donc $d = -4$.

Ainsi une E.C de $\mathcal{P}$ est : $2x - 3y + z - 4 = 0$.

d) Les coordonnées de D vérifient-elles l'équa° de $\mathcal{P}$?

Si $2x_D - 3y_D + z_D - 4 = 0$, alors $D \in \mathcal{P}$.

Si $2x_D - 3y_D + z_D - 4 \neq 0$, alors $D \notin \mathcal{P}$.

Or $2x_D - 3y_D + z_D - 4 = 2\times 1 - 3\times 0 + 5 - 4 = 3$.

Or $3 \neq 0$.

Donc $D(1;0;5) \notin \mathcal{P}$ et par suite A, B, C et D ne st pas coplanaires.

) (d) et $\mathcal{P}$ st orthogonaux donc (d) et $\mathcal{P}$ ont un unique point en commun : $H(x_H ; y_H ; z_H)$.

$H \in (d) \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} x_H = -7 + 2t \\ y_H = -3t \\ z_H = 4 + t \\ 2x_H - 3y_H + z_H - 4 = 0 \end{cases}$

Par suite, on a : $2(-7 + 2t) - 3\times(-3t) + 4 + t - 4 = 0$

$$-14 + 4t + 9t + t = 0$$

$$14t = 14$$

$t = 1$. Par suite, $\begin{cases} x_H = -7 + 2\times 1 = -5 \\ y_H = -3\times 1 = -3 \\ z_H = 4 + 1 = 5 \end{cases}$

Donc $H(-5;-3;5)$.

2. a. $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = xx' + yy' + zz' = -4 - 1 + 5 = 0$

Donc $\vec{n} \perp \vec{AB}$.

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = -4\times(-2) + (-1)\times 3 + 5\times(-1) = 8 - 3 - 5 = 0$.

Donc $\vec{n} \perp \vec{AC}$.

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-1\\5\end{pmatrix}$ est normal aux 2 vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colin.

(car $A(ABC) \neq 0$).

Donc une E.C. de (ABC) est :

$-4x - y + 5z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$A(1;-5;3) \in (ABC)$, donc : $-4\times 1 - (-5) + 5\times 3 + d = 0$

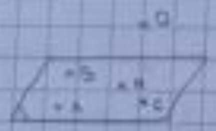
$d + 16 = 0$

$d = -16$.

(ABC) a pour E.C. : $-4x - y + 5z - 16 = 0$

ou encore : $4x + y - 5z + 16 = 0$

c.



H est le projeté orthogonal de O sur (ABC)

ssi : $\begin{cases}(1)\ H \in (ABC)\\(2)\ \vec{OH} \perp (ABC)\end{cases}$ ssi $\begin{cases}(1)\ H \in (ABC)\\(2)\ \vec{OH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colin.}\end{cases}$

$H(-2;-8;0)$ donc $4x_H + y_H - 5z_H + 16 = 4\times(-2) + (-8) + 16 = -8 - 8 + 16 = 0$.

Donc $H(-2;-8;0) \in (ABC)$

$\vec{OH}\begin{pmatrix}-20\\-5\\25\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-1\\5\end{pmatrix}$ donc $\vec{OH} = 5\vec{n}$ donc $\vec{OH}$ et $\vec{n}$ colin.

Donc $H(-2;-8;0)$ est le projeté de O sur (ABC).

3.a. Rappel : la distance du point D au plan (ABC) est la distance entre D et son projeté orthogonal H sur le plan (ABC).

On cherche ici DH :

$D(18\,;-3\,;-25)$ et $H(-2\,;-8\,;0)$

Donc $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}-20\\-5\\25\end{pmatrix}$ donc $DH = \|\overrightarrow{DH}\| = \sqrt{(-20)^2+(-5)^2+25^2} = \sqrt{400+25+625} = \sqrt{1050}$

$DH = 5\sqrt{42}$ u.l.

b. croquis :

$V(\text{tétraèdre}) = \dfrac{\text{aire de Base} \times \text{hauteur}}{3}$

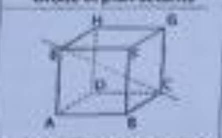
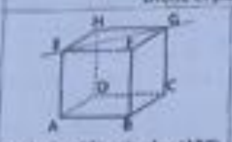
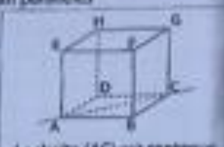
Ici : $V(ABCD) = \dfrac{A(ABC)\times h}{3}$ où $h = DH$ par déf° du projeté orthogonal de D sur (ABC).

$V(ABCD) = \dfrac{\frac{\sqrt{42}}{2}\times 5\sqrt{42}}{3} = \dfrac{5\times 42}{6} = 35$ u.v.

IX-Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

A-Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants et ont alors un unique point d'intersection, soit parallèles et n'ont alors aucun point d'intersection.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
		
La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.	La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.	La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).

Propriété (admise)

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, et $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. ♥♥♥ **(d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ sont** orthogonaux ♥♥♥

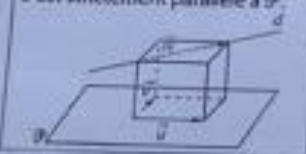
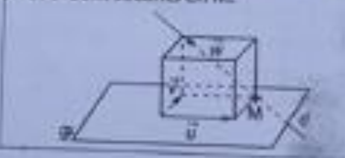
2. **(d) et $\mathcal{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ ne sont pas** .orthogonaux

On a aussi les deux règles suivantes moins utilisées :

1bis. ♥♥♥ (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.♥♥♥

2bis. (d) et $\mathcal{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

• $\mathcal{P}$ est un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

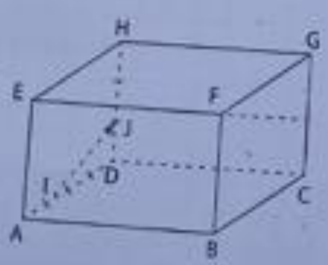
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : d et $\mathcal{P}$ sont parallèles.		$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.	d est contenue dans $\mathcal{P}$.	d et $\mathcal{P}$ sont sécants en M.
		

Remarque : dans les exercices, sans vecteurs, lorsqu'on voudra justifier qu'une droite (d) et un plan $\mathcal{P}$ sont parallèles, il suffira donc de justifier que la droite (d) est parallèle à l'une des droites contenues dans le plan $\mathcal{P}$.

On procédera essentiellement de façon vectorielle.

Exercice 18

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) En déduire que la droite (IJ) et le plan (BCG) sont parallèles.

a) Mq $\vec{IJ}$ est une CBL des vecteurs $\underbrace{\vec{BC} \text{ et } \vec{BF}}_{\text{non col}}$

Or $\vec{IJ} = \vec{IO} + \vec{OJ} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DH}$

Or $\vec{AD} = \vec{BC}$ et $\vec{DH} = \vec{BF}$

Donc $\vec{IJ} = \frac{3}{4}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BF}$

Par suite, $\vec{IJ}$ est CBL des vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{DF}$ donc $\vec{IJ}$, $\vec{BC}$ et $\vec{BF}$ st dna

b) $\vec{IJ}$ dirige (IJ) et $(\vec{BC}, \vec{BF})$ est une base du plan (BCG) et d'après q.a,

$\vec{IJ}$, $\vec{BC}$ et $\vec{BF}$ st coplanaires.

Donc (IJ) et (BCG) st parallèles.

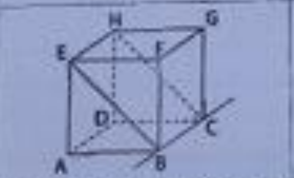
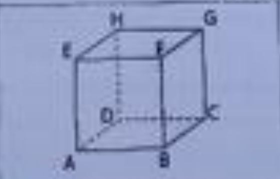
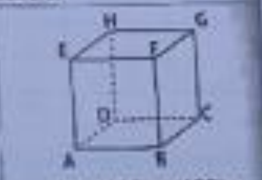
B- Position relative de deux plans de l'espace

Rappel : En géométrie dans l'espace, deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun, confondus lorsqu'ils ont tous leurs points en commun.

Deux plans sont dits sécants lorsqu'ils ne sont ni parallèles ni confondus.

Deux plans sécants se coupent (toujours) suivant une droite.

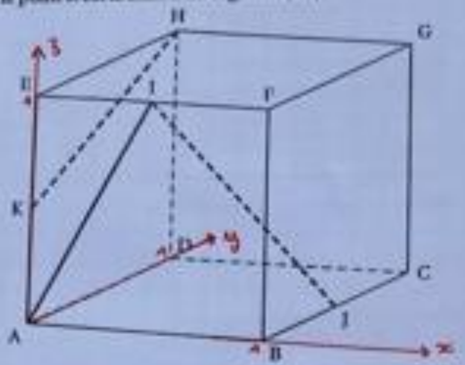
Illustration :

Plans sécants	Plans parallèles	
		
Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	Les plans (ABC) et (ABD) som confondus.

Quelques exercices issus de textes de baccalauréat

Exercice I

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. a. Donner les coordonnées des points I et J.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1:\begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2:\begin{cases} x = 4+t' \\ y = 1+t' \\ z = 8+2t' \end{cases},\ t'\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

1) (AI) et (KH) ne st pas parallèles

En effet, (AI) et (KH) ne st pas coplanaires.

Rappel : Si 2 droites st // alors elles st coplanaires.

Par contraposée : Si 2 droites ne st pas coplanaires, alors elles ne st pas //.

2) a. I est le milieu de [EF].

Or E(0 ; 0 ; 1) et F(1 ; 0 ; 1)

Donc $I\left(\frac{0+1}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{1+1}{2}\right)$

$I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$

J milieu de [BC] avec B(1 ; 0 ; 0) et C(1 ; 1 ; 0).

Donc $J(1; \frac{1}{2}; 0)$.

b. $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ ne st pas clna

Donc $(\vec{AE}, \vec{AC})$ est une base du plan (AEC).

Mq: $\vec{IJ}$ est une CBL des vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$

But: Trouver les réels a et b tq.

$$\vec{IJ} = a\vec{AE} + b\vec{AC}$$

Or $\vec{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

M_1: Par calcul mental: $\vec{IJ} = -\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

Donc $\vec{IJ}$, $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ st coplanaires.

M_2: sans calcul mental

Egaler les coordonnées de $\vec{IJ}$ et de $a\vec{AE} + b\vec{AC}$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = a\times 0 + b\times 1 \\ \frac{1}{2} = a\times 0 + b\times 1 \\ -1 = a\times 1 + b\times 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) Par lecture des RP données:

d_1 est dirigée par $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et d_2 est dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Or $\frac{x_{\vec{u_1}}}{x_{\vec{u_2}}} = \frac{1}{1} = 1$ et $\frac{y_{\vec{u_1}}}{y_{\vec{u_2}}} = \frac{-2}{1} = -2$

Or $1 \neq -2$, donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne st pas clna.

Par suite, d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

)

$\mathcal{P}$ a pour équa° : $x + 3y - 2z + 2 = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

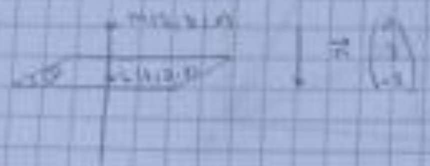
Rappel : d_2 et $\mathcal{P}$ sont $\parallel$ ssi $\vec{n} \perp \vec{u_2}$.

Calculons $\vec{n} \cdot \vec{u_2}$.

Or $\vec{n} \cdot \vec{u_2} = xx' + yy' + zz' = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-2) \times 2 = 1 + 3 - 4 = 0$.

Donc $\vec{n} \perp \vec{u_2}$ et par suite d_2 et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

5)



Vérifions : - $L(4;0;3) \in \mathcal{P}$

- $\vec{ML}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$

-1. $x_L + 3y_L - 2z_L + 2 = 4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$.

Donc $L(4;0;3) \in \mathcal{P}$

-2. $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, le point 2 revient à établir que $\vec{n}$ et $\vec{ML}$ sont

Or $\vec{ML}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$

Donc $\vec{ML} = -\vec{n}$, donc $\vec{ML}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Par suite L est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

<u>*Exercice II*</u> (*métropole 2022*)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1 ; 1 ; 3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2+2t \end{cases}$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

   b. Montrer que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.

   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point $B(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ (par lecture de la RP).

b. $B(-1;3;0) \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_B = 1+2t \\ y_B = 2-t \\ z_B = 2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} -1 = 1+2t \\ 3 = 2-t \\ 0 = 2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{-2}{2} = -1 \\ t = 2-3 = -1 \\ t = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

Système compatible.

Donc B est le point de paramètre $t=-1$ de la droite $\mathscr{D}$.

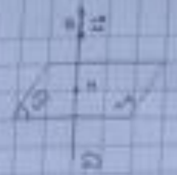
Donc $B(-1;3;0) \in \mathscr{D}$.

c. $A(-1;1;3)$; $B(-1;3;0)$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1+1=0\\3-1=2\\0-3=-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = xx' + yy' + zz' = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = -2-6 = -8$.

2



a) $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}$ et $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Donc une équa° cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$2x + (-1)y + 2z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$2x - y + 2z + d = 0$

Enfin $A(-1;1;-3) \in \mathcal{P}$, donc :

$2x_A - y_A + 2z_A + d = 0$

$2\times(-1) - 1 + 2\times 3 + d = 0$

$-2 - 1 + 6 + d = 0$

$d = -3$

$\mathcal{P}$ a pour équa° : $2x - y + 2z - 3 = 0$

b) H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$.

ou encore H est le point d'intersec° de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.

Soit $H(x_H ; y_H ; z_H)$: $H \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = 2 - t \\ z_H = 2 + 2t \\ 2x_H - y_H + 2z_H - 3 = 0 \end{cases}$

On a donc : $2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0$ (éq° en t)

$2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0$

$9t + 1 = 0$

$t = \frac{-1}{9}$.

Et par suite : $\begin{cases} x_H = 1 + 2\times\left(\frac{-1}{9}\right) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \\ y_H = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H = 2 + 2\times\frac{-1}{9} = \frac{16}{9} \end{cases}$

Donc $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$

c) $A(-1;1;3)$ et $H\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$

$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{7}{9}-(-1)=\frac{7}{9}+1=\frac{16}{9} \\ \frac{19}{9}-1=\frac{19}{9}-\frac{9}{9}=\frac{10}{9} \\ \frac{16}{9}-3=\frac{16}{9}-\frac{27}{9}=\frac{-11}{9} \end{pmatrix} \quad \text{Donc } \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{-11}{9} \end{pmatrix}$$

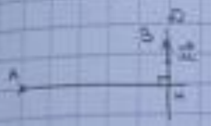
$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AH}})^2 + (y_{\overrightarrow{AH}})^2 + (z_{\overrightarrow{AH}})^2}$$

$$AH = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{-11}{9}\right)^2}$$

$$AH = \sqrt{\frac{16^2}{9^2} + \frac{10^2}{9^2} + \frac{(-11)^2}{9^2}} = \sqrt{\frac{16^2+10^2+(-11)^2}{9^2}} = \frac{\sqrt{256+100+121}}{9} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{\sqrt{9\times 53}}{9}$$

$$AH = \frac{\sqrt{9}\times\sqrt{53}}{9} = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3} \text{ u.l.}$$

3.



a) H est le projeté orthogonal de A sur D, donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\vec{u}$

car $\vec{u}$ dirige D.

Or $B \in D$, $H \in D$ (déf du projeté ⊥), donc $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : il existe

donc un réel k tq : $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b) On sait que : $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

D'après la relat° de Chasles : $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$

Donc $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}).\vec{u} = k\vec{u}.\vec{u}$

$$\underbrace{\overrightarrow{HA}.\vec{u}}_{0 \text{ par déf du projeté } \perp : \overrightarrow{AH} \perp \vec{u}} + \overrightarrow{AB}.\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2 \quad \text{car } \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Donc $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = k\|\vec{u}\|^2$

Donc ĉ $\vec{u} \neq 0$, donc $\|\vec{u}\|^2 \neq 0$, donc :

$$k = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

c) $k = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ avec $\vec{AB} \cdot \vec{u} = -8$ (q. 1a)

et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = 2^2 + (-1)^2 + 2^2$

$\|\vec{u}\|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$

Donc $k = \frac{-8}{9}$.

Enfin : $\vec{HB} = k\vec{u} = \frac{-8}{9}\vec{u}$: égalité vectorielle

$H(x_H ; y_H ; z_H)$: $\vec{HB}\begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ -z_H \end{pmatrix}$ et $\frac{-8}{9}\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \times 2 \\ -\frac{8}{9} \times (-1) \\ -\frac{8}{9} \times 2 \end{pmatrix}$

Donc $-\frac{8}{9}\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{-16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{-16}{9} \end{pmatrix}$

Par suite, $\vec{HB} = -\frac{8}{9}\vec{u}$ se traduit par :

$$\begin{cases} -1 - x_H = \frac{-16}{9} \\ 3 - y_H = \frac{8}{9} \\ -z_H = \frac{-16}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = -1 + \frac{16}{9} = \frac{7}{9} \\ y_H = 3 - \frac{8}{9} = \frac{27}{9} - \frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Donc $H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$

4)

$V(ABCH) = \frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ACH) \times HB$ (par déf° de H)

avec $\overrightarrow{HB} = \frac{-8}{9}\vec{u}$ donc $HB = \|\overrightarrow{HB}\| = \|\frac{-8}{9}\vec{u}\| = \left|\frac{-8}{9}\right| \times \|\vec{u}\|$

$HB = \frac{8}{9} \times 3$ car $\|\vec{u}\|^2 = 9$ donc $\|\vec{u}\| = 3$ car $\|\vec{u}\| > 0$.

$HB = \frac{8}{3}$ u.l.

Enfin on a l'équa° suivante :

$\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ACH) \times \frac{8}{3}$

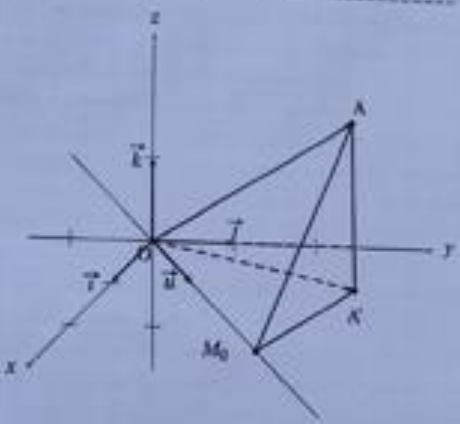
$\frac{8}{9} = \frac{8}{9} \times \mathcal{A}(ACH)$

$\mathcal{A}(ACH) = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{9}} = 1$ u.a.

Exercice III

Dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées (1 ; 3 ; 2),
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,0)$.

   a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

   b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;\,3\,;\,0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

1) d passe par $O(0;0;0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige d, donc une RP de d est :

$$\begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 1t + 0 \\ z = 0t + 0 \end{cases} \quad \text{càd} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2) a. M est le point de d de paramètre t, donc :

$M(t\,;\,t\,;\,0)$
$A(1\,;\,3\,;\,2)$ donc $\vec{AM}\begin{pmatrix}t-1\\t-3\\-2\end{pmatrix}$

Donc $AM^2 = \vec{AM}^2 = \vec{AM}\cdot\vec{AM} = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2$

$AM^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4$

$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$

b. Soit f la fonc° définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.
Etudions le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ dans le but de trouver le maximum de f et en quelle valeur il est atteint.

$f'(t) = 4t - 8$

$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 4t - 8 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$

Donc

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ainsi f admet son max sur $\mathbb{R}$ lorsque $t = 2$.

Donc AM^2 et donc AM est minimale lorsque $t = 2$.

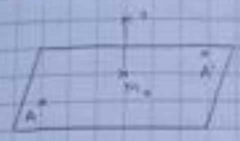
Ainsi le pt de paramètre $t = 2$ de d est $(2;2;0)$ à savoir M_0.

$M_0(2;2;0) \in (d)$ et c le pt de (d) pr lequel AM minimale.

3. $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige (AM_0).

$\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = xx' + yy' + zz' = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + (-2) \times 0 = 1 - 1 = 0.$

Ainsi $\overrightarrow{AM_0} \perp \vec{u}$, donc (AM_0) et (d) st orthogonales (mieux elles st perp.).

4. 

De part son nom, $M_0 \in (AA'M_0)$

Mq : M_0 est le projeté orthogonal du pt O sur le plan $(AA'M_0)$.

Pour cela prouvons que $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur normal au plan $(AA'M_0)$, en mq $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{AM_0}$

non clnr

$\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{AA'} = 2 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times (-2) = 0$ donc $\overrightarrow{OM_0} \perp AA'$.

$\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{AM_0} = 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times (-2) = 2 - 2 = 0$ donc $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{AM_0}$.

Or AA' et AM_0 ne st pas clnr.

Donc $\overrightarrow{OM_0}$ est orthogonal au plan $(AA'M)$.

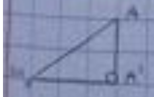
Donc M_0 est le projeté orthogonal de O sur $(AA'M_0)$.

Donc M_0 est le pt du plan $(AA'M_0)$ le + proche de O.

5. $V(OM_0A'A) = \dfrac{\mathcal{A}(AA'M_0) \times OM_0}{3}$ car $\overrightarrow{OM_0} \perp (AA'M_0)$.

$M_0(2;2;0)$ donc $\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$. Donc $OM_0 = \|\overrightarrow{OM_0}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Donc par la déf° du pt A', on a : $AA'M_0$ est un triangle rectangle en



Donc $\mathcal{A}(AA'M_0) = \dfrac{AA' \times A'M_0}{2}$ avec $AA'\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$

Donc $AA' = \|\overrightarrow{AA'}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 0^2} = 2$ u.l.

⇒ voir suite fin cahier

fin exo III

q. 5. Suite

$\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Donc $A'M_0 = \|\overrightarrow{A'M_0}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$ u.l.

$\mathcal{A}(AA'M_0) = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ u.a.

$\mathcal{V}(OM_0AA') = \dfrac{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4}{3}$ u.v.

Définition

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = r$.

Illustration :

$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega M = r$

Soit $M(x\,;y\,;z)$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω.

Propriété (à la frontière du programme)

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r a pour équation réduite : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$\Omega(a\,;b\,;c)$

Soit $M(x\,;y\,;z)$ et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(a\,;b\,;c)$ et de rayon $r\geq 0$.

$M(x\,;y\,;z)\in\mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega M = r \overset{\text{positivité des longueurs}}{\Leftrightarrow} \Omega M^2 = r^2$

avec $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$ donc $\Omega M^2 = \overrightarrow{\Omega M}^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

$M(x\,;y\,;z)\in\mathcal{S} \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

<u>Exemple</u> : Déterminer l'équation réduite de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1 ; 2 ; -1)$ et de rayon $r = 3$.

Le point $M(2 ; 0 ; -1)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?

Trouver les coordonnées du point diamétralement opposé sur $\mathcal{S}$ au point $K(1 ; 2 ; -4)$. On commencera par vérifier que K appartient à $\mathcal{S}$.

Ici $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1 ; 2 ; -1)$ et de rayon $r = 3$

Ici $a = 1$; $b = 2$ et $c = -1$.

$\mathcal{S}$ a pour équation : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = 3^2$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

Calculons : $(x_M - 1)^2 + (y_M - 2)^2 + (z_M + 1)^2 = (2-1)^2 + (0-2)^2 + (-1+1)^2 = 5$

Or $5 \neq 9$, donc $M \notin \mathcal{S}$.

$K(1 ; 2 ; -4)$. Mq $K \in \mathcal{S}$:

Or $(x_K - 1)^2 + (y_K - 2)^2 + (z_K + 1)^2 = (1-1)^2 + (2-2)^2 + (-4+1)^2 = 0^2 + 0^2 + (-3)^2 = 9$.

Ainsi les coordonnées de K vérifiant l'équation de $\mathcal{S}$ donc $K \in \mathcal{S}$.

Soit K' le point diamétralement opposé à K sur la sphère $\mathcal{S}$.

Donc Ω = milieu de $[KK']$.

Donc $x_\Omega = \dfrac{x_K + x_{K'}}{2}$; $y_\Omega = \dfrac{y_K + y_{K'}}{2}$ et $z_\Omega = \dfrac{z_K + z_{K'}}{2}$.

Donc $x_{K'} = 2x_\Omega - x_K = 2 \times 1 - 1 = 1$

$y_{K'} = 2y_\Omega - y_K = 2 \times 2 - 2 = 2$

$z_{K'} = 2z_\Omega - z_K = 2 \times (-1) - (-4) = 2$.

Donc $K'(1 ; 2 ; 2)$.

Exercice IV L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(5;0;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$.

1. a. Soit R le milieu du segment [AB].
Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

$$x-y-1=0.$$

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que $EA=EB$.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x-z-2=0$.
a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y+z-3=0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS=MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.
b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

1. a. $A(5;0;-1)$ et $B(1;4;-1)$.

R est le milieu de [AB], donc $R\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

donc $R\left(\frac{5+1}{2} ; \frac{0+4}{2} ; \frac{-1+(-1)}{2}\right)$

donc $R(3;2;-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A = 1-5=-4 \\ y_B-y_A = 4-0=4 \\ z_B-z_A = -1-(-1)=0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$.

b. $\mathscr{P}_1$: plan passant par R et $\overrightarrow{AB}$ est normal à $\mathscr{P}_1$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}_1$ donc $\mathscr{P}_1$ a pour équation :

$-4x+4y+0z+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$-4x+4y+d=0$.

$A(3;2;-1) \in \mathcal{P}_1 \iff -4x_A + 4y_A + d = 0$

$\iff -4 \times 3 + 4 \times 2 + d = 0$

$\iff -12 + 8 + d = 0$

$A(3;2;-1) \in \mathcal{P}_1 \iff d = 4.$

Donc $\mathcal{P}_1$ a pour E.C : $-4x + 4y + 4 = 0$

$-4(x - y - 1) = 0$

$x - y - 1 = \frac{0}{-4} = 0.$

$\mathcal{P}_1$ a pour E.C. : $x - y - 1 = 0.$

c. $E(10;9;8)$

Calculons : $x_E - y_E - 1 = 10 - 9 - 1 = 0$

Donc $E(10;9;8) \in \mathcal{P}_1$.

$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-5\\-9\\-9\end{pmatrix}$ donc $EA = \|\overrightarrow{EA}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-9)^2 + (-9)^2} = \sqrt{187}$ u.l.

$\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-9\\-5\\-9\end{pmatrix}$ donc $EB = \|\overrightarrow{EB}\| = \sqrt{187}$ u.l.

Donc $EA = EB$.

2. a. $\mathcal{P}_2$ a pour E.C : $x - z - 2 = 0$.

$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ st clns.

Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ st sécantes $\iff \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne st pas clns

Ici $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$.

$\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$.

Ici : $\frac{x_{\vec{n_2}}}{x_{\vec{n_1}}} = \frac{1}{1} = 1.$ et $\frac{y_{\vec{n_2}}}{y_{\vec{n_1}}} = \frac{0}{-1} = 0$; $0 \neq 1$.

Donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles,

par suite $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne st pas clns.

Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécantes.

b. 

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, donc ils se coupent suivant une droite appelée Δ.

Soit $M(x;y;z)$. $M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$

Posons $z=t$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x=z+2 \\ z=t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z+2=t+2 \\ y=x-1=t+2-1=t+1 \\ z=t \end{cases}$

Ainsi une R.P de Δ est : $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Bis : $M(x;y;z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$

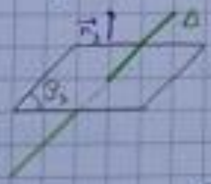
Posons $x=t'$. $\Leftrightarrow \begin{cases} x=t' \\ x-y-1=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t' \\ t'-y-1=0 \\ t'-z-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t' \\ y=t'-1 \\ z=t'-2 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$

↳ autre R.P.

3. $\mathcal{P}_3$ a pour E.C : $y+z-3=0$.



$M(x;y;z) \in \Delta \cap \mathcal{P}_3 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \\ y+z-3=0 \end{cases}$

On a donc : $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \\ \underbrace{1+t+t-3=0}_{\underbrace{2t-2=0}_{t=1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=2+1=3 \\ y=1+1=2 \\ z=1 \end{cases}$

Donc $\Delta \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$ et $\Delta \cap \mathcal{P}_3$ est le pt $\Omega(3;2;1)$.

4. Plan médiateur de $[AB] = \{M \in \mathcal{E},\ MA = MB\}$

= plan qui passe par le milieu de $[AB]$ et dt $\vec{AB}$ lui est orthogonal.

a. $\mathcal{P}_3$ est le plan médiateur de $[AD]$ et $\Omega \in \mathcal{P}_3$ d'après q.3.

Donc par déf° d'un plan médiateur : $\Omega A = \Omega D$.

$\mathcal{P}_1$ est le plan médiateur de $[AB]$.

Or $\Omega \in \Delta$ (déf de l'énoncé).

Or $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, donc $\Omega \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Or $\mathcal{P}_1 = \text{Med}\,[AB]$, donc $\Omega A = \Omega B$.

$\mathcal{P}_2 = \text{Med}\,[AC]$, donc $\Omega A = \Omega C$

Donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

b. D'après 4.a. : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

Donc A, B, C et D sont situés à la m̃ distance de Ω.

Or l'ensemble des points de l'espace situés à la m̃ distance d'un point Ω est une sphère de centre Ω.

Donc A, B, C, D appartiennent à une m̃ sphère de centre $\Omega(3;2;1)$.

Son rayon : $R = \Omega A$ avec $A(5;0;-1)$.

$\vec{\Omega A} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $R = \|\vec{\Omega A}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ u.l.

Exercice V (*Métropole 2011*)

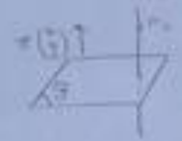
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathcal{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. $\to \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$



Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathcal{P})$ du point M_0 au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4 ; 1 ; 5)$, $(-3 ; 2 ; 0)$, $(1 ; 3 ; 6)$, $(-7 ; 0 ; 4)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathcal{P}$.

1. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{M_0H}\| \times \cos(\vec{n} ; \overrightarrow{M_0H})$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

et $\|\overrightarrow{M_0H}\| = M_0H$.

Donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = M_0H \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \cos(\vec{n}, \overrightarrow{M_0H})$

Or $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ st colin. car $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ est $\perp$ à $\mathcal{P}$ par déf° de H.

Donc $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0H}) = 0$ ou $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0H}) = \pi$.

$\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$

Donc $|\cos(0)| = |\cos(\pi)| = 1$.

Ainsi ε : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = M_0H \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \varepsilon$

On a : $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}| = M_0H \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times |\varepsilon|$

$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}| = M_0H \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$; $H(x_H ; y_H ; z_H)$ avec $H \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ a pour E.C :

$ax + by + cz + d = 0$.

Donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$. Donc $\overrightarrow{M_0H}\begin{pmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \\ z_H - z_0 \end{pmatrix}$

Donc $ax_H + by_H + cz_H = -d$.

Ainsi : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0)$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = ax_H - ax_0 + by_H - by_0 + cz_H - cz_0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = ax_H + by_H + cz_H - ax_0 - by_0 - cz_0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -d - ax_0 - by_0 - cz_0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$

3. Grâce à q.1 : $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Donc $M_0H = \dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ car $(a;b;c) \neq (0;0;0)$

Et d'après q.2 : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$

Donc : $|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = |-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)|$

$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Partie B

Mq A, B, C ne st pas alignés :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{1}{2}$. Or $\dfrac{7}{3} \neq \dfrac{1}{2}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ nn colin.

Par suite, A, B et C forment un unique plan appelé $\mathcal{P}$.

$x + 2y - z - 1 = 0$ est bien l'équa° d'un plan car $(1;2;-1) \neq (0;0;0)$.

Vérifions que A, B et C appartient au plan d'éq° : $x + 2y - z - 1 = 0$.

Pour $A(4;1;5)$: $x_A + 2y_A - z_A - 1 = 4 + 2\times1 - 5 - 1 = 6 - 6 = 0$

Donc A appartient à ce plan.

Pour $B(-3;2;0)$: $x_B + 2y_B - z_B - 1 = -3 + 2\times2 - 1 = -3 + 4 - 1 = 0$

Donc B appartient à ce plan.

Pour $C(1;3;6)$: $x_C + 2y_C - z_C - 1 = 1 + 2\times3 - 6 - 1 = 0$.

Donc C appartient à ce plan.

Comme A, B et C ne sont pas alignés.

$\mathcal{P} = (ABC)$ a pour E.C : $x + 2y - z - 1 = 0$

b) $d(F, \mathcal{P}) \overset{\text{partie 1}}{=} \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ avec $F(-7;0;4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est $\perp$ à $\mathcal{P}$.

$d(F, \mathcal{P}) = \dfrac{|1 \times (-7) + 2 \times 0 + (-1) \times 4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-7-4-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{|-12|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$ u.l.

Exercice VII

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère :

- le point $A(1\,;-1\,;-1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$; $\vec{n_1}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$; $\vec{n_2}\begin{pmatrix}10\\14\\3\end{pmatrix}$
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. a. Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.
   b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;-t\,;3-2t)$.
   On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = AM^2$.
   a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.
   b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\,;-1\,;1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3\,;-1\,;1)$.
   Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non $\parallel \iff \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires

$\vec{n_1}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}10\\14\\3\end{pmatrix}$ donc $\dfrac{x_{\vec{n_2}}}{x_{\vec{n_1}}} = \dfrac{10}{5} = 2$ et $\dfrac{y_{\vec{n_2}}}{y_{\vec{n_1}}} = \dfrac{14}{2} = 7$.

$2 \neq 7$, donc $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires.

Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles.

2. $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Soit $M \in \mathcal{D}$; $t \in \mathbb{R}$ tq :

$M(1+2t\,;-t\,;3-2t)$. Mq $M \in \mathcal{P}_1$ et $M \in \mathcal{P}_2$.

Or : $5x_M + 2y_M + 4z_M = 5(1+2t) + 2\times(-t) + 4(3-2t)$

$5x_M + 2y_M + 4z_M = 5 + 10t - 2t + 12 - 8t$

$5x_M + 2y_M + 4z_M = 17$. Donc $M \in \mathcal{P}_1$.

De m. $10x_M + 14y_M + 3z_M = 10(1+2t) + 14\times(-t) + 3(3-2t)$

$10x_M + 14y_M + 3z_M = 10 + 20t - 14t + 9 - 6t$

$10x_M + 14y_M + 3z_M = 19$. Donc $M \in \mathcal{P}_2$.

Donc $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3.a. $A(1;-1;-1)$

Calculons : $5x_A + 2y_A + 4z_A = 5\times 1 + 2\times(-1) + 4\times(-1) = 5-2-4 = -1$

Or $-1 \neq 17$, donc $A(1;-1;-1) \notin \mathcal{P}_1$.

b. Cherchons s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x_A = 1+2t \\ y_A = -t \\ z_A = 3-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1+2t \\ -1 = -t \\ -1 = 3-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{cases}$$: système incompatible : pas de

Donc $A(1;-1;-1) \notin \mathcal{D}$.

ou : $A \notin \mathcal{P}_1$ donc A n'appartient à aucune des droites contenues dans $\mathcal{P}_1$.

Or $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_1$, donc $A \notin \mathcal{D}$.

c. $f(t) = AM^2$ avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1+2t-1 = 2t \\ -t-(-1) = -t+1 \\ 3-2t-(-1) = -2t+4 \end{pmatrix}$

$f(t) = AM^2 = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} = (2t)^2 + (-t+1)^2 + (-2t+4)^2$

$f(t) = 4t^2 + t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 16t + 16$

$f(t) = 9t^2 - 18t + 17$

b. AM est minimale ssi AM² est minimale car une distance est positive.

Or $AM^2 = f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

Mq que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

C'est un trinôme avec $a = 9$, $b = -18$.

$a > 0$, donc f admet un min sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque : $t = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{18} = 1$.

$M(t) \in \mathcal{D}$: À $t = 1$, correspond le pt $M(1 + 2 \times 1 ; -1 ; 3 - 2 \times 1)$

$M(3 ; -1 ; 1)$.

5. $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ par lecture de RP.

$A(1 ; -1 ; -1)$ et $H(3 ; -1 ; 1)$

Donc : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$.

Donc $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$, donc (AH) est orthogonale à $\mathcal{D}$.

De +, $H \in \mathcal{D}$ et $H \in (AC)$, donc (AH) et $\mathcal{D}$ st perpendiculaires.

Exercice VIII L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère :

$$A(3 ; 0 ; 1), \quad B(2 ; 1 ; 2) \quad \text{et} \quad C(-2 ; -5 ; 1).$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$-x + y - 2z + 5 = 0.$$

4. On considère le point $S(1 ; -2 ; 4)$.
Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Montrer que les coordonnées de H sont $(0 ; -1 ; 2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathscr{D}$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ...

2. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' + zz' = -1 \times (-5) + 1 \times (-5) + 1 \times 0 = 5 - 5 = 0$.

Donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$.

Donc ABC est rectangle en A.

3. A, B, C non alignés (q.1.)

Soit $\mathcal{P}$ le plan ayant pour E.C : $-x + y - 2z + 5 = 0$.

Mq $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$.

Pour A : $-x_A + y_A - 2z_A + 5 = -3 + 0 - 2 \times 1 + 5 = 5 - 5 = 0$.

Donc $A \in \mathcal{P}$.

Pour le m̂ raisonnement on prouve que $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$.

Par suite, ĉ A, B et C ne st pas alignés : $\mathcal{P} = (ABC)$ et une E.C de (ABC) est : $-x + y - 2z + 5 = 0$.

4. (D) passe par $S(1; -2; 4)$ et (D) est orthogonale au plan (ABC).

D'après q.4 : $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

Comme (D) est orthogonale au plan (ABC), on peut dire que $\vec{n}$ dirige (D).

Par suite une RP de (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

5. $\{H\} = (D) \cap (ABC)$

$$H(x_H ; y_H ; z_H) \in (D) \cap (ABC) \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq : } \begin{cases} x_H = 1 - t \\ y_H = -2 + t \\ z_H = 4 - 2t \\ -x_H + y_H - 2z_H + 5 = 0 \end{cases}$$

Donc $-(1 - t) + (-2 + t) - 2(4 - 2t) + 5 = 0$

$-1 + t - 2 + t - 8 + 4t + 5 = 0$

$6t - 6 = 0$

$t = 1$

Donc : $x_H = 1 - 1 = 0$
$y_H = -2 + 1 = -1$
$z_H = 4 - 2 = 2$

Donc $H(0; -1; 2)$.

6. $S(1;-2;4)$; $H(0;-1;2)$

$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ donc $SH = \|\overrightarrow{SH}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ u.l.

7. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre H et de rayon BH.

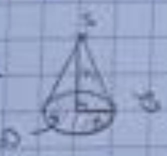
$\mathscr{A}(\text{Disque}) = \pi r^2$

$r = BH$ avec $B(2;1;2)$ et $H(0;-1;2)$.

Donc : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $BH = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u.l.

$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \pi \times \sqrt{8}^2 = 8\pi$ u.a.

8.



$\mathscr{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(\mathscr{D}) \times h = \frac{\pi r^2 \times h}{3} = \frac{\mathscr{A}(\mathscr{D}) \times SH}{3} = \frac{8\pi \times \sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}\,\pi}{3}$ u.v.