Chapitre 10 — Arithmétique et ensembles de nombres

I – Introduction

Les nombres, vous les manipulez depuis l'école maternelle ! Ils sont à l'origine des mathématiques !

Nous allons voir dans ce chapitre, les différents ensembles de nombres, ainsi que les propriétés essentielles de ces nombres.

II- L'ensemble des entiers naturels

Définition et notation

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …… ; 2022 sont des exemples d'entiers naturels.

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ comme naturel !).

On a : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ……… ; 10 ; 11 ; ……..\}$.

Les entiers naturels sont donc les nombres avec lesquels on compte depuis son enfance.
Historiquement, voici comment procédaient les bergers : pour compter le nombre d'animaux dispersés dans un enclos, ils prenaient des cailloux, et à chaque caillou, correspondait un animal.

Caillou vient du latin *calculus* qui a donné le mot calcul !

Exemples : le nombre 15 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$: mathématiquement, cette phrase se note : ………

Par contre, le nombre −8 n'appartient pas à $\mathbb{N}$: on notera mathématiquement : ………………..

💣 On s'interdira, au sein d'une phrase écrite en français, tout symbole mathématique !

Ne surtout pas écrire : $3 \in$ l'ensemble des entiers naturels !

Remarques

$\mathbb{N}$ est un ensemble constitué d'une infinité d'éléments, qui sont tous des nombres positifs.

Il y a toujours un entier *naturel* qui succède à n'importe quel entier naturel.

Il n'existe donc pas de plus grand entier naturel !

Si n désigne un entier naturel, l'entier qui succède à n est égal à …..

♥ Les entiers n et ……... sont appelés entiers ………………..♥

Dans $\mathbb{N}$, on peut toujours effectuer les opérations addition et multiplication : la ***somme*** (= ***résultat de l'addition***) de deux entiers naturels, est un entier naturel ; le ***produit*** (= ***résultat de la multiplication***) de deux entiers naturels est un entier naturel.

On dira que l'ensemble $\mathbb{N}$ est stable par addition et multiplication.

💣 Par-contre, il n'en est rien concernant la soustraction et la division.

Pourquoi ?

III- L'ensemble des entiers relatifs

Définition

L'ensemble formé par les entiers naturels ainsi que leurs opposés est appelé l'ensemble des entiers relatifs.

Rappelons que l'opposé d'un entier naturel a, n'est autre que l'entier relatif ……

On le note $\mathbb{Z}$ (la notation $\mathbb{Z}$ vient du mot *zählen,* qui signifie, en allemand, entier !).

On a donc : $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots -4\ ;-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ldots\}$.

De par la définition, tout entier naturel est donc un entier relatif : on dira que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus (ou encore contenu) dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ce que l'on notera : …………………

Illustration ensembliste :

Remarque : L'affirmation : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ est-elle vraie ? Pourquoi ?

A l'oral comme à l'écrit, quand on dit qu'un nombre est entier, c'est sous- entendu, que c'est un entier relatif. Si on veut désigner un entier positif, il faut utiliser le terme entier naturel.

A présent, nous allons parler d'arithmétique, partie des mathématiques qui étudie les entiers.

Notons que la somme, la différence, et le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif.

IV- Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Citer quatre nombres qui sont des multiples de 3 : …………………………………………………………

De façon générale, comment noter un multiple de 3 quelconque ? ……………………………………….

Nous allons rigoureusement définir la notion de multiple d'un entier donné :

♥ ♥ *Définition (multiple/diviseur)* ♥♥

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que : a est un *multiple de* b s'il ………………………………….

………

Remarques

Si le nombre b est différent de 0, on dira également, ***lorsque a est un multiple de b, que b est un diviseur de a.***

L'affirmation *:* b est un diviseur de a se note mathématiquement :

Il faut savoir jongler entre les notions de multiples et de diviseurs. Attention, au sein d'une phrase en français, on s'interdira d'écrire : $b|a$!!

Exemples

45 est un multiple de 5 car :

22 est un diviseur de 110 car :

46 n'est pas un multiple de 7 car :

Remarques

0 est un multiple de n'importe quel entier relatif a, car :

L''unique entier naturel qui admet un seul diviseur est ……..

Exercice 0

Soient a,b et c trois entiers relatifs.

Démontrer que si a est un multiple de b et si b est un multiple de c, alors a est un multiple de c.

✂

Définition

Un entier est appelé ***nombre PAIR*** lorsque c'est ***un multiple de 2.***

La phrase : *"a est un entier pair"* se note mathématiquement : ♥♥……………………………………………

Un entier est appelé ***nombre IMPAIR*** lorsqu'il n'est ***pas un multiple de 2***, ou encore lorsqu'il n'est pas divisible par 2.

La phrase : "a est un entier impair " se note mathématiquement : ♥♥………………………………………..

Comprenons pourquoi en utilisant la division euclidienne vue au collège :

✂

Exercice 1

Etablir que pour tout entier relatif n, le nombre $A = 4n^2 + 14n$ est un entier relatif pair.

✂

Exercice 2

a) Montrer que la somme de deux nombres impairs quelconques est paire.

b) Que dire de la somme de deux nombres entiers de parité différente ? Justifier.

c) Etudier la parité du produit de deux entiers impairs. Etudier les autres cas.

d) En vous servant de la question ***c)***, établir que si un entier a est impair, alors l'entier a^2 est impair.

e) En déduire que si a est un entier impair, alors l'entier $a^2 + 3a$ est un entier pair.

f) Soit n un entier. Démontrer que si n^2 est un entier impair, alors n est un entier impair, par deux méthodes différentes :

i) En raisonnant par l'absurde.

ii) A l'aide du principe de contraposition que l'on va rappeler ci-dessous :

✂

Exercice 3

Déterminer, mentalement, la parité de chacun des entiers suivants, c'est-à-dire déterminer si chacun d'eux est pair ou impair :

$A = 58978449^2 + 11$; $B = 3(10^{23} + 207)$

Rappelons (fondamental pour le calcul mental et la suite), les principaux critères de divisibilité :

Un entier a est divisible :

- ***Par 2 si et seulement si***……………………………………………………………………….
- ***Par 5 si et seulement si*** ……………………………………………………………………….
- ***Par 3 si et seulement si***………………………………………………………………………..
- ***Par 9 si et seulement si***………………………………………………………………………..

Exemples : 2457 est-il divisible par 9 ? 33445 est-il un multiple de 3 ?

Justifions les trois premiers critères :

✂

Propriété

Soit a un entier relatif quelconque.

La somme de deux multiples de a est ……………………………..

Remarque : reformulé en : la somme de deux nombres tous deux dans la table de multiplication de l'entier a est un nombre de la table de cet entier a vous parlera peut-être plus ?

Preuve :

✂

Exercice 4

1) Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs quelconques est un multiple de 3.

2) La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ?

✂

Exercice 5

Un entier naturel N se composant de 4 chiffres est tel que son chiffre des unités est égal à son chiffre des milliers, et son chiffre des dizaines est égal à son chiffre des centaines.

Démontrer que N est un multiple de 11.

✂

V- Nombres premiers

Définition

Un entier naturel est un nombre premier lorsqu'il admet, dans $\mathbb{N}$, exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples

2 est un nombre premier car les seuls diviseurs positifs de 2 sont : 1 et 2.

De même, 3 ; 5 ; 7 ; 11 sont quelques exemples de nombres premiers.

Le nombre 0 n'est pas premier. Pourquoi ?

Le nombre 1 est-il un nombre premier ?

Un entier pair est-il un nombre premier ?

Que peut-on dire de deux nombres premiers distincts (= différents) ?

✂

Définition : (Nombres premiers entre eux)

Deux entiers naturels n et m sont dits *premier entre eux* lorsque *leur seul diviseur commun est* 1.

Mini propriété fort utile

Soit p un nombre premier et n un entier naturel.

On a l'alternative suivante : ou bien p divise n, ou bien p et n sont premiers entre eux.

Preuve :

Théorème

1) Tout entier naturel $N \geq 2$ admet au moins un diviseur premier.

2) Si N est NON PREMIER avec $N \neq 1$, alors N admet* au moins un *diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{N}$.

Preuve : admise en seconde pour le 1).

Preuve du 2) :

***Test de primalité* (permet de savoir si un entier est premier ou pas)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

Pourquoi ?

✂

Remarque : ce test de primalité fournit un critère d'arrêt dans la recherche des diviseurs premiers d'un entier naturel donné.

Exemple : Déterminer si le nombre 149 est premier ou pas.

Application* : *le crible* d'*Erathostène

Dresser la liste L des nombres premiers inférieurs à 100 en s'aidant du tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$L =$

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

♥♥ {…………………………………………………………………………………………}.♥♥

Connaître par coeur cette liste augmente la rapidité en calcul algébrique !

Culture

- ✓ Un entier autre que 1 qui n'est ***pas premier*** est appelé ***entier composé***.
- ✓ Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier !

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou bien peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

Cette propriété sera justifiée en terminale !

Remarque : les nombres premiers sont aux entiers naturels ce que les lettres sont aux mots !

Exercice 6

Décomposer en produit de facteurs premiers :

84 ; 760 ; 217 ; 99999

Méthodes :

✂

VI – Ensembles de nombres

A-Ensemble des nombres décimaux

Les nombres entiers permettent de construire de nouveaux ensembles de nombres.

Depuis l'école primaire, vous connaissez les nombres décimaux : les écoliers les reconnaissent par la présence d'une virgule, et par le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

C'est par exemple le cas des nombres suivants : 2,236 ; -4,5 ; 11,001.

Donnons une définition rigoureuse de nombre décimal :

Définition

Un nombre N est dit décimal lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $N = \dfrac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : on a donc : $\mathbb{D}$ =

Exercice 7

1) Expliquer pourquoi, les nombres $\dfrac{1}{2}$; $-\dfrac{4}{25}$ sont des décimaux au sens de la définition donnée.

2) Expliquer pourquoi tout entier relatif est un décimal.

On a donc l'inclusion suivante : ………………… et par suite : $\mathbb{N}$ …. $\mathbb{Z}$…. $\mathbb{D}$.

✂

Exercice 8

Démontrer que le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

✂

Exercice 9 clé

Démontrer que lorsqu'on divise un entier par une puissance entière de 2 ou de 5 on obtient toujours un décimal.

Application : pourquoi $\frac{13589}{32}$; $\frac{248762}{125}$; $\frac{27896333}{2500}$ sont-ils des décimaux ?

✂

Exercice 10

Démontrer que le nombre $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration du fait que $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

✂

Exercice 11

Voici une affirmation : déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant :

Affirmation : *" Le quotient de deux nombres décimaux mon nul est un nombre décimal".*

B- Ensemble des nombres rationnels

ratio signifie en latin la raison.

Historiquement, les Grecs appelaient nombres *commensurables* tout nombre égal au quotient de deux nombres entiers : par exemple $\frac{2}{3}$; $-\frac{4}{7}$; $\frac{1}{200}$ sont de tels nombres.

Le terme *commensurable*, démodé, se nomme rationnel depuis plus d'un siècle !

Définition

On appelle *nombre rationnel* tout nombre qui peut s'écrire sous forme fractionnaire $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$, où $\boldsymbol{a}$ est un entier relatif, et $\boldsymbol{b}$ un entier naturel non nul : $\boldsymbol{a}$ est appelé *le numérateur* de la fraction et $\boldsymbol{b}$ son *dénominateur* !

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On a donc : $\mathbb{Q} =$

Exemples :

Remarque

Expliquer pourquoi tout nombre décimal est un nombre rationnel.

On a donc : $\mathbb{D}$…. $\mathbb{Q}$.

L'inclusion réciproque, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{D}$ est-elle vraie ?

On retiendra donc qu'on a les inclusions d'ensembles suivantes et que ces dernières sont strictes :

Propriété

Tout nombre rationnel x admet une ***forme irréductible unique*** : il existe un unique entier relatif a et un unique entier naturel b non nul, tel que : $x = \frac{a}{b}$ avec ***a et b premiers entre eux***.

Exercice 12

Donner la forme irréductible de chacun des nombres rationnels suivants :

$\frac{200}{75}$; $\frac{136}{36}$; $-\frac{40}{55}$.

✂

L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient déjà *"beaucoup"* de nombres, et a la particularité d'être stable par addition, soustraction, multiplication et division.

Comment reconnaitre des nombres rationnels ?

Comment reconnait-on un nombre rationnel lorsque ce dernier est écrit en écriture décimale (= avec la virgule !) ?

- S'il y a un nombre fini de chiffres après la virgule dans son écriture décimale, on est en présence d'un nombre décimal.

- Sinon, si l'écriture décimale d'un nombre comporte une infinité de chiffres après la virgule, on admet qu'un nombre est rationnel non décimal, si et seulement si son écriture décimale est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il y a répétition d'un même bloc de chiffres à partir d'un certain rang.

Exemples

12,265 est un nombre……

4,121212….. est un nombre ….

12,15787878…. est un nombre……..

On remarquera la nécessité des pointillés dans les deux dernières écritures décimales, qui signifient que la répétition des chiffres se poursuit sans s'arrêter (il y a donc une infinité de chiffres après la virgule !).

On peut légitimement penser qu'on a fait le tour de l'ensemble de tous les nombres connus !

Or, rien n'empêche de concevoir qu'il existe des nombres dont l'écriture décimale comporte une infinité de chiffres après la virgule, sans être périodique à partir d'un certain rang pour autant, et donc que $\mathbb{Q}$ ne contient pas tous les nombres de l'univers !

Prenons par exemple le nombre : 0,12345678910111213141516171819202122232425………………….

Il a une infinité de chiffres après la virgule, et manifestement la partie décimale n'est pas périodique !

Nous allons prouver que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : ceci montrera que l'ensemble $\mathbb{Q}$ construit précédemment ne contient pas tous les nombres.

Exercice 13

On se propose de démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers (on dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel).

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe des entiers a et b (non nuls) tels que :

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible (= qu'on ne peut plus simplifier).

i) Montrer qu'alors $a^2 = 2b^2$.

ii) En déduire que a^2 est pair, puis que a est pair.

iii) En déduire que b^2 est pair, puis que b est pair.

iv) Relever une contradiction et conclure.

✂

Culture : ce nombre mystérieux $\sqrt{2}$ a permis aux grecs de faire émerger un nouvel ensemble de nombre, l'ensemble des nombres irrationnels (irrationnels signifiant contraire à la raison).

Pendant des siècles, les Grecs pensaient que tout nombre était commensurable, c'est-à-dire qu'on pouvait l'écrire sous forme de quotient de deux entiers, jusqu'à ce qu'Euclide, (6 siècles avant notre ère) démontre l'incommensurabilité du nombre $\sqrt{2}$ (qui existe géométriquement comme longueur des diagonales d'un carré de côté 1).

Il existe plusieurs démonstrations différentes pour prouver l'irrationnalité du nombre $\sqrt{2}$, on vient d'en voir une !

Définition

Un nombre réel est un nombre dont l'écriture décimale comporte un nombre fini ou infini de décimales. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

Des nombres comme π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$ sont des exemples de nombres réels.

Conséquence de la définition : On a la chaîne d'inclusions suivantes : ……………………………………..

Représentation ensembliste :

Exercice 14

Déterminer, à quel ensemble de nombres, (le plus *"petit"* possible) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, appartiennent chacun des nombres suivants :

a) 0,554 ***b)*** $\frac{8}{25}$ ***c)*** $-\frac{49}{7}$ ***d)*** $-\frac{3}{7}$ ***e)*** 10^{-3} ***f)*** $\frac{\pi}{2}$ ***g)*** $\frac{750}{15}$

✂

Exercice 15

Compléter les pointillés à l'aide de l'un des symboles suivants : $\in, \notin, \subset, \not\subset$:

a) -1........$\mathbb{Q}$ ***b)*** $\mathbb{Q}$.....$\mathbb{N}$ ***c)*** $-\frac{3}{2}$.....$\mathbb{Q}$ ***d)*** π......$\mathbb{D}$ ***e)*** $\mathbb{N}$.....$\mathbb{Q}$ ***f)*** $-0{,}33333333$.....$\mathbb{Q}$

g) $\frac{1}{5}$.....$\mathbb{D}$

✂

Terminons par une propriété qui donne une représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

Considérons une droite graduée, c'est-à-dire une droite munie d'une origine O, à laquelle on associe le nombre 0, et sur laquelle est placé un point I auquel on fait correspondre le nombre 1 : on peut alors graduer la droite.

Illustration :

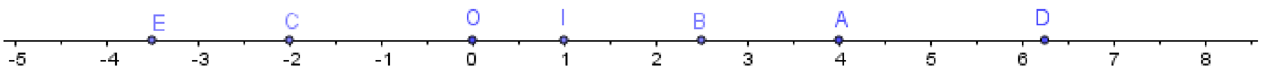
A chacun des points de cette droite, est associé un unique réel, appelé l'abscisse du point.

Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée.

Ainsi, l'ensemble des nombres réels peut être vu comme un ensemble sans trou.

Exercice 16

a) Associer à chacun des points de la droite graduée ci-dessous un réel :



b) Placer sur la précédente droite graduée, les points F, G et H d'abscisses respectives : -1 ; $-4{,}25$; $7{,}5$.

c) Sur la droite graduée ci-dessous, on a placé le point I ayant pour abscisse 1, et le point A ayant pour abscisse un réel a dont on ne cherchera pas à déterminer la valeur.

Construire, de façon rigoureuse, le point B d'abscisse $\boldsymbol{a}+1$; C d'abscisse $\boldsymbol{a}-2$; D d'abscisse $\boldsymbol{\frac{a}{2}}$

E d'abscisse $\boldsymbol{2a}$ et F d'abscisse $\boldsymbol{-a}$.