(1)

« Ce que nous savons est une goutte, ce que nous ignorons est l'océan. » Isaac Newton

Chapitre 1 — **Rappels et compléments sur la dérivation**

I – Rappels sur la dérivation

Rappel : si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ avec $x_A \neq x_B$ alors (AB) a pr coef directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

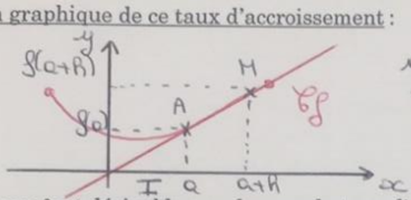
A-Nombre dérivé et fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point.
Soit a un réel appartenant à I, et h un réel non nul ($h \neq 0$) tel que $a + h$ appartienne à I.

On appelle taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, le réel égal à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$ = coef directeur de la droite (AM)

Interprétation graphique de ce taux d'accroissement :

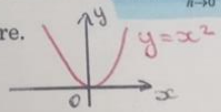


au + h → 0
au plus le pt M se rapproche de A
et la position limite de (AM) : tangente.

- On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet un nombre réel pour limite lorsque h tend vers 0 (c'est-à-dire que h devient aussi proche de 0 qu'on veut sans jamais valoir 0).
  Ce nombre réel est appelé le nombre dérivé de f en a et on le note : $f'(a)$.

  On retiendra donc que lorsque f est dérivable en a : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- f est dérivable sur l'intervalle I signifie que f est dérivable en chacun des réels x appartenant à I
- Enfin, lorsque f est dérivable sur l'intervalle I, la fonction dérivée de f, notée f' est la fonction définie sur I qui à tout réel x appartenant à I associe le réel $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

A titre de rappels, traitons deux exemples vus en première.



Exemple 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, on a : $f'(x) = 2x$.

Soit x un réel quelconque, et h un réel non nul (de fait, $x + h$ est dans $\mathbb{R}$ vu que la somme de deux réels est un nombre réel).

Etape 1 : on forme le taux d'accroissement et on le simplifie au mieux.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = \boxed{2x+h}$$

Etape 2 : on cherche la limite du taux d'accroissement simplifié lorsque h tend vers 0.

Or, $\lim\limits_{h \to 0}(2x+h) = 2x$ et $2x \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$.
x étant un réel quelconque, il en résulte que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
(Résultat à retenir par cœur, qui sera consigné dans le tableau des dérivées des fonctions usuelles).

$\circledast\ E_2 : \lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$

②

Exemple 2

Soit f la fonction inverse, c'est-à-dire la fonction définie pour tout réel x non nul par : $f(x) = \frac{1}{x}$.
En effectuant le même procédé qu'à l'exemple 1, on montre facilement que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout réel x non nul : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$; $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+h)} - \frac{(x+h)}{x(x+h)}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$= \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h}$ $\circledast$

$= \frac{-1}{x(x+h)}$

✂- -

B- Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Définition

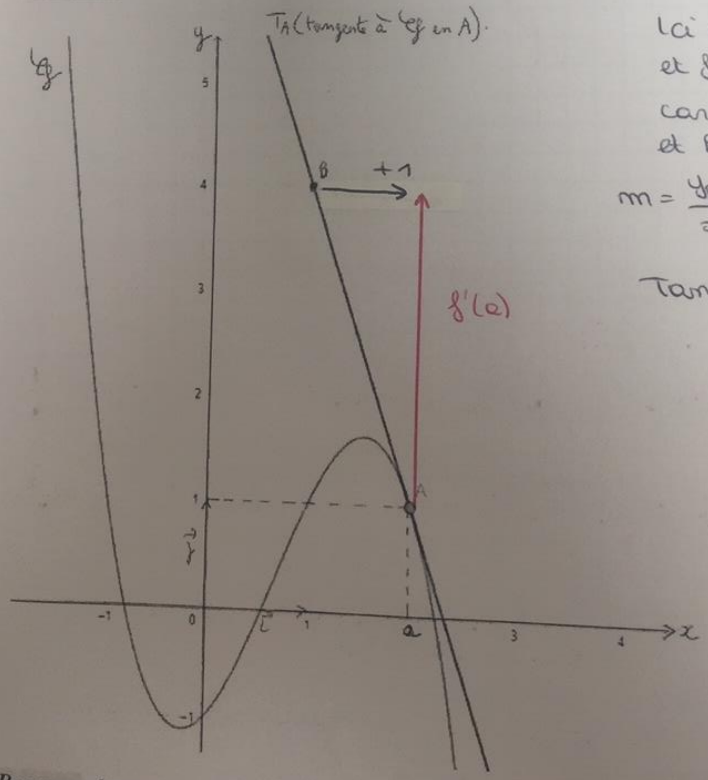
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et dérivable en un réel a appartenant à I.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ du plan.
Soit A le point ayant pour abscisse a et appartenant à C_f : $A(a\ ; f(a))$.

Par définition, la droite passant par A et ayant comme coefficient directeur le nombre $f'(a)$ est appelée la tangente à C_f en le point A. On note T_A cette tangente.

On retiendra par cœur (interprétation géométrique du nombre dérivé) que :

♥♥♥ ***$f'(a)$ = coefficient directeur de la tangente à C_f en son point A d'abscisse a.*** ♥♥♥

Illustration



Ici $a = 2$
et $f'(a) = f'(2) = -3$
car T passe par $A(2;1)$
et $B(1;4)$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{1-2} = -3$

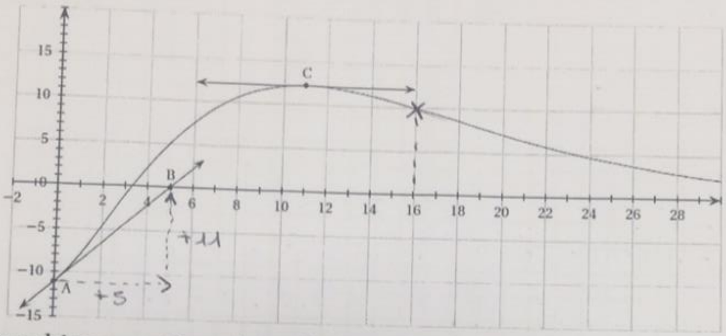
Tangente : ╲ : $m < 0$
╱ : $m > 0$

Remarque : lorsqu'on parle du point (nommé A) d'abscisse a de la courbe C_f, il faut instantanément savoir écrire que les coordonnées de A sont : $A(a\ ; f(a))$.

③

Exercice 1

Dans le repère orthogonal donné ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; 30]$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0 passe par le point B (5 ; 0).
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C d'abscisse 11 est parallèle à l'axe des abscisses.



Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(11)$.

Quel est le signe du nombre dérivé de f en 16 ?

$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$f(0) = -11 \longrightarrow f(0)$ = ordonnée de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 0
= ordonnée de A.

$f'(0) = \frac{11}{5} \longrightarrow f'(0)$ = coef directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au pt d'absc 0 de A : nb dérivé de f en 0 = coef dir de (AB).

$f'(11) = 0 \longrightarrow$ car la Tangente en C à $\mathscr{C}_f$ est // à l'axe des abscisse (droite Horizontale).

- les droites Horizontales ont pr coef directeur 0.

$f'(16) < 0$ car f décroissante sur $]11 ; 30[$

♥♥ *Propriété* (équation réduite de la tangente) ♥♥

Soit a un réel, f une fonction dérivable en a, A le point de la courbe C_f d'abscisse a, et T_A la tangente à C_f en le point A.

L'équation réduite de la tangente T_A à C_f en A est : ♥♥ $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ **♥♥**

Justification **: (à titre de rappel, vue l'an dernier)**

Vu que f est dérivable en a, C_f admet une tangente T_A en A qui est une droite oblique, donc qui admet pour équation réduite : $y = mx + p$, où m est le coefficient directeur de la droite T_A.

Grâce à la définition de la droite T_A, on a : $\boxed{m = f'(a)}$

Par suite, l'équation réduite de T_A se réécrit en : $y = f'(a)x + p$.

De plus, le point A $(a ; f(a))$ appartient à la droite T_A, donc les coordonnées du point A vérifient l'équation* : $y = f'(a)x + p$, à savoir :** $f(a) = f'(a)x + p$**……, et par suite,** $\boxed{p = f(a) - f'(a)x}$

***** Ce point est fondamental : prenez le temps de bien comprendre la phrase suivante : lorsqu'un point appartient à une courbe, les coordonnées de ce point vérifient l'équation de cette courbe.**

Ainsi T_A a pour équation réduite : $y = f'(a)\times x + \underbrace{f(a) - f'(a)\times a}_{P} = f'(a)\times x - f'(a)\times a + f(a)$ c'est-à-dire :

♥♥♥ $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$ ♥♥♥que l'on retiendra par cœur sous cette forme.

C- Tableau des dérivées des fonctions usuelles

♥♥♥

Nom de la fonction f	*f est définie sur :*	*f est définie par :*	*f est dérivable sur :*	*Fonction dérivée f ' définie par :*
Constante	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ *où k est un réel*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Identité	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
Affine	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax+b$ *où a et b sont deux réels*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
Carrée	$\mathbb{R}$	$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Puissance entière	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ *avec n entier naturel*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = mx^{m-1}$
Inverse	$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$[0\,;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Exponentielle	$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$

♥♥♥

__Remarques__ : Ce tableau est à connaître par cœur sans aucune hésitation, on s'en servira toute l'année et ce dernier sera complété par quelques nouvelles fonctions ! Il évite d'avoir recours aux taux d'accroissements comme on a pu le voir dans le paragraphe précédent.

La ligne fonction affine du tableau précédent contient en fait la ligne fonction constante et identité.

En effet, si k est un réel quelconque et $f(x) = k = 0x + k$, on a une fonction affine constante avec $a = 0$ et $b = k$, donc $f'(x) = 0$.

Si $g(x) = x = 1x + 0$, on a une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 0$, donc $g'(x) = 1$.

Terminons par deux exemples qui reviennent <u>fréquemment</u> dans les exercices :

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -1$.

En effet, $f(x) = -x = -1x + 0$ et la dérivée d'une fonction affine permet de conclure (ici, $a = -1$ et $b = 0$).
Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$

Les curieux auront remarqué que pour la fonction racine carrée, elle est définie en 0 car $\sqrt{0} = 0$, par-contre elle n'est pas dérivable en 0.

A titre culturel, voici une justification de ce résultat.

Démontrons (en anticipant un peu le cours sur le calcul de limites) que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$f(x) = \sqrt{x}$ avec $x \geq 0$.

Soit h un réel strictement positif. Etudions la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0 (en restant strictement positif) :

⑤

avec $x>0$
$x = (\sqrt{x})^2$

Or, ici, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\cancel{\sqrt{h}}}{\cancel{\sqrt{h}}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

h	0,01	0,0001	0,000001	0,0000000001	10^{-40}
$\frac{1}{\sqrt{h}}$	10.	100.	1000.	100 000	10^{20}

$\sqrt{0{,}01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$

Ce tableau devrait légitimement vous convaincre que lorsque h se rapproche de 0 par valeurs supérieures, la quantité $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient *"de plus en plus grande"*, et qu'elle finit par être supérieure à n'importe quel réel arbitrairement fixé, bref que : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

Vu que $+\infty$ n'est pas un nombre réel, il en résulte que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

D- Opérations algébriques sur les fonctions dérivées

Propriétés

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.
On note u' et v' les dérivées de chacune de ces deux fonctions.

1) Dérivée d'une somme

$\boxed{(u+v)' = u'+v'}$

dérivée d'une somme = somme des dérivées
$(u+v+w)' = u'+v'+w'$

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

$f(x) = u(x) + v(x)$
avec $u(x) = x^2$ $\quad u'(x) = 2x$
$v(x) = 5x+1$ $\quad v'(x) = 5$

$f'(x) = 2x + 5$
$(f'(x) = u'(x) + v'(x))$

2) Dérivée d'un "multiple" d'une fonction, c'est-à-dire dérivée de $k\times u$ où k est un réel et u une fonction :

$\boxed{(ku)' = ku'}$

k : un réel
u : une fonction

$f(x) = 4\times u(x)$
$u(x) = x^3 \quad u'(x) = 3x^2$
$k = 4$

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3$. On a : $f'(x) = 4\times u'(x) = 4\times 3x^2 = \boxed{12x^2}$

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x^2}{3}$. On a : $g'(x) = \frac{1}{3}\times 2x = \boxed{\frac{2x}{3}}$

$g(x) = \frac{1}{3}x^2$

$k = \frac{1}{3} \quad u(x) = x^2$
$u'(x) = 2x$

3) Dérivée d'un produit de deux fonctions

$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

$u(x) = 4x+1 \;/\; u'(x) = 4$
$v(x) = e^x \;/\; v'(x) = e^x$

Exemple : f est définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = (4x+1)\,e^x = u(x)\times v(x)$

$f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$
$f'(x) = 4e^x + (4x+1)e^x$
$f'(x) = 4e^x + 4xe^x + e^x$
$f'(x) = \boxed{e^x(4+4x+1)} = \boxed{e^x(4x+5)}$

⑥ $f'(x) = 2u(x) \times u'(x) = 2(3x^2 + 5e^x - 9x + 1)(6x + 5e^x - 9)$

3bis) *Cas particulier : dérivée du carré d'une fonction* : $\boxed{(u^2)' = 2u'u}$

$u(x) = 3x^2 + 5e^x - 9x + 1$

$u'(x) = 6x + 5e^x - 9$

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3x^2+5e^x-9x+1)^2$. =

On a : $f'(x) =$

ne pas développer.

$f'(x) = 2(18x^3 + 5e^x \times 3x^2 - 27x^2 + 30xe^x + 25e^{2x} - 45e^x -$
$54x^2 - 45xe^x - 81x + 6x + 5e^x - 9)$

$f'(x) = 2(18x^3 + 5e^x 3x^2 - 81x^2 - 15xe^x - 40e^x + 25e^{2x} - 75x - 9)$

$f'(x) = 36x^3 + 2 \times 5e^x \times 3x^2 - 162x^2 - 30xe^x - 80e^x + 50e^{2x} - 150x - 18$

$(u(x))^2 = f(x)$

avec $u(x) = 3x^2 + 5e^x - 9x + 1$

$u'(x) = 6x + 5e^x - 9$

$f'(x) = 2(6x + 5e^x - 9)(3x^2 + 5e^x - 9x + 1)$

4) *Dérivée de l'inverse d'une fonction*

Si la fonction v ne s'annule pas sur I, c'est-à-dire si pour tout réel x appartenant à I, on a $v(x) \neq 0$,

alors la fonction inverse de v, $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$

→ $u(x) = 1$
$u'(x) = 0$
on applique $\left(\frac{u}{v}\right)'$

Exemple **: expliquer pourquoi la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$.**

$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

Résolvons l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$ → $a = b = c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = \boxed{-3}$

$-3 < 0$ donc $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle et donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$ c.a.d qu'on peut calculer $f(x)$ pour tout réel x.

Par propriété, en posant $v(x) = x^2 + x + 1$, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, donc $f = \frac{1}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = x^2 + x + 1$

$v'(x) = 2x + 1$

Donc : $f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$

5) Dérivée d'un quotient de deux fonctions

Si la fonction v ne s'annule pas sur *I*, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur *I* et on a : $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Attention à l'ordre des termes dans la soustraction !!!!

$u'v - uv'$ ce n'est pas la même chose que $uv' - u'v$!!!!!!!

Exemple : f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

a) **Calculer sous forme simplifiée $f'(x)$.**
b) **La courbe représentative de la fonction f admet des tangentes horizontales ? Justifier.**

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$ où $u(x) = 2x+1$, $u'(x) = 2$

$v(x) = x-1$
$v'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x - 2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \boxed{\dfrac{-3}{(x-1)^2}}$

b) Résolvons $f'(x) = 0$ c.a.d : $\dfrac{-3}{(x-1)^2} = 0$ donc $-3 = (x-1)^2 \times 0$
$-3 = 0$ ABSURDE

pas de solution à l'équation : $f'(x) = 0$
Donc C_f n'admet aucune tangente horizontale.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

Calculer la dérivée de f, puis déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point A d'abscisse -1 de C_f.

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$

T_A : tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(-1\,;\,f(-1))$

T_A a pour équation réduite :

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = -1$

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

avec $f'(-1) = 6 + 10 + 4 = \boxed{20}$

$f(-1) = -2 - 5 - 4 - 1 = \boxed{-12}$

donc $y = 20(x+1) - 12 = 20x + 20 - 12$

$\boxed{y = 20x + 8}$

E-*Dérivées et étude du sens de variation d'une fonction*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Rappelons le principe de *Lagrange* :

- **Si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$, alors f est** croissante **I.**
- **Si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$, alors f est** décroissante **I.**
- **Si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$, alors f est** constante **I.**

Pour étudier *le sens de variation d'une fonction* dérivable sur un intervalle I, il suffira donc d'étudié le signe de la dérivée

Exemple

a) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + x + 1$

b) Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur ~~$[0;+\infty[$~~ $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-2x+1)e^x$.

a) $g(x) = x^3 + x + 1$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonction dérivable)

et pr ∀ réel x

$g'(x) = 3x^2 + 1$

Positif × TA SOEUR
= le signe de TA SOEUR

Etude du signe de $g'(x)$

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ et $3 > 0$

Dc $3x^2 \geq 0$ donc $3x^2 + 1 > 0 + 1$ dc $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$

Ainsi $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. $\rightarrow$ g est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	

b) $f(x) = (-2x+1)e^x = u(x) \times v(x)$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pr $\forall$ réel x

[illegible] $x)$ où $u'(x) = -2$
$v'(x) = e^x$

$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ /

$f'(x) = -2e^x + (-2x+1)e^x$

$f'(x) = -2e^x - 2xe^x + e^x = -e^x - 2xe^x$ /

$f'(x) = -2xe^x - e^x = e^x(-2x-1)$ / Étude du signe de la dérivée

$e^x > 0$ pr tout x de $\mathbb{R}$ ainsi $e^x(-2x-1)$ est du signe de $-2x-1$ / Ainsi, $f'(x) \geq 0 \iff -2x-1 \geq 0$

$-2x - 1 \geq 0$

$2x \leq -1$

$x \leq \frac{-1}{2}$

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{-1}{2}$

dc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(-2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) + 1\right) e^{-\frac{1}{2}} = \boxed{2e^{-\frac{1}{2}}}$

Réciproque du principe de Lagrange

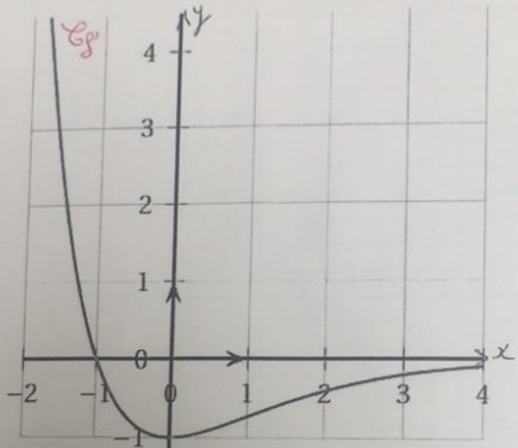
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On admet que :

- Si f est croissante sur l'intervalle I, alors pour tout nombre réel x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur l'intervalle I, alors pour tout nombre réel x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur l'intervalle I, alors pour tout nombre réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.

Exercice 3

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que $f(-1) = 4$ et que la courbe de f passe par le point $A(0\ ;\ 1)$

Ci-dessous, est tracée la Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.



Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant :

Affirmation 1 : *" f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$."* non car $f'(x) < 0$ sur $[0;2]$

Affirmation 2 : *" Pour tout réel x, $f(x) \leqslant 5$. "*

Affirmation 3 : *" La tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 passe par le point $B(2022\ ;\ -2021)$."*

A1 : Par lecture graphique $f'(x) < 0$ sur $[0,2]$
($C_{f'}$ au-dessous de l'axe des abscisses)

dc f décroît sur $[0,2]$.

A1 = faux.

A2 : Par lecture graphique

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗		4	↘	

D'après le tableau de variations :

f admet pour maximum 4 sur $\mathbb{R}$

Donc pour tout réel x, $f(x) \leq 4$ et $4 \leq 5$

Donc $f(x) \leq 5$

A2 : Vraie.

A3 : $f'(0) = -1$

$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Par lecture graphique : } f'(0) = -1. \\ \mathcal{C}_f \text{ passe par } A(0;1) \text{ dc } f(0) = 1 \end{array} \right.$

dc : $y = -x + 1$

$B(2022 ; -2021) \in$ à T_0 si ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente : $y = -x + 1$.

avec $x = 2022$: $-x_B + 1 =$

$-2022 + 1 = -2021 = y_B$

Donc $B(2022 ; -2021) \in T_0$.

A3 : Vraie.

II – La fonction exponentielle en kit

Ce paragraphe rappelle les principales propriétés de la fonction exponentielle vue en classe de première.

Il est important de connaître par cœur les résultats suivants qui seront d'un usage régulier en terminale et que l'on complètera au cours de l'année :

La fonction exponentielle, momentanément notée *exp*, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

- ♥ $exp(0) = 1$ ♥
- ♥ Pour tout réel x, $exp'(x) = exp(x)$ ♥

On notera : $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ cette fonction, avec : $e = exp(1)$ et $e \approx 2{,}718$.

Avec cette nouvelle écriture : $\left(e^x\right)' = e^x$

La courbe représentative de l'exponentielle passe donc par les points : $\underbrace{A(0\,;1)}_{\text{car } e^0 = 1}$ et $\underbrace{B(1\,;e)}_{\text{car } e^1 = e}$.

Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

- Pour tout réel x, $e^x > 0$. La fonction exponentielle prend uniquement des valeurs strictement positives. En particulier, la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$!
- Pour tous réels x et y, on a : ♥♥ $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ♥♥
- Pour tout réel x, ♥♥ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ♥♥
- Pour tous réels x et y, ♥♥ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ♥♥
- Pour tout entier relatif n et tout réel x, ♥♥ $(e^x)^n = e^{x \times n}$ ♥♥
- Pour tout réel x, ♥♥ $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$ ♥♥ car $\underbrace{e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}}}_{(e^{\frac{x}{2}})^2} = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = e^x$ et $e^x > 0$ dc $\sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$

Ces précédentes relations sont à connaître dans <u>les deux sens</u> de part et d'autre du signe = !!

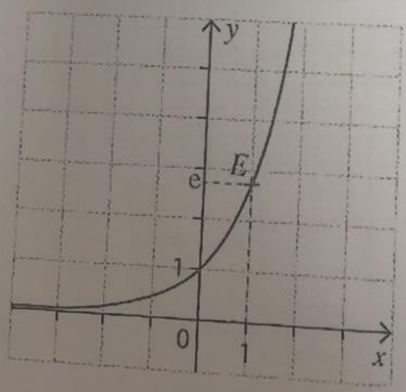
Au chapitre suivant (raisonnement par récurrence, nous serons en mesure de démontrer pour tout réel x et tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Sens de variation de la fonction exponentielle et conséquences :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	↗	1	↗

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



Conséquences de la stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$
- $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

Enfin (sera revu dans le paragraphe suivant) :

Pour tous réels a et b, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : ♥♥ $f'(x) = ae^{ax+b}$ ♥♥ .

Cas particulier fréquemment rencontré : Si $f(x) = e^{-x}$, alors $f'(x) = -e^{-x} = \left(\frac{-1}{e^x}\right)$

Exercice 4

1) Simplifier l'expression suivante définie pour tout réel x : $A(x) = \frac{\left(e^{4x+1}\right)^2 \times e^3}{e^{2x}}$

$B(x) = \left(e^{-2x+1}\right)^3 \times \frac{e^{4x} \times e^{x-2}}{e^x \times e^3} \times \sqrt{4e^{2x}}$

$g(x) = e^{3x} + e^{-2x}$

$g'(x) = 3e^{3x} - 2e^{-2x}$

exercice 4 :

1) $A(x) = \frac{\left(e^{4x+1}\right)^2 \times e^3}{e^{2x}} = \frac{e^{2(4x+1)} \times e^3}{e^{2x}} = \frac{e^{8x+2} \times e^3}{e^{2x}}$

$A(x) = \frac{e^{8x+5}}{e^{2x}} = e^{8x+5-2x} = \boxed{e^{6x+5}}$

$B(x) = \left(e^{-2x+1}\right)^3 \times \frac{e^{4x} \times e^{x-2}}{e^x \times e^3} \times \sqrt{4e^{2x}}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$B(x) = e^{3(-2x+1)} \times \frac{e^{4x+x-2}}{e^{x+3}} \times \sqrt{4e^{2x}}$

$B(x) = e^{-6x+3} \times \frac{e^{5x-2}}{e^{x+3}} \times \sqrt{4} \times \sqrt{e^{2x}}$

$B(x) = e^{-6x+3} \times e^{5x-2-x-3} \times 2e^{x}$

$B(x) = e^{-6x+3+4x-5+x} \times 2$

$B(x) = e^{-x-2}$

α

$$B(x) = \frac{e^{-x+1}}{e^{x+3}} \times 2 \times e^{x}$$

$$B(x) = 2 \times \frac{e^{1}}{e^{x+3}} = 2 \times e^{1-(x+3)} = \boxed{2e^{-x+4}}^{-2}$$

2a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{e^{2x}-1}$.

2b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{1}{e^{4x-10}} - e^{2x+3} \geq 0$.

3) g est la fonction définie par : $g(x) = \frac{2+e^{0,25x}}{e^{0,25x}}$

a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = 1 + 2e^{-0,25x}$

c) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2a) $e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1$

$\underbrace{e^{2x} = 0}$

$\Longleftrightarrow 2x = 0$

$x = 0$

donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

2b) $\frac{1}{e^{4x-10}} - e^{2x+3} \geq 0$

$e^{-4x+10} - e^{2x+3} \geq 0$

$e^{-4x+10} \geq e^{2x+3}$

$-4x + 10 \geq 2x + 3$

$-6x \geq -7$

$x \leq \frac{-7}{-6} \longrightarrow \boxed{x \leq \frac{7}{6}}$ $\quad S = \left]-\infty , \frac{7}{6}\right]$

3a) $g(x) = \frac{2+e^{0,25x}}{e^{0,25x}}$

Pour tout réel x, $e^{0,25x} > 0$ dc $e^{0,25x} \neq 0$

↳ dc g est définie sur $\mathbb{R}$.

3b) $g(x) = \dfrac{2+e^{0,25x}}{e^{0,25x}} = \dfrac{2}{e^{0,25x}} + 1 = 2e^{-0,25x} + 1$

3c) $g(x) = 1 + e^{-0,25x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = -0,5\, e^{-0,25x}$

Étude du signe de la dérivée

pour tt réel x $e^{-0,25x} > 0$ et $-0,5 < 0$ donc $g'(x) < 0$

ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}$. (faire le tableau).

Exercice 5

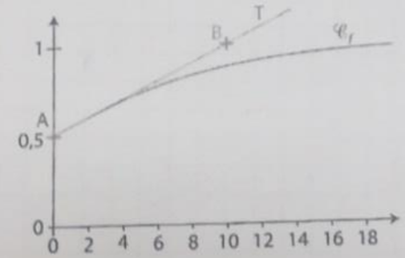
Soit a et b des nombres réels.

On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



En détaillant votre démarche, déterminer la valeur des réels a et b.

($f'(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{a}{1+e^{-bx}}$ $u(x) = a$ $u'(x) = a$; $v(x) = 1+e^{-bx}$ $v'(x) =$) après

$\mathscr{C}_f$ passe par $A(0;0,5)$ donc $f(0) = 0,5$

Or $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{-bx}}$ donc pr $x = 0$:

$f(0) = \dfrac{a}{1+e^{0}} = \dfrac{a}{2}$ de sorte que $\dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{a = 1}$

Par suite : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-bx}}$

La tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A passe par B,
le coef directeur de T vaut :

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0,5}{10-0} = \frac{0,5}{10} = \boxed{0,05}$

donc $f'(0) = 0,05$

Or $f(x) = \frac{1}{1+e^{-bx}} = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 1+e^{-bx}$
$u'(x) = -be^{-bx}$

$f'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$

dc : $f'(0) = = \frac{be^0}{(1+e^0)^2} = = \frac{b}{2^2} = \frac{b}{4}$

Or $f'(0) = 0,05$ dc $\frac{b}{4} = 0,05$ et $b = 0,05 \times 4 = \boxed{0,2}$

Conclusion : $\boxed{f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}}$

III – Dérivées de nouvelles fonctions

A-Notion de fonctions composées

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\underbrace{u(x)}_{\text{doit } \in \text{ à } D_f}=2x+3$.
On a : $f(u(x)) = f(2x+3) = (2x+3)^2$.

On dit qu'on a composé u par f (ou encore u suivie de f), c'est-à-dire qu'on applique f *non pas à x mais à* $u(x) = 2x+3$. Par oral je dirai : f est appliquée à autre chose que x)

Pour pouvoir composer u par f, il est donc nécessaire que les valeurs prises par la fonction u soient toutes contenues dans l'ensemble de définition de la fonction f !

Cela amène assez naturellement la définition suivante :

Définition
Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout réel x appartenant à I, on ait $u(x)$ qui appartienne à J.

La fonction composée de u par f (on dit encore u suivie de f), notée $f \circ u$ (lire f rond u), est la fonction définie sur I par : **$(f \circ u)(x) = f(u(x))$.**

$x \in I$; $u(x) \in J$

Le schéma fonctionnel suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, "f \circ u"'] & \underbrace{u(x)}_{X} \arrow[r, mapsto, "f"] & f(X) = f(u(x)) \end{tikzcd}$$

Exemples

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2$.

$f \circ u$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(f \circ u)(x) =$ $f(u(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$

La fonction $u \circ f$ est également bien définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $(u \circ f)(x) =$ $u(f(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 = \boxed{e^{2x}}$

Cet exemple montre que lorsque $f \circ u$ et $u \circ f$ existent, on a en général, $f \circ u \neq u \circ f$.
On dit que la composée de fonctions n'est pas commutative.

Déterminer de même $g \circ v$ où g et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3$ et $v(x) = x+4$.

$(g \circ v)(x) = g(v(x)) = g(x+4) = (x+4)^3$

Propriété ***(dérivation des fonctions composées)***

> Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout réel x appartenant à I, on ait $u(x)$ qui appartienne à J.
>
> Si u est dérivable sur l'intervalle I et f est dérivable sur J, alors la fonction $g = f \circ u$ est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a :
>
> $g'(x) = (f \circ u)'(x) =$ $u'(x) \times f'(u(x)) = f'(u(x)) \times u'(x)$ ♥♥♥♥

Cette propriété fort utile dans les exercices est admise et sera démontrée au cours du chapitre la continuité. Elle est jointe en dernière page du présent chapitre pour les élèves soucieux de la justification.

Exemples

1a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2+1}$.
Expliquer pourquoi g est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée.

1b) En déduire la dérivée de la fonction β définie sur $\mathbb{R}$ par : $\beta(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$.
2) Même question avec la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 4e^{-0.2x+2}$. En déduire le sens de variation de h sur $\mathbb{R}$.

exemples

1a) $g(x) = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{u(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

On sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$

et que la fonction $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

Comme $u(x) \geq 1 > 0$, on a que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

en tant que composée de fonctions dérivables.

$g(x) = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{u(x)} = f(u(x))$ avec $f(X) = \sqrt{X}$ et $f'(X) = 2X$

de $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$

$$g'(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

1b) $\beta(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$

$\beta(x) = 2x \times g(x)$ où g est la fct° de la quest 1a.

$\beta(x) = u(x) \times v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x \\ v(x) = g(x) \end{cases}$ $\quad u'(x) = 2$, $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\beta'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$\beta'(x) = 2\left(\sqrt{x^2+1}\right) + 2x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\beta'(x) = 2\sqrt{x^2+1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\beta'(x) = \frac{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\beta'(x) = \frac{2(x^2+1)+2x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{4x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}}$$

2) $R(x) = 4e^{-0,2x+2}$

$$R'(x) = 4 \times (-0,2)\, e^{-0,2x+2} = \boxed{-0,8e^{-0,2x+2}}$$

Signe de $R'(x)$: pour tout réel x, $e^{-0,2x+2} > 0$ et $-0,8 < 0$

ainsi $R'(x) < 0$ et de R est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Trois cas particuliers récurrents dans les exercices (à connaître par cœur) :

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) La fonction e^{u} est dérivable sur I et : ♥♥ $\left(e^{u}\right)' =$ ...$u'e^{u}$........♥♥

Preuve : $e^{u} = f \circ u$, *où f est la fonction exponentielle qui est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *: donc pour tout réel x,* $f(x) = e^{x}$ *et* $f'(x) = f(x) = e^{x}$.
Grâce à la propriété précédente, on a :

Pour tout réel x appartenant à I, $\left(e^{u}\right)'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x) = e^{u(x)} \times u'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Par suite on a bien le résultat voulu que l'on retiendra par cœur.

Exemple

Démontrer que la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = e^{1+\frac{2}{x}}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, calculer sa dérivée, et en déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

$f(x) = e^{1+\frac{2}{x}} = e^{u(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1 + \frac{2}{x} & 2\times\frac{1}{x} \quad \text{avec } x>0 \\ u'(x) = \frac{-2}{x^2} \end{cases}$

$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

$f'(x) = \boxed{\frac{-2}{x^2} \times e^{1+\frac{x}{2}}}$

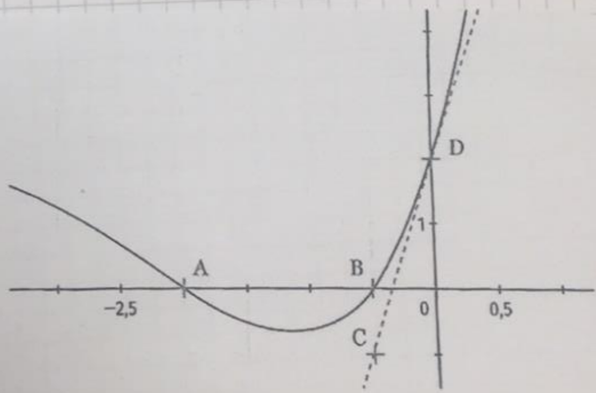
Signe de la dérivée :

$e^{1+\frac{x}{2}} > 0$ et $-2 < 0$, $x^2 > 0$ ainsi $f'(x) < 0$

Par suite, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$ où a, b, c et k sont des réels fixés.
La courbe représentative de la fonction f est donnée dans un repère orthogonal.
Celle-ci passe par les points A, B et D de coordonnées respectives $(-2\,;0)$, $\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$ et $(0\,;2)$.
De plus, la droite (CD), où C est le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;-1\right)$, est tangente à la courbe en $x=0$.



À l'aide de toutes ces informations, retrouver les valeurs des paramètres a, b, c et k.

exercice 6

$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$

$\mathcal{C}_f$ passe par $D(0;2)$. $D \in \mathcal{C}_f \iff f(0) = 2$

or pour tout réel x, $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx}$

dc pr $x = 0$:

$f(0) = c \times e^0 = c$

$\boxed{c = 2}$

$f(x) = (ax^2 + bx + 2)e^{kx}$

De même $A(-2;0) \in \mathcal{C}_f$ dc $f(-2) = 0$

$f(-2) = (4a - 2b + 2)e^{-2k}$

dc $(4a - 2b + 2)e^{-2k} = 0$

dc $4a - 2b + 2 = 0$ car $e^{-2k} > 0$

aussi $B(-0{,}5;0) \in \mathcal{C}_f$ dc $f(-0{,}5) = 0$

$f(-0{,}5) = (0{,}25a - 0{,}5b + 2)e^{-0{,}5k}$ $(= a \times (-0{,}5)^2 - 0{,}5b + 2)e^{-0{,}5k}$

dc : $(0{,}25a - 0{,}5b + 2)e^{-0{,}5k} = 0$ $e^{-0{,}5k} > 0$ $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 2\right)e^{-\frac{k}{2}} = 0$

$0{,}25a - 0{,}5b + 2 = 0$

Par suite, on a : $\cancel{\begin{cases} 4a - 2b + 2 = 0 \\ 0{,}25a - 0{,}5b + 2 = 0 \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} 4a = 2b - 2 \\ 0{,}25a - 0{,}5b + 2 = 0 \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} a = \frac{2b - 2}{4} = \frac{b-1}{2} \\ 0{,}25a - 0{,}5b + 2 = 0 \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{b-1}{2}\right) - \frac{1}{2}b + 2 = 0 \\ a = \dots \end{cases}}$

avec fraction :

$\begin{cases} 4a - 2b + 2 = 0 \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ \frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{8}{4} = 0 \end{cases}$

dc : $\begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ a - 2b + 8 = 0 \end{cases}$ $\times 4$

$\begin{cases} b = 2a + 1 \\ a - 2(2a + 1) + 8 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{b-1}{8} - \dfrac{1}{2}b + 2 = 0 \\ a = \dfrac{b-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b-1-4+16}{8} = 0 \\ a = \dfrac{b-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{b+11}{8} = 0 \\ a = \dfrac{b-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+11 = 0 \\ a = \dfrac{b-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -11 \\ a = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a+1 \\ -3a+6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a+1 \\ a = \dfrac{6}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2\times 2+1 = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

on a donc
$a = 2$
$b = 5$
$c = 2$

et donc $f(x) = (2x^2 + 5x + 2)e^{kx}$

La tangente T à C_f en D passe par C,
le coef directeur de T vaut : $f'(0)$ = coef directeur de (CD) avec m

$$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2+1}{0+0{,}5} = 6 \quad \text{donc } f'(0) = 6$$

Calculons la dérivée :

Or pour tout réel x :

$$f(x) = (2x^2+5x+2)e^{kx} = u(x)\times v(x)$$

$u(x) = 2x^2+5x+2 \qquad u'(x) = 4x+5$

$v(x) = e^{kx} \qquad v'(x) = ke^{kx}$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = (4x+5)e^{kx} + (2x^2+5x+2)ke^{kx}$$

$$f'(0) = 5e^0 + 2ke^0$$

car $e^0 = 1$

$$f'(0) = 5+2k$$

$$5+2k = 6$$

$$2k = 1$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Par suite on a :

$$\boxed{f(x) = (2x^2+5x+2)e^{\frac{1}{2}x}}$$

2) Si u est dérivable sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et on a :

u : une fonction

♥♥ $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$ ♥♥

$nu'u^{n-1}$

Cette relation reste vraie lorsque n est un entier relatif à condition que la fonction u ne s'annule pas sur I!

Preuve : on applique la propriété de dérivation des fonctions composées en composant la fonction u par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^n$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Donc pour tout réel x appartenant à I, $(u^n)'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.
Donc $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

Exemple $(u^3)' = 3u^{3-1}u' = 3u^2u'$.

Calculer les dérivées de fonctions f et g suivantes :

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4x^3 - 5x^2+x+1)^4$; g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (e^{-x} + x^2 - x + 1)^3$

$f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) =$

$u'(x) = 12x^2 - 10x + 1$

$f'(x) = 4 \times u'(x) \times u(x)^{4-1}$

$f'(x) = 4(12x^2-10x+1) \times (4x^3-5x^2+x+1)^3$

$g(x) = (u(x))^3$ avec $u(x) = e^{-x} + x^2 - x + 1$

$g'(x) = 3u'(x)u^2$

$u'(x) = -e^{x} + 2x - 1$

$g'(x) = 3(-e^{x} + 2x - 1)(e^{-x} + x^2 - x + 1)^2$

3) Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et à valeurs strictement positives sur I (c'est-à-dire que pour tout réel x appartenant à I, $u(x) > 0$), alors la fonction $\sqrt{u}$ définie sur I par :

Pour tout réel x appartenant à I, $(\sqrt{u})(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

♥♥ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ♥♥

Preuve : idem, on applique la propriété de dérivation des fonctions composées en composant la fonction u par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$: f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc pour tout réel x appartenant à I, $(\sqrt{u})'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$.

Donc $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exemple

Démontrer que la fonction f définie sur $[-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{4x+4}$ est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$, puis calculer sa dérivée.

ex : f définie sur $[-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x+4} = \sqrt{u(x)}$
avec $u(x) = 4x+4$
u est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ et pr tt $x > -1$,
$4x+4 > 0$ dc $u(x) > 0$ sur $]-1 ; +\infty[$
Dc par théorème, f est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{4}{2\sqrt{4x+4}} = \frac{2}{\sqrt{4x+4}}$$

$g(x) = \sqrt{e^{2x}+x^2} = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = e^{2x}+x^2$
$u'(x) = 2e^{2x}+2x$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$
$e^{2x} > 0$ et $x^2 \geq 0$ dc $e^{2x}+x^2 > 0$ pr tt réel x
Dc par théorème, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

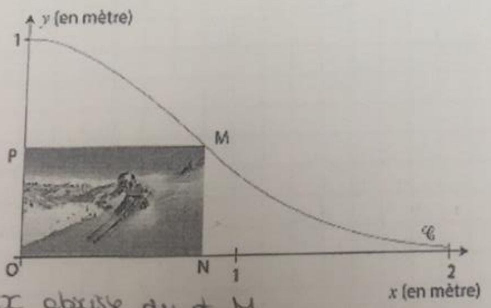
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2e^{2x}+2x}{2\sqrt{e^{2x}+x^2}} = \frac{e^{2x}+x}{\sqrt{e^{2x}+x^2}}$$

Exercice 7

Une entreprise est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski.
Le profil de cette piste est modélisé, dans un repère, par la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Cette courbe $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormé d'origine O ci-dessous.



x abscisse du pt M.

Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire ONMP est insérée sur le panneau publicitaire.
M appartient à la courbe $\mathscr{C}$, N appartient à l'axe des abscisses, P appartient à l'axe des ordonnées.
a) Exprimer pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 2]$, l'aire $\mathscr{A}(x)$, en unité d'aire, de la zone rectangulaire ONMP.
b) Déterminer la position du point M sur la courbe $\mathscr{C}$ pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximum.

exercice 7 :

a) $x \in [0;2]$

$\mathcal{A}(x) = L \times l = ON \times OP$ avec $ON = x \geq 0$
et $OP = f(x) = e^{-x^2} > 0$

car $M(x; f(x))$ car $M \in \mathcal{C}_f$ et $P(0; f(x))$

Donc $\mathcal{A}(x) = x \times e^{-x^2}$

b) On étudie le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0,2]$ dans le but de prouver que $\mathcal{A}$ admet un maximum sur $[0,2]$.

$\mathcal{A}(x) = xe^{-x^2} = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x$ $u'(x) = 1$
$v(x) = e^{-x^2}$ $v'(x) = -2xe^{-x^2}$

$e^{u(x)}$ $(e^u)' = u'e^u$

donc $\mathcal{A}'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\mathcal{A}'(x) = e^{-x^2} + x\left(-2xe^{-x^2}\right)$

$\mathcal{A}'(x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$

étude du signe de la dérivée : sur $[0;2]$

Pour tout réel x on a ($= \forall x \in [0;2]$) : $e^{-x^2} > 0$
quelque soit

donc $\mathcal{A}'(x)$ a le même signe que $1 - 2x^2$

Par suite : $\mathcal{A}'(x) \geq 0 \iff 1 - 2x^2 \geq 0$

$\iff 1 \geq 2x^2$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\iff \frac{1}{2} \geq x^2$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\iff x^2 \leq \frac{1}{2}$

Car la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[0, +\infty[$

$\iff \sqrt{x^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\iff \boxed{x \leq \sqrt{\frac{1}{2}}}$ car $x \geq 0$

Par suite :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		2
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$2e^{-4}$

$\mathcal{A}(0) = 0$

$\mathcal{A}(2) = 2e^{-4}$

$\mathcal{A}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \times e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}} \left(= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$

Grâce au tableau de variation de $\mathcal{A}$ sur $[0;2]$, on peut dire que $\mathcal{A}$ admet un maximum sur $[0;2]$ atteint lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Dc l'aire du rectangle ONMP est maximale qd le pt M a pr abscisse $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

(Rem : $\mathcal{A}_{max} = \mathcal{A}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}$ m^2.)

III- Dérivées successives et convexité

A-Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et f' sa fonction dérivée.

Si f' est dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I, et la dérivée de la fonction f' est appelée la dérivée seconde de f.

Cette dérivée seconde est notée : f'' avec : $f'' = (f')'$

Exemple : f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. $f'(x) = 4x + 5$

$f''(x) = 4$

Calculer la dérivée seconde de f.

Même travail avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 4x + 3e^{-x}$.

$g'(x) = 3x^2 + 4 - 3e^{-x}$

$g''(x) = 6x + 3e^{-x}$

Remarque : en cinématique, si on note $t \mapsto f(t)$ la distance parcourue en fonction du temps, la fonction $t \mapsto f'(t)$ désigne la vitesse instantanée et la fonction $t \mapsto f''(t)$ l'accélération.

B-Fonctions convexes, fonctions concaves sur un intervalle

1-Aspect graphique

Définitions *(pas forcément très rigoureuses, mais adaptées au programme de terminale)*.

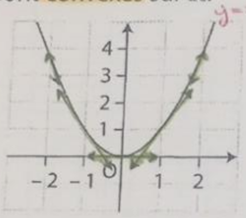
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on note C_f la courbe représentative de la fonction f.

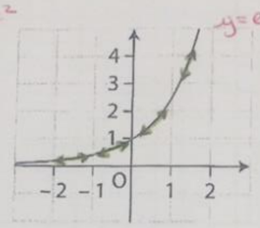
♥♥ f est **convexe** sur I si et seulement si C_f est *entièrement située* **au-dessus** de **chacune** de ses tangentes sur I.♥♥

♥♥ f est **concave** sur I si et seulement si C_f est *entièrement située* **au-dessous** de **chacune** de ses tangentes sur I.♥♥

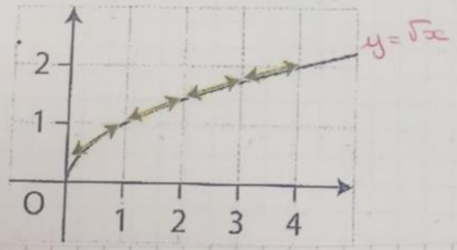
Illustration

• La fonction carrée et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.

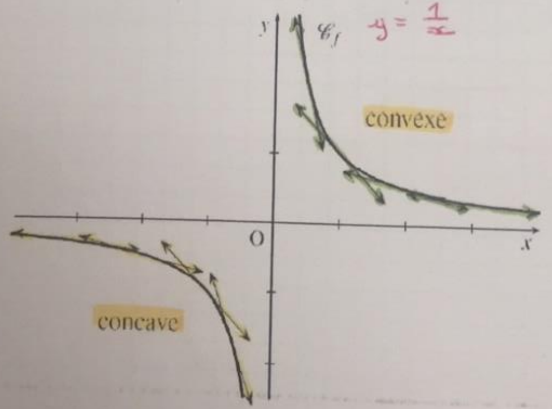




La fonction racine carrée est **concave** sur $[0 ; +\infty[$:



La fonction inverse est **concave** sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et *convexe* sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:



Définition

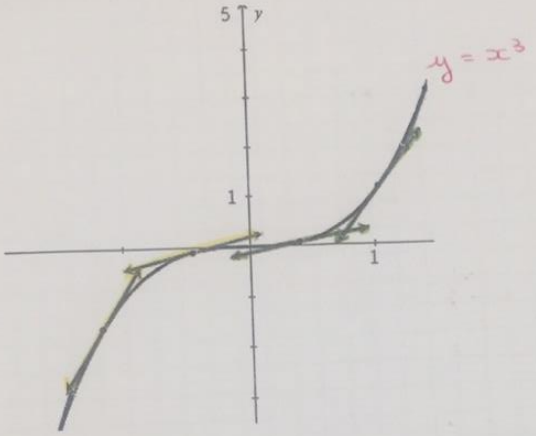
Etudier la convexité d'une fonction f sur un intervalle, revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) contenus dans I, f est convexe et sur quel(s) intervalle(s) contenus dans I, f est concave.

Remarques : la déf précédente permet, en observant la position de la courbe de f par rapport à chacune de ses tangentes sur I, de déterminer graphiquement la convexité de f sur I.

Visuellement, une fonction convexe sur un intervalle est représentée par une courbe en forme de "creux", et une fonction concave par une courbe en forme de "bosse".

Attention : une fonction peut-être ni convexe, ni concave sur un intervalle : c'est le cas de la fonction cube qui n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}$!

Illustration

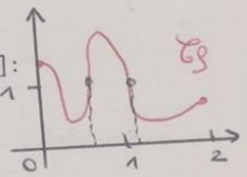


La fonction cube dont le graphe est ci-dessus n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}$.

Néanmoins, on peut dire que la fonction cube est concave sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et qu'elle est convexe sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

Si une fonction n'est pas convexe sur un intervalle, cela ne veut pas dire pour autant qu'elle est concave sur cet intervalle I.

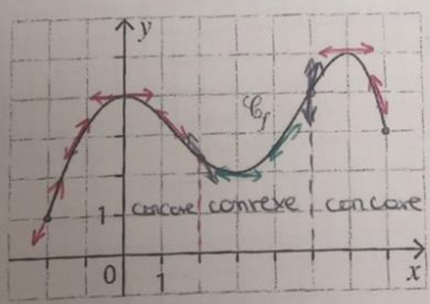
Tracer graphiquement une courbe de fonction non convexe et non concave sur $[0 ; 2]$:



Exercice 8

Etudier, par lecture graphique, la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 7]$ dont le graphe est donné ci-dessous :

- sur $[-2 ; 2]$: f est concave.
- sur $[2 ; 5]$: f est convexe.
- sur $[5 ; 7]$: f est concave.



Définition **(point d'inflexion)**

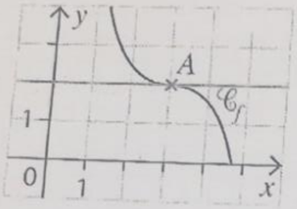
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on note C_f la courbe représentative de la fonction f.
Soit a un réel appartenant à I.

Le point $A(a\,;f(a))$ de C_f est appelé ***point d'inflexion*** lorsque en ce point, la courbe C_f ***traverse sa tangente.***

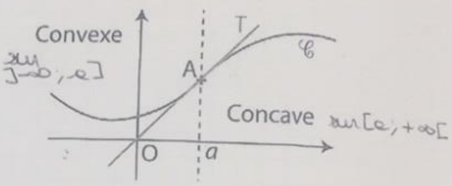
Concrètement, en l'abscisse a d'un point d'inflexion, il y a changement de convexité pour f, c'est-à-dire que f passe de convexe à concave ou l'inverse.

Illustration

Le point $A(3\ ;\ 2)$ est un point d'inflexion de C_f.

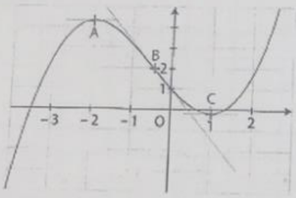


La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T en A, puis au-dessous.



Exercice 9

Dans le repère ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;2{,}5]$.
Lire graphiquement le point ou les points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



Etudier la convexité de f sur $[-4\,;2{,}5]$.

- sur $[-4\,;-\frac{1}{2}]$: f est concave
- sur $[-\frac{1}{2}\,;3]$: f est convexe.

Dc le pt $B(-\frac{1}{2}\,;2)$ est un pt d'inflexion.

2-Convexité et dérivées ***(paragraphe le plus utile pour résoudre les exercices de type bac).***

Propriété 2 **(admise)**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

♥♥ f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante. I.
f est concave sur I si et seulement si f' est ..décroissante.I. ♥♥

Si de plus f est deux fois dérivable sur I, on a le critère bien pratique suivant qui permettra algébriquement, d'étudier la convexité de f sur I :

♥♥♥♥ f est *convexe* sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, $f''(x) \geq 0$. ♥♥♥♥
♥♥♥♥ f est *concave* sur I si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, $f''(x) \leq 0$. ♥♥♥♥

♥♥ Lorsque f est deux fois dérivable sur I, étudier la convexité de f sur I revient donc à étudier le ....signe de sa dérivée seconde f''........ ♥♥

Conformément au programme, démontrons l'implication suivante :

"Si pour tout réel x appartenant à I, $f''(x) \geq 0$, *alors f est convexe sur I*".

<u>Preuve</u> : On suppose que pour tout réel x appartenant à I, $f''(x) \geq 0$.
On veut montrer que f est convexe sur I. Pour cela, d'après la propriété 1 du cours, il suffit d'établir que C_f est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur l'intervalle I :

Soit a un réel quelconque de I et $A(a\,;f(a))$ le point de C_f ayant pour abscisse a.
Notons T_A la tangente à C_f en le point A.

T_A a pour équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

> **<u>Rappel</u> : Soit f et g deux fonctions. Etudier la position relative des courbes C_f et C_g sur un intervalle I, revient à étudier le signe de la différence : $f(x) - g(x)$.**
>
> **<u>Rappelons que</u> :**
>
> **$f(x) - g(x) > 0$ sur I si et seulement si C_f est située au-dessus de C_g sur I.**
>
> **$f(x) - g(x) < 0$ sur I si et seulement si C_f est située en-dessous de C_g sur I.**
>
> **$f(x) = g(x)$ sur I si et seulement C_f et C_g se coupent (en le point d'abscisse x).**
>
> **Parfois, l'étude de ce signe est plus délicate, et nécessitera l'usage des dérivées secondes.**

Pour étudier la position relative de C_f et T_A sur I, il suffit donc d'étudier le signe des valeurs prises par la fonction h définie sur I par :

$h(x) = f(x) - g(x)$ où g est la fonction affine dont le graphe est T_A, c'est-à-dire : $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

$$\overbrace{\underbrace{\overset{mx}{f'(a)x}}_{mx+p}\ \underbrace{-\, f'(a)a + f(a)}_{p}}$$

$h(x) = f(x) - \left(f'(a)(x-a) + f(a)\right)$ fonct° affine en variable x

La seule donnée dont on dispose sur f est que $f''(x) \geq 0$ sur I et comme une fonction affine est deux fois dérivable sur tout intervalle, la fonction h est deux fois dérivable sur I, *d'où l'idée de calculer la dérivée seconde de h sur I* :

a étant un réel fixé dans I, on a : (a est une constante vis-à-vis de la variable x) :

$h'(x) = f'(x) - f'(a)$ → constante vis-à-vis de x.

dérivée constante $= 0$ et $f''(x) \geq 0$ dc $h''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$h''(x) = f''(x) - 0$

$h(a) = f'(a) - f'(a)$ car $x = a$

En particulier, comme $h'(a) =$ ..0.. et $h(a) =$ ...0..., grâce au principe de Lagrange on a successivement :

$h(a) = f(a) - (f'(a)(a-a) + f(a)) = 0$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$h''(x)$			+		
$h'(x)$	↗		0		↗
signe $h'(x)$		−	0	+	
$h(x)$	↘		0		↗

dc pr tt réel x, $h(x) \geq 0$
dc $f(x) - g(x) \geq 0$
$f(x) \geq g(x)$

Donc C_f est au-dessus de $T_A = C_g$.

<u>Remarque</u> : cela ne fait que traduire le changement de sens de variation de f' en $B(a\,;f'(a))$!

Exercice 10 *(la question classique et facile de baccalauréat)*.

1) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-4x}$ est concave.

$\iff g''(x) \leq 0$

1) f est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = x^2 - 3x + e^x$

or $f'(x) = 2x - 3 + e^x$

et $f''(x) = 2 + e^x$

Or, pr tt réel x $e^x > 0$ et $2 > 0$

donc $f''(x) > 0$

Par suite, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) $g(x) = xe^{-4x}$

$g(x) = xe^{-4x}$ g est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (prdt et composée de fct° dérivables sur $\mathbb{R}$).

$g(x) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^{-4x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -4e^{-4x} \end{cases}$

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$g'(x) = e^{-4x} + x(-4e^{-4x})$

$g'(x) = e^{-4x}(1 - 4x)$

$g''(x) = -4e^{-4x}(-4x+1) + e^{-4x}(-4)$

$g''(x) = -4e^{-4x}(1 - 4x + 1)$

$g''(x) = -4e^{-4x}(-4x + 2)$

Etude du signe de $g''(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-4x} > 0$ $-4 < 0$ donc

$g''(x)$ a le signe contraire de $-4x + 2$

donc le même signe que $4x - 2$.

Par suite : $g''(x) \leq 0 \iff 4x - 2 \leq 0$

$4x \leq 2$

$x \leq \frac{1}{2}$ $\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Conclusion : $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ est le + grand intervalle sur lequel g est concave.

Propriété (point d'inflexion et dérivée seconde)

Soit f une fonction DEUX FOIS dérivable sur un intervalle I, C_f la courbe représentative de la fonction f, et a un réel appartenant à I.

♥♥ Le point $A(a ; f(a))$ est un *point d'inflexion* de C_f si et seulement si *la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en a.* ♥♥

Exemple

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^3$.

Montrer que le point $A(1 ; 0)$ est un point d'inflexion de f.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^4$.
a) Calculer la dérivée seconde de g et vérifier qu'elle s'annule en 0.
b) Le point $O(0 ; 0)$ est-il un point d'inflexion de C_g ? Justifier.
c) Que met en évidence cette question *2* ?

---

1) $f(x) = (x-1)^3 = (u(x))^3$ avec $u(x) = x-1$ et $u'(x) = 1$

$A(1;0) \in \mathcal{C}_f$ car $f(1) = (1-1)^3 = 0$

Or pr tout réel x : $f'(x) = 3u'(x)\,u^2(x) = 3(x-1)^2$

donc $f''(x) = 3 \times 2\, u u' = 3 \times 2 \times 1 \times (x-1)$

$f''(x) = 6(x-1)$

Signe de $f''(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x) \geq 0 \iff 6(x-1) \geq 0$

$f''(x) \geq 0 \iff x \geq 1$

Conclu : f'' s'annule et change de signe en $a = 1$ donc $A(1;0)$ est le pt d'inflexion de f sur $\mathbb{R}$

2) $g(x) = x^4$

a) $g'(x) = 4x^3$

$g''(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$ pr tt réel x

donc $g''(0) = 12 \times 0^2 = 0$.

la dérivée seconde s'annule en 0.

b) $O(0;0) \in \mathscr{C}_g$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $g''(x) \geq 0$ de g est convexe sur $\mathbb{R}$

$O(0,0)$ n'est pas un pt d'inflexion.

c) Si la dérivée seconde s'annule seulement ne pas conclure qu'il y a un pt d'inflexion.

x	0	4
$f'(x)$	+	
$f(x)$	↗	

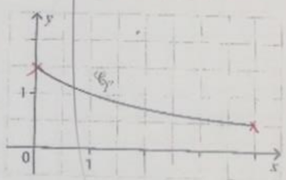
Exercice 11 (graphique)

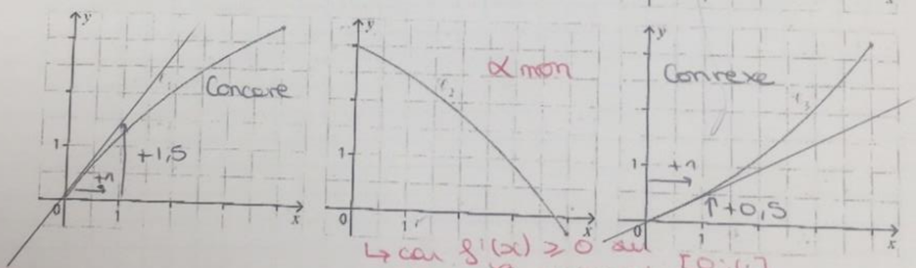
1)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0 ; 4]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de sa fonction dérivée f', représentée ci-contre.

• $\mathscr{C}_f$ est l'une des trois courbes ci-dessous.

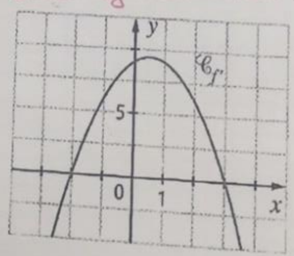
Préciser laquelle en justifiant clairement la réponse.





↳ car $f'(x) \geq 0$ sur $[0;4]$ donc $\mathscr{C}_f$ croissante

2a) Soit f une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction dérivée de f.



Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, en précisant les éventuels points d'inflexion :

2b) Même question avec :

exercice 11 :

1) f croît sur $[0;4]$ → $\mathscr{C}_2$ exclue

$f'(0) = 1,5$

On trace les tangentes en 0 à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ seule celle à $\mathscr{C}_1$ a pour pente 1,5.

rep $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_f$

} méthode 1.

méthode de 2 : convexité

or f' décroît sur $[0;4]$ dc f est concave sur $[0,4]$

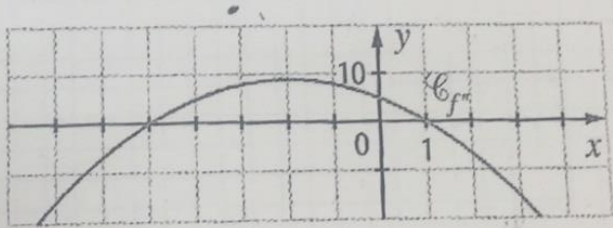
Seule $\mathscr{C}_1$ concave sur $[0;4]$

2a) Grâce à $\mathscr{C}_{f'}$ on a :

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
$f'(x)$		↗	9	↘	
f	convexe		↑	concave	

pt d'inflexion.

Soit f une fonction définie, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_{f''}$ de la fonction dérivée seconde de f.



Par lecture graphique :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
concavité f		concave	↓	convexe	↓	concave	

f admet 2 pt d'inflexion d'abscisses respectives -5 et 1

__Exercice 13__ ***(des exercices récents de baccalauréat sur la convexité pour vous montrer ce qu'il tombe fréquemment sous forme de QCM en général, et vous laisse apprécier le degré de facilité).***

Pour chacune des questions, déterminer LA bonne réponse :

1)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2]$ est donné par :

x	-2		-1		0		2
variations de f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1
	concave					convexe	

La fonction f est :

a. convexe sur $[-2\ ;\ -1]$

b. concave sur $[0;\ 1]$

c. convexe sur $[-1\ ;\ 2]$

d. concave sur $[-2\ ;\ 0]$

2)

On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de **la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On peut affirmer que la fonction f est :

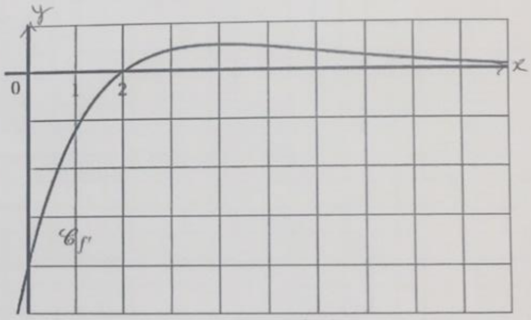
a. concave sur $]0\ ;\ +\infty[$; α

b. convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$; α

c. convexe sur $[0;\ 2]$;

d. convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$.

$f'(x)$ ↗ sur $[0;3]$
$f'(x)$ ↘ sur $[3;10]$



3)

Pour les questions 1 à 3 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.
On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

On rappelle que la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.

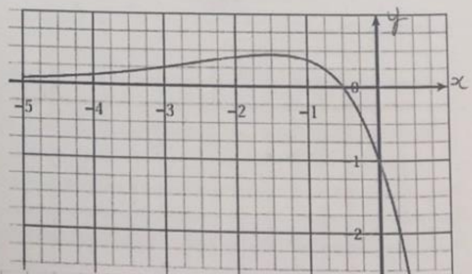
Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.



Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[$;

b. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$;

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion;

d. La fonction f est concave sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$.

f' ↗ sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ dc f est convexe sur $\left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[$

Question 3 :

La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

x	-2	$-1{,}5$	-1
$f'(x)$	↗		↗
$f''(x)$	$+$	0	$-$

mon

a. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-2\,;-1]$;

c. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

question 1 :

Grâce à $\mathscr{C}_{f'}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗		↘	

f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$.

<u>**Exercice 14**</u> ***(approfondissement sur la convexité)***

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$

a) **Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.**

b) **Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A en le point A d'abscisse 0 de C_f.**

c) **En déduire que pour tout réel x, on a : $e^x \geq x+1$, puis que $e^x > x$.**

<u>Remarque</u> : **par ce procédé, dès qu'on a une fonction convexe ou concave sur un intervalle, on peut déduire des inégalités en écrivant l'équation réduite de la tangente en un point donné, et en se souvenant qu'une fonction convexe a sa courbe située au-dessus de chacune de ses tangentes, et qu'une fonction concave a sa courbe située au-dessous de chacune de ses tangentes.**

1) $f(x) = e^x$

a) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$

étude signe $f''(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$

donc $f''(x) > 0$ dc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) $T_A : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = 0$

dc $y = f'(0) \times x + f(0)$

avec $f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

donc : $\boxed{y = x + 1}\left(= g(x)\right)$

c) Rappel : par déf f est convexe sur $\mathbb{R}$ lorsque $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de chacune de ses tangentes

d'ap a) : f est convexe sur $\mathbb{R}$

en particulier, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de T_A.

dc $\forall x \in I$ $f(x) \geq g(x)$

pr tt réel x $e^x \geq x + 1$.

pr tt réel x : $x + 1 > x$

donc : $e^x > x$ (transitivité)

exercice 12 :

1) Etudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 3$.

2) Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+1)\,e^{-x}$.

3) On appelle cubique la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, et a est non nul.
Montrer que toute cubique admet un seul point d'inflexion sur $\mathbb{R}$.

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 3x + 2 - e^x$.
Démontrer que la courbe C_h représentative de la fonction h est située au-dessous de chacune de ses tangentes.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 3$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + 2$

$f''(x) = 2x - 5$

$f'(x) = x^2 - 5x + 2$

étude du signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$f''(x) \geq 0 \iff 2x - 5 \geq 0$

$x \geq \frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Conclusion

f est concave sur $]-\infty, \frac{5}{2}]$
f est convexe sur $[\frac{5}{2}; +\infty[$
le pt d'abs $\frac{5}{2}$ est le pt d'inflexion de C_f

2) $g(x) = (x+1)e^{-x} = u(x) \times v(x)$ avec $u'(x) = 1$, $v'(x) = -e^{-x}$

g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 1e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x})$ $(= u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$

$g'(x) = e^{-x}(1 - x - 1) = e^{-x} \times (-x) = v(x) \times w(x)$
$= -xe^{-x}$ avec $w'(x) = -1$

$g''(x) = -e^{-x}(-x) - 1 \cdot (e^{-x})$ $(= v'(x)w(x) + v(x)w'(x))$

$g''(x) = -e^{-x}(-x+1) = e^{-x}(x-1)$

étude du signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

pr ∀ réel x, $e^{-x} > 0$ dc $g''(x)$ a le m̂ signe que $x - 1$

aussi $g''(x) \geq 0 \iff x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

donc on a

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe $g''(x)$	$-$	0	$+$

Par suite la dérivée seconde s'annule en 1 et change de signe en 1 dc la C_g admet un pt d'inflexion ayant pr abscisse 1.

3) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

étude du signe de $f''(x)$. $f''(x) \geq 0 \iff 6ax + 2b \geq 0$

$6ax \geq -2b$

Cas A : si $a > 0$ alors $x \geq \frac{-2b}{6a}$ $x \geq \frac{-b}{3a}$

Cas B : si $a < 0$ alors $x \leq \frac{-b}{3a}$

CAS A

x	$-\infty$		$\frac{-b}{3a}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Dc 1 seul pt d'inflexion

CAS B

x	$-\infty$		$\frac{-b}{3a}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Dc un seul pt d'inflexion.

4) $h(x) = 3x + 2 - e^x$ h 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_h$ au-dessous de chacune de ses tangente signifie que h est concave sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = 3 - e^x$ et $h''(x) = -e^x$

Or pr ∀ réel x, $e^x > 0$ dc $-e^x < 0$

donc $h''(x) < 0$ et h est concave sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}_h$ est au-dessous de chacune de ses tangentes.