Chapitre I **Fonctions polynômes du second degré**

I – Rappels de seconde sous forme d'exercices

Exercice 1

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant :

a) "-3 est solution de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$".

b) "Pour tout réel x, $x^2 - 3x = x - x(4-x)$"

c) "L'opposé de $3x^2 - 6x + 5$ est $-3x^2 + 6x + 5$"

d) "Pour tout réel x, $(x-5)^2 + 1{,}8 > 0$"

a) Si $x = -3$, alors $x^2 + x - 6 = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$

Donc -3 est solu° de l'équa° $x^2 + x - 6 = 0$. Vrai !

b) Pr tt réel x : $x - x(4-x) = x - 4x + x^2 = x^2 - 3x$

Donc on a bien : $x^2 - 3x = x - x(4-x)$. Vrai !

c) L'opposé d'une quantité A, est $-$A.

Ici, $-(3x^2 - 6x + 5) = -3x^2 + 6x - 5$.

Or $-3x^2 - 6x - 5 \neq -3x^2 - 6x + 5$

Donc Aff. 3 est fausse.

d) Pour tout réel x, $(x-5)^2 \geqslant 0$!

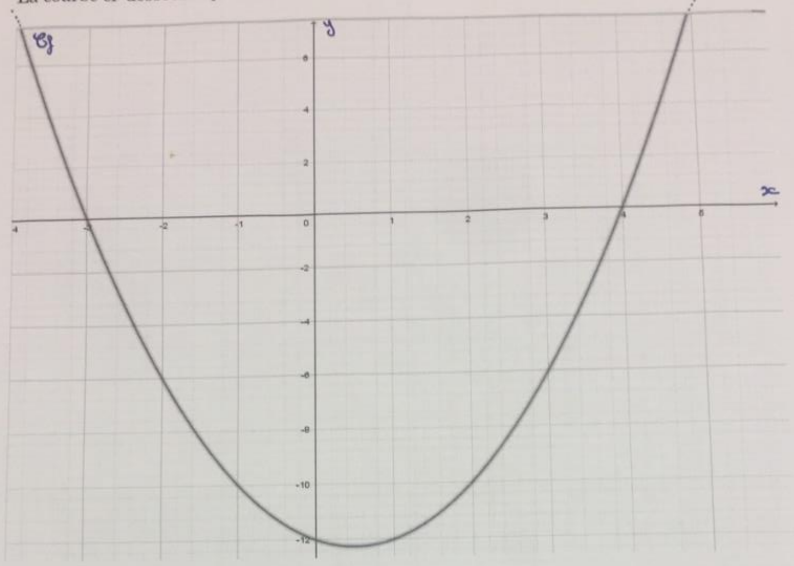
Donc $(x-5)^2 + 1{,}8 \geqslant 0 + 1{,}8$

$(x-5)^2 + 1{,}8 \geqslant 1{,}8$ et $1{,}8 > 0$

Donc $(x-5)^2 + 1{,}8 > 0$. Vrai !

Exercice 2

La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x - 12$.



a) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.

b) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > 0$.

c) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = (x+3)(x-4)$

d) Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, puis l'inéquation $f(x) > 0$.

a) $f(x) = 0$ a pour solu° : $x = -3$ et $x = 4$. On note $S = \{-3;4\}$

On cherche la (les) valeurs de x pr lesquelles C_f rencontre l'axe des abscisses.

b) $f(x) > 0$. On cherche ttes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$

les abscisses de ts les points de C_f (courbe de f) qui sont situés AU-DESSOUS de l'axe des abscisses (x).

$f(x) > 0$ lorsque : $x < -3$ ou $x > 4$

signifie que $x \in]-\infty;-3[$ ou $x \in]4;+\infty[$

$S =]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$.

c) Pour tout réel x : $f(x) = x^2 - x - 12$.

Pr tt réel x, développons : $(x+3)(x-4) = x^2 - 4x + 3x - 12 = x^2 - x - 12 = f(x)$.

Conclusion : Pour tout réel x, $f(x) = (x+3)(x-4)$.

d) • $f(x) = 0$

$(x+3)(x-4) = 0$ d'après c)

Ce qui équivaut à : $x + 3 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = -3$ ou $x = 4$

$$\mathcal{S} = \{-3 ; 4\}$$

• $f(x) > 0$ équivaut à $(x+3)(x-4) > 0$ => tableau de signes !

Recherche du signe des deux expressions $x+3$ et $x-4$.

Or, $x + 3 \geqslant 0$ équivaut à dire que $x \geqslant -3$.

Et, $x - 4 \geqslant 0$ équivaut à dire que $x \geqslant 4$.

Donc :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x) = (x+3)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

=> règle des signes du produit

Conclusion : Grâce au tableau de signes,

$f(x) > 0$ équivaut à dire que : $x < -3$ ou $x > 4$.

$$\mathcal{S} =]-\infty ; -3[\cup]4 ; +\infty[.$$

Exercice 3

Simplifier les écritures suivantes :

a) $\sqrt{8}$; $\sqrt{45}$; $(2\sqrt{7})^2$.

b) $A = \dfrac{-12+\sqrt{36}}{6}$; $B = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2}$; $C = \dfrac{6-\sqrt{27}}{3}$

a) Pour tout réels a et b positifs ou nul : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

- $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
- M_1 $(2\sqrt{7})^2 = 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} = 2\times 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 4 \times 7 = 28$

M_2 $(2\sqrt{7})^2 = 2^2 \times \sqrt{7}^2 = 4\times 7 = 28 \Rightarrow$ Id. 1.

b) $A = \dfrac{-12+\sqrt{36}}{6} = \dfrac{-12+6}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1.$

$B = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{4\times 3}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{2} \overset{M_1}{=} \dfrac{2(1+\sqrt{3})}{2} = 1+\sqrt{3}$ car $2+2\sqrt{3} = 2\times 1 + 2$
$= 2(1\sqrt{3}$

$B \overset{M_2}{=} \dfrac{2+2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}.$

↳ car $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

$C = \dfrac{6-\sqrt{27}}{3} = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{3} \overset{M_2}{=} \dfrac{6}{3} - \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{1} - \sqrt{3} = 2-\sqrt{3}.$

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (x+7)^2$; $B = (3x-2)^2$; $C = (2x-5)(2x+5)$

2) Factoriser les expressions suivantes :
$A = 9x^2 - 36.$

$B = (3x+1)^2 - (x-7)^2$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $x^2 = 48$; b) $x^2 = -1$
c) $(x-1)(-3x+2) = 0$; d) $x^2+8x+16 = 0$; e) $(x-1)^2 - 8 = 0.$

$A = (x+7)^2 = x^2 + 2\times x\times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49.$ Id. 2. : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$B = (3x-2)^2 = (3x)^2 - 2\times 2\times 3x + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4.$ Id. 3. : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

$C = (2x-5)(2x+5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25.$ Id. 1 : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2) $A = 9x^2 - 36 = (3x)^2 - 6^2 = (3x-6)(3x+6)$ $\Rightarrow$ Id. 1

$B = (3x+1)^2 - (x-7)^2 = (3x+1+x-7)(3x+1-(x-7))$ $\Rightarrow$ Id. 1
$B = (4x-6)(3x+1-x+7) = (4x-6)(2x+8).$

3) a. $x^2 = 48$
$x^2 - 48 = 0$
$x^2 - \sqrt{48}^2 = 0$
$(x+\sqrt{48})(x-\sqrt{48}) = 0$
qui équivaut à : $x + \sqrt{48} = 0$ ou $x - \sqrt{48} = 0$
$x = -\sqrt{48}$ ou $x = \sqrt{48}$

$\mathcal{S} = \{-\sqrt{48} ; \sqrt{48}\}$

b. $x = -1$
$\mathcal{S} = \emptyset$ car pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0.$

Rappel

Soit k un nombre réel.
♥♥♥ Considérons l'équation : $x^2 = k$, d'inconnue x où x est un nombre réel.

Si $k < 0$, alors cette équation n'a pas de solution

Si $k = 0$, alors cette équation a pour unique solution $x = 0$

Si $k > 0$, alors cette équation a deux solutions : $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$ ♥♥♥

Remarque : cela doit facilement se retrouver mentalement en visionnant la courbe représentative de la fonction carrée !!

Nous verrons dans la suite du chapitre que la résolution des équations du second degré peut toujours se ramener à la résolution d'une équation de la forme : $X^2 = k$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^2 = 3$; $x^4 = 256$.

$(a^n)^p = a^{np}$

• $x^2 = 3$ a pour solution : $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$ car $k > 0$.

$\mathcal{S} = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

• $x^4 = 256$: $(x^2)^2 = 256$. Posons $y = x^2$: l'équa° $(x^2)^2 = 256$ se réécrit donc : $y^2 = 256$ qui a pour solutions : $y = -\sqrt{256} = -16$ et $y = \sqrt{256} = 16$

Or $y = x^2$ donc on résout $\underbrace{x^2 = -16}_{\text{pas de sol°}}$ et $x^2 = 16$

$x = -\sqrt{16} = -4$
$x = \sqrt{16} = 4$

$\mathcal{S} = \{-4 ; 4\}$

Exercice 4

3) c) $(x-1)(-3x+2) = 0$

équivaut à : $x - 1 = 0$ ou $-3x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $x = \frac{2}{3}$

$\mathcal{S} = \left\{1 ; \frac{2}{3}\right\}$

d) $x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x+4)^2 = 0$ Id2.

équivaut à dire que $x + 4 = 0$, càd $x = -4$

$\mathcal{S} = \{-4\}$

e) $(x-1)^2 - 8 = 0$ positif $= \sqrt{\text{positif}}^2$

$(x-1)^2 - \sqrt{8}^2 = 0$

$(x-1+\sqrt{8})(x-1-\sqrt{8}) = 0$

ce qui équivaut à : $x-1+\sqrt{8} = 0$ ou $x-1-\sqrt{8}$

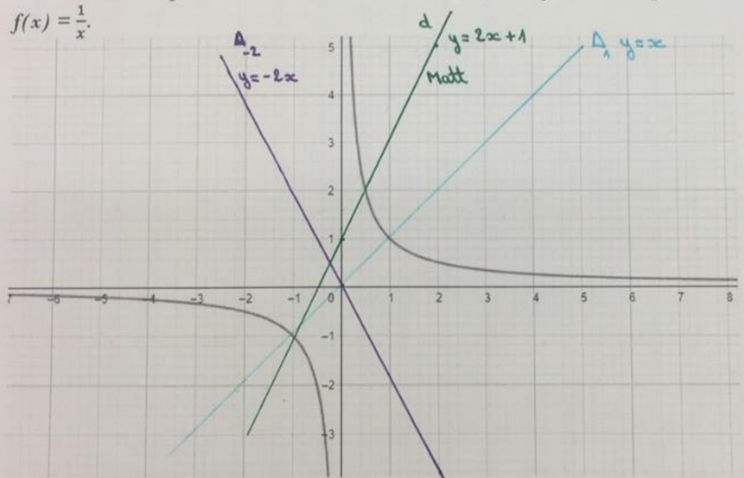
$x = 1-\sqrt{8}$ ou $x = 1+\sqrt{8}$

$x = 1-2\sqrt{2}$ ou $x = 1+2\sqrt{2}$

$$\mathcal{S} = \{1-2\sqrt{2} ; 1+2\sqrt{2}\}$$

Exercice 5

Voici la courbe représentative de la fonction inverse, notée f et définie, pour tout réel non nul, par : $f(x) = \frac{1}{x}$.



Soit m un réel quelconque et Δ la droite d'équation réduite : $y = mx$.

1) Déterminer, en fonction de la valeur du réel m, le nombre de points d'intersection de la courbe C_f représentant la fonction f et de la droite Δ. Préciser les coordonnées de ces points lorsqu'il y en a.

2) Matt se pose la question suivante : étant donné la droite d d'équation réduite $y = 2x+1$, est-il possible de prévoir, algébriquement, c'est-à-dire par le calcul, les coordonnées des éventuels points d'intersection de C_f et d.
Déterminer une équation qui traduit ce problème.
Nous allons essayer de dégager une théorie qui va permettre à Matt d'avoir réponse rapide à sa question.

$m \in \mathbb{R}$

Δ_m a pour équation réduite : $y = mx$

Par exemple, Δ_1 a pour équation : $y = 1x$
$y = x$

Δ_{-2} a pour équation : $y = -2x$

x	0	2
y	0	-4

. . .

Rappel : Soit f et g deux fonctions.
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives.
Les abscisses des éventuels points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$.

1) Ici, posons $g(x) = mx$.
Résolvons l'équation : $f(x) = g(x)$, x est l'inconnue.
$\frac{1}{x} = mx$ équivaut à : $1 = mx \times x$ avec $x \neq 0$.
$mx^2 = 1$

. Si $m \neq 0$, alors $x^2 = \frac{1}{m}$

Si $m < 0$, alors l'équa° précédente n'a pas de solu°.

Si $m > 0$, alors l'équa° précédente a 2 solu° :
$x = -\sqrt{\frac{1}{m}}$ et $x = \sqrt{\frac{1}{m}}$

. Si $m = 0$, $mx^2 = 1$ s'écrit en $0x^2 = 1$
$0 = 1$
↳ pas de solu°

Conclusion : Si $m \leq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ et Δ_m n'ont aucun point d'intersec°.
Si $m > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ et Δ_m ont 2 points en communs d'abscisses respectives $-\sqrt{\frac{1}{m}}$ et $\sqrt{\frac{1}{m}}$.

$A\left(-\sqrt{\frac{1}{m}} ; f\left(-\sqrt{\frac{1}{m}}\right)\right)$ avec $f\left(-\sqrt{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{-\sqrt{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{m}}} = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = -\sqrt{m}$.

$B\left(\sqrt{\frac{1}{m}} ; f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)\right)$ et $f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right) = \sqrt{m}$

Donc $A\left(-\sqrt{\frac{1}{m}} ; -\sqrt{m}\right)$ et $B\left(\sqrt{\frac{1}{m}} ; \sqrt{m}\right)$.

2) d a pour équation réduite : $y = 2x + 1$

x	0	2
y	1	5

Matt va devoir résoudre l'équa° : $f(x) = 2x + 1$

càd : $\frac{1}{x} = 2x + 1$

ce qui équivaut à : $1 = x(2x+1)$ et $x \neq 0$

$1 = 2x^2 + x$ et $x \neq 0$

$\underbrace{2x^2 + x - 1 = 0}_{\text{équa° du second degré}}$ et $x \neq 0$

II – Fonctions polynômes du second degré

A-Généralités

Définition

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

On appelle fonction polynôme du second degré, ou encore trinôme du second degré, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que f est écrite sous forme développée.

♥♥♥ Les nombres réels a, b et c sont appelés **les coefficients de ce polynôme** du second degré. ♥♥♥

Exemples

Donner pour chacune des fonctions polynômes du second degré suivantes, les coefficients a, b et c :

$f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ Ici : $a =$ ..2.. ; $b =$ ..5.. ; $c =$ ..3..

$g(x) = x^2 + 2{,}7x - 8$ Ici : $a =$ ..1.. ; $b =$ 2,7 ; $c =$ ..-8

$h(x) = -x^2 - 5x$ Ici : $a =$.-1 ; $b =$.-5 ; $c =$ ..0.

Définition

On appelle ***équation du second degré*** d'inconnue x, toute équation de la forme $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$, où a, b et c sont des réels, et a est non nul.

Un des objectifs du chapitre est de savoir résoudre le plus rapidement possible de telles équations.

Exemple : $3x^2 + 5x - 9 = 0$ est une équation du second degré.

$2x^2 + 5x + 3 = x^2 + 11x$ n'est pas une équation du second degré au sens de la définition, mais peut s'y ramener en faisant apparaître 0 dans le membre de droite de l'égalité :
$2x^2 + 5x + 3 = x^2 + 11x \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 - x^2 - 11x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0$.

On retiendra bien cette technique de se ramener systématiquement à un second membre nul pour les expressions du second degré.

Considérons une fonction polynôme du second degré f.

Définition

Toute ***valeur réelle de x qui annule f,*** c'est-à-dire telle que $f(x) = 0$, est appelée ***une racine*** de cette fonction polynôme.
↳ annulation

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x - 6$.

2 est une racine de f car : $f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$............

-1 est-il racine de f ? $f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 6 = 1 - 1 - 6 = -6$ et $-6 \neq 0$
Donc -1 n'est pas racine de f.

Exercice 6

Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
" Toute fonction polynôme du second degré admet exactement deux racines sur $\mathbb{R}$".

Remarque : Dans l'exercice 2 de la page 1, $f(x) = x^2 - x - 12$ est la forme développée d'une fonction polynôme du second degré. En ***factorisant*** cette dernière en $f(x) = (x + 3)(x - 4)$, on a réussi à résoudre l'équation du second degré : $x^2 - x + 12 = 0$.

Si l'on parvient à trouver une technique pour éventuellement factoriser les fonctions polynômes du second degré, on saura alors résoudre toute équation du second degré.

Ce sont les objectifs des paragraphes suivants.

« Toute équa° du second degré admet exactement deux annula° réelles ».

Faux !

Contre exemple : $x^2 + 1 = 0$

$1x^2 + 0x + 1 = 0$: équa° du second degré

$x^2 = -1$

pas de solu° réelle car $-1 < 0$!

B- La forme canonique

Exemples d'introduction

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$.

Effectuons les deux étapes suivantes (algorithme) :

Etape 1 : on met en facteur le coefficient multiplicateur des x^2.

$f(x) = 2x^2 + 12x + 10 = ..2.(x^2 + 6x + 5).....$

Etape 2 : Au sein de la parenthèse, on reconnait le début du développement d'une identité remarquable concernant l'expression : $x^2 + 6x$:

En effet, $x^2 + 6x = \underbrace{x^2 + 2 \times x \times 3}_{\text{de la forme } a^2+2ab \text{, qui est le début du développement de l'identité remarquable } (a+b)^2} = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2$ → on fait apparaître id.2.

Ainsi, $f(x) = 2(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2 + 5) = 2((x+3)^2 - 9 + 5) = 2((x+3)^2 - 4) = 2(x+3)^2 - 8$.

L'expression finale obtenue de $f(x)$ est appelée la forme canonique de $f(x)$.

$g(x) = x^2 + 4x + 1$. Donner la forme canonique de $g(x)$.

E_1 : $1(x^2 + 4x + 1)$: Mettre 1 en facteur c'est ne rien faire !

E_2 : $x^2 + 4x = x^2 + 2 \times x \times 2 + 1 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 + 1$

$g(x) = (x+2)^2 - 4 + 1 = (x+2)^2 - 3$

Remarque : Si vous éprouvez des difficultés pour l'étape 2, on peut retenir l'identité suivante :

Pour tous réels x et w, on a : $\boxed{x^2 + wx = \left(x + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{w^2}{2}}$

Déterminer de même la forme canonique de : $g(x) = x^2 - 10x + 8$ et celle de $h(x) = -2x^2 - 8x + 3$.

$g(x) = x^2 - 10x + 8$

$E_1 : 1(x^2 - 10x + 8)$

$E_2 : g(x) = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2 + 8 = (x-5)^2 + 8 - 25 = (x-5)^2 - 17$.

$h(x) = -2x^2 - 8x + 3$

$E_1 : -2\left(x^2 + 4x - \frac{3}{2}\right)$

$E_2 : h(x) = -2\left(x^2 + 2 \times 2 \times x - \frac{3}{2} + 2^2 - 2^2\right) = -2\left((x+2)^2 - 5,5\right) = -2(x+2)^2 + 11$

Propriété

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ s'écrit de ***façon unique*** sous la forme :

♥♥♥ $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec ♥♥♥ $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ ♥♥♥

Cette dernière écriture est appelée la forme (ou l'écriture) canonique de f.

Preuve de la propriété (donnée à titre culturel, c'est normal de trouver cela difficile à première lecture)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

Etape 1 : On met a en facteur dans l'expression de $f(x)$: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Etape 2 : $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le ***début du développement*** de : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

En effet, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

Par suite, $x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

Ainsi, $f(x) = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$, et en redistribuant le facteur a sur chacun des termes du crochet :

$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ car : $a \times \frac{b^2}{4a^2} = \frac{a \times b^2}{4 \times a \times a} = \frac{b^2}{4a}$ et $a \times \frac{c}{a} = c$.

$f(x) = a\left(x - \left(- \frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

On définit alors les réels α et β en posant : $\alpha = \left(- \frac{b}{2a}\right)$ et $\beta = - \frac{b^2}{4a} + c$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que $\beta = f(\alpha)$: on remplace x par $\frac{-b}{2a}$ dans l'expression :

$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$:

$f(\alpha) = f(- \frac{b}{2a}) = a(- \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \times 0^2 - \frac{b^2}{4a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = \beta$.

> Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où : $\alpha = - \frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = f(- \frac{b}{2a})$.

<u>Remarque</u>

Lorsqu'on vous demande de donner la forme canonique d'un trinôme, on peut donner d'un coup l'expression donnée dans la propriété, à condition de retenir **par cœur** ♥♥♥ l'expression de α, β et la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ ♥♥♥ !

Sinon, on peut procéder comme on l'a vu dans les deux exemples d'introduction de la forme canonique.

<u>Exemples</u>

1) Donner la forme canonique des fonctions polynômes du second degré suivantes :

$f(x) = 2x^2 + 6x + 1$; $g(x) = x^2 - x + 1$

2) En utilisant la forme canonique obtenue à la question 1), résoudre dans ℝ les équations :

$f(x) = 0$ puis $g(x) = 0$.

1) $f(x) = 2x^2 + 6x + 1 = ax^2 + bx + c$ avec : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 1 \end{cases}$

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} = -1,5$

$\beta = f(\alpha) = f(-1,5) = 2 \times (-1,5)^2 + 6 \times (-1,5) + 1 = 2 \times 2,25 - 9 + 1 = 4,5 - 9 + 1 = -3,$

La forme canonique de $f(x)$ est donc : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$f(x) = 2(x-(-1,5))^2 + (-3,5)$

$f(x) = 2(x+1,5)^2 - 3,5$

2) $f(x) = 0$

$2(x+1,5)^2 - 3,5 = 0$

$2(x+1,5)^2 = 3,5$

$(x+1,5)^2 = \frac{3,5}{2} = 1,75$

Donc : $x + 1,5 = \sqrt{1,75}$ ou $x + 1,5 = -\sqrt{1,75}$

Bref : $x = -1,5 + \sqrt{1,75}$ ou $x = -1,5 - \sqrt{1,75}$

$S = \left\{-1,5 - \sqrt{1,75} \,;\, -1,5 + \sqrt{1,75}\right\}$

1) $g(x) = x^2 - x + 1$

$g(x) = x^2 - 2 \times x \times 0,5 + 1$

$g(x) = x^2 - 2 \times x \times 0,5 + 0,5^2 - 0,5^2 + 1$

$g(x) = (x-0,5)^2 - 0,5^2 + 1$

$g(x) = (x-0,5)^2 + 0,75$

2) $g(x) = 0$

$(x-0,5)^2 + 0,75 = 0$

$(x-0,5)^2 = -0,75$

$S = \emptyset$ car $x^2 \geq 0$ et $-0,75 < 0$.

C- Résolution de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$.

L'utilité principale de la forme canonique est qu'elle va nous permettre de dégager une règle pour résoudre facilement n'importe quelle équation du second degré.

Dans la propriété précédente, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec :
$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2}{4a} + c = \dfrac{-b^2+4ac}{4a} = \dfrac{-(b^2-4ac)}{4a}$.

Définition

Le réel $b^2 - 4ac$, noté Δ (lire delta) est appelé le ***discriminant*** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

On a : ♥♥ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$. ♥♥

Nous allons voir que ***le signe du discriminant*** Δ permet de déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, et lorsqu'elle en a, de déterminer la valeur de ces solutions.

♥♥ Le Théorème permettant de résoudre les équations du second degré ♥♥

Soit (E) l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, où x est l'inconnue, et les réels a, b et c sont fixés, avec $a \neq 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$.

♥♥

1° cas **: Si $\Delta < 0$, alors** l'équation (E) n'a aucune solution réelle

2° cas **: Si $\Delta = 0$, alors** l'équation (E) admet une unique solution : $x = \dfrac{-b}{2a}$

3° cas **: Si $\Delta > 0$, alors** l'équation (E) admet deux sol° : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **avec :**

lire x indice 1

♥♥

Preuve :

Grâce à la forme canonique, $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Donc on a : $ax^2 + bx + c = a(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}]$

$ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à : $a[(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}] = 0$ et puisque $a \neq 0$ cette dernière équivaut à :

$(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$ ou encore à : $(x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Ainsi résoudre l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre l'équation : $(x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

1° cas : si $\Delta < 0$, comme $(x + \dfrac{b}{2a})^2$ est un réel positif ou nul, en tant que carré de réel, il ne peut pas être égal au réel $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ qui est strictement négatif vu que $\Delta < 0$ et $4a^2 > 0$!

Donc dans ce cas-là, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

2° cas : si $\Delta = 0$, alors : $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{0}{4a^2} = 0$, et donc $x + \frac{b}{2a} = 0$, c'est-à-dire : $x = -\frac{b}{2a}$.

3° cas : si $\Delta > 0$, observons que $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ de sorte que l'équation :

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ se réécrit sous la forme : $(x + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ ou encore :

$(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0.$

Grâce à la troisième identité remarquable [rappel : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$], on a donc :

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0.$$

D'après le théorème du produit nul :

$$(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad ou \quad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ouf, la propriété est ainsi prouvée !

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x^2 + x - 1 = 0$ b) $x^2 - 3x + 1 = 0$ c) $0,3x^2 - 3x + 7,5 = 0$
d) $4x^2 + x + 1 = x^2 - x - 5$ e) $x(8 - x) + 1 = 0$

e) Résoudre, sans utiliser le discriminant, l'équation : $4x^2 - 13x = 0$.

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

De la forme : $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$

$9 > 0$, donc $\Delta > 0$, donc l'équation $2x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ -1 ; \frac{1}{2} \right\}$$

b) $x^2 - 3x + 1 = 0$

De la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$

$5 > 0$, donc $\Delta > 0$, donc 2 solu° :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

c) $0{,}3x^2 - 3x + 7{,}5 = 0$

De la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 0{,}3$
$b = -3$
$c = 7{,}5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 0{,}3 \times 7{,}5 = 9 - 9 = 0$

$\Delta = 0$, donc cette équa° a pour unique solu° :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2\times 0{,}3} = \frac{3}{0{,}6} = 5.$$

$$S = \{5\}$$

d) $4x^2 + x + 1 = x^2 - x - 5$ Δ pas de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

$3x^2 + 2x + 6 = 0$

De la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 6 = 4 - 72 = -68$

$-68 < 0$, donc $\Delta < 0$, donc l'équa° n'a pas de sol°.

$\mathcal{S} = \emptyset$

e) $x(8 - x) + 1 = 0$

$8x - x^2 + 1 = 0$

$-x^2 + 8x + 1 = 0$

De la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$

$b = 8$

$c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 64 + 4 = 68$

$68 > 0$, donc $\Delta > 0$, donc cette équa° admet 2 sol° :

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{68}}{2 \times (-1)} = \frac{-8 - \sqrt{68}}{-1} = \frac{-(8 + \sqrt{68})}{-2} = \frac{8 + \sqrt{68}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{17}}{2}$

$x_1 = \frac{2(4 + \sqrt{17})}{2} = 4 + \sqrt{17}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4 - \sqrt{17}$

$\mathcal{S} = \{4 + \sqrt{17} ; 4 - \sqrt{17}\}$

e) $4x^2 - 13x = 0$

$x(4x-13) = 0$

ce qui équivaut à : $x = 0$ ou $4x - 13 = 0$

$4x = 13$

$x = \frac{13}{4}$

$S = \left\{0 ; \frac{13}{4}\right\}$

Remarque : on retiendra que dans l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, lorsque $b = 0$ ou $c = 0$, il est inutile de calculer Δ pour la résoudre, on peut factoriser et déduire les solutions.

Exercice 8

1) Déterminer tous les réels c pour lesquels l'équation : $2x^2 + 5x + c = 0$ admet :

a) Une seule solution réelle
b) Deux solutions réelles distinctes.

2) Expliquer pourquoi, si les réels a et c sont de signe contraire, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours deux solutions distinctes.

1) $2x^2 + 5x + c = 0$

a) Cette équa° admet une unique sol° ssi $\Delta = 0$.

Ici $a = 2$; $b = 5$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times c$

$\Delta = 25 - 8c$

Donc $\Delta = 0$ s'écrit $25 - 8c = 0$

$-8c = -25$

$c = \frac{25}{8} = 3,125$

Cette équa° admet une unique sol° lorsque $c = 3,125$.

b) $2x^2+5x+c=0$ admet deux solu° distinctes équivaut à dire que : $\Delta > 0$.

Or $\Delta = 25-8c$, donc $\Delta > 0$ équivaut à : $25-8c>0$

$25>8c$

$8c<25$

$c<\frac{25}{8}$ (car $8>0$)

$S = \left]-\infty ; \frac{25}{8}\right[$

b) $ax^2+bx+c=0$

$a\neq 0$, et a et c sont de signes contraires.

$\Delta = b^2-4ac$

Or pour tout réel b, $b^2 \geq 0$.

a et c sont de signes contraires, donc $ac<0$.

Or $-4<0$, donc $-4ac>0$.

Par suite $\Delta = b^2-4ac$ est donc strictement positif.

(somme d'1 terme strictement positif avec un terme positif ou nul).

Donc $\Delta>0$, donc l'équa° $ax^2+bx+c=0$ admet deux sol° distinctes.

Exercice 9

Sans tâtonner, déterminer deux entiers naturel consécutifs dont le produit est égal à 4970.

Soit x et $x+1$ deux entiers consécutifs.

On veut que : $x(x+1)=4970$

$x^2+x=4970$

$x^2+x-4970=0$

De la forme ax^2+bx+c avec $a=1$

$b=1$

$c=-4970$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-4970) = 1 + 19880 = 19881 = 141^2$

$19881 > 0$, donc $\Delta > 0$ donc cette équa° admet 2 sol° :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{19881}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 141}{2} = \frac{-142}{2} = -71$$

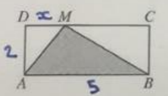
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 141}{2} = \frac{140}{2} = 70.$$

Conclusion : $-71 < 0$, donc -71 n'est pas un entier naturel.

Donc $x = 70$: les deux entiers consécutifs dont le produit est égal à 4970 sont donc : 70 et 71.

Exercice 10

ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$ et *M* un point mobile sur le segment [*DC*].



Le triangle *AMB* peut-il être rectangle en *M* ?

Soit $x = DM$. On a $0 \leq x \leq 5$

AMB est un triangle rectangle en M : ssi : $AB^2 = AM^2 + MB^2$ (Th. de Pythagore)

Exprimons AM^2 et MB^2 en fonction de x

Le théorème appliqué au triangle DAM rectangle en D donne :

$AM^2 = AD^2 + DM^2$

$AM^2 = 2^2 + x^2$

$AM^2 = 4 + x^2$

De m, ds le triangle MCB rectangle en C on a :

$MB^2 = MC^2 + CB^2$ avec $MC = 5 - x$

$MB^2 = (5-x)^2 + 2^2$

$MB^2 = 25 - 10x + x^2 + 4$

$MB^2 = x^2 - 10x + 29$

Par suite, $AB^2 = AM^2 + MB^2$

s'écrit : $5^2 = 4 + x^2 + x^2 - 10x + 29$

$25 = 2x^2 - 10x + 33$

$2x^2 - 10x + 8 = 0$

De la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$

$b = -10$

$c = 8$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 100 - 64 = 36$

$36 > 0$, donc $\Delta > 0$, donc cette équa° a 2 solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10-\sqrt{36}}{2\times 2} = \dfrac{10-6}{4} = \dfrac{4}{4} = 1.$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10+6}{4} = \dfrac{16}{4} = 4.$

$\mathcal{S} = \{1 ; 4\}$

Or $x = DM$ et $0 \leqslant x \leqslant 5$.

On a bien : $0 \leqslant 1 \leqslant 5$ et $0 \leqslant 4 \leqslant 5$.

Donc il existe deux positions du point M sur le segment [CD] pour lesquelles le triangle MAB est rectangle en M :
lorsque $DM = 1$ et lorsque $DM = 4$.

Exercice 11

Un certain nombre de bus doit amener 600 personnes à Marseille. Chaque bus transporte le même nombre de personnes.

Un des bus est tombé en panne, il a fallu placer une personne de plus dans chaque autocar restant.

Combien y avait-il d'autocars prévus au départ ?

Soit x le nb de bus prévus au départ.

Il y a donc $\frac{600}{x}$ personnes par bus au départ.

Il reste après la panne $x-1$ bus pour transporter les 600 personnes.

Chacun des bus fonctionnant va transporter $\frac{600}{x-1}$ personnes.

Donc $\frac{600}{x} + 1 = \frac{600}{x-1}$.

Résolu° de : $\frac{600}{x-1} = \frac{600}{x} + 1$

$$\frac{600}{x-1} = \frac{600}{x} + \frac{x}{x}$$

$$\frac{600}{x-1} = \frac{600+x}{x}$$

produit en x

$$600x = (x-1)(600+x) \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$600x = 600x + x^2 - 600 - x$$

$$x^2 - x - 600 = 0$$

De la forme : $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$

$b = -1$

$c = -600$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-600) = 1 + 2400 = 2401.$$

Or $2401 > 0$, donc $\Delta > 0$, donc cette équa° admet 2 sol° :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-\sqrt{2401}}{2} = \frac{1-49}{2} = \frac{-48}{2} = -24 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+49}{2} = \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{-24 ; 25\}$

Or x est un nb entier naturel.
Donc on exclut la valeur -24.
Par suite, il y avait 25 bus au départ.

D- Somme et produit des racines

Propriété

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si f a deux racines distinctes, notées x_1 et x_2, alors, en notant S la somme de ces deux racines, et P leur produit, on a : ↳ $\Delta > 0$

$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Preuve :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$.

$P = x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta}) \times (-b+\sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Quelle peut bien être l'utilité de cette propriété ?

En pratique, il arrive fréquemment qu'on ***trouve mentalement une des racines*** d'un polynôme du second degré. Une telle racine est appelée ***racine évidente***.

En utilisant au choix, l'expression donnant la somme ou le produit des racines, on déduit facilement l'autre, sans avoir à calculer Δ.

Exemple

1) Soit $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Trouver mentalement une racine évidente de f, et en déduire son autre racine.

2) Trouver mentalement une solution de l'équation : $x^2 - 2022x = 2023$, puis en déduire son autre solution.

1) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f(1) = 3 - 2 - 1 = 0$, donc $x_1 = 1$ est une racine évidente.

Soit x_2 l'autre racine : on sait que : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ avec $a = 3$; $b = -2$; $c = -1$.

$1 \times x_2 = \frac{-1}{3}$

$x_2 = \frac{-1}{3}$. Donc $S = \left\{1 ; \frac{-1}{3}\right\}$

2) $f(-1) = (-1)^2 - 2022 \times (-1) = 1 + 2022 = 2023$, donc $x_1 = -1$ est une racine évidente.

Soit x_2 l'autre racine : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ avec $a = 1$; $b = -2022$; $c = -2023$.

car $\Rightarrow x^2 - 2022x - 2023 = 0$

$-1 \times x_2 = \frac{-2023}{1}$

$x_2 = 2023$ Donc $S = \{-1 ; 2023\}$

E - Interprétation graphique et équations du second degré

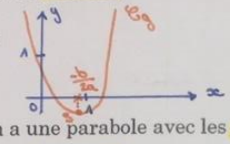
Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$.

La courbe représentative de f, notée C_f est appelée une **PARABOLE** dont le sommet S a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ (et qui admet comme axe de symétrie la droite verticale d'équation : $x = -\dfrac{b}{2a}$).

On admet, dans ce paragraphe, que :

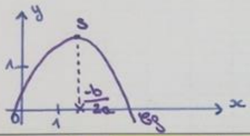
Si $a > 0$, on a une parabole avec les branches tournées vers le haut, c'est-à-dire une courbe ayant la forme suivante (convexe) :

Illustration :



Si $a < 0$, on a une parabole avec les branches tournées vers le bas, c'est-à-dire une courbe ayant la forme suivante (concave) :

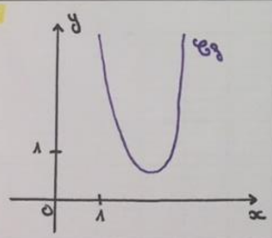
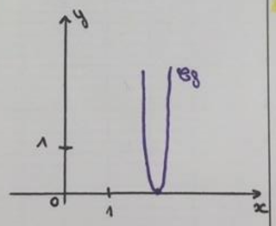
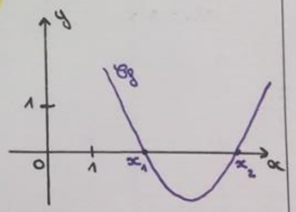
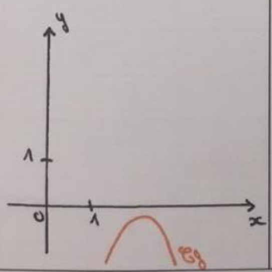
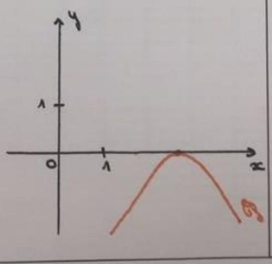
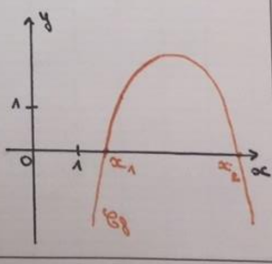
Illustration :



Les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

$f(x) = ax^2 + bx + c.$

Complétons alors le tableau récapitulatif suivant :

$\Delta < 0$ donc $f(x)=0$ n'a pas de solution	$\Delta = 0$ $f(x)=0$ a une unique solution	$\Delta > 0$ $f(x)=0$ admet deux solutions
$a > 0$ 	$a>0$ 	$a>0$ 
$a<0$ 	$a<0$ 	$a<0$ 

III – Sens de variation des fonctions polynômes du second degré

On va justifier le résultat utilisé au paragraphe précédent, concernant l'orientation des branches de la parabole.

Rappelons à toutes fins utiles le sens de variation de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$: (définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$)

- la fonction carrée décroit sur $]-\infty ; 0]$.
- la fonction carrée croit sur $[0 ; +\infty[$.

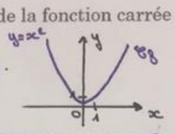


Tableau de variation de la fonction carrée :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Commençons par l'étude d'un exemple concernant le sens de variation des fonctions polynômes du second degré.

Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

a) Donner la forme canonique de f.

b) Etudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles : $]-\infty ; 3]$ et $[3 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^2 - 6x + 5$

a) $f(x) = x^2 - 2 \times 3 \times x + 5 + 3^2 - 3^2 = (x-3)^2 - 3^2 + 5 = (x-3)^2 - 4$.

b) <u>Rappel</u> : Soit une fonction f est dite croissante sur $\mathbb{R}$ lorsque : pr tt réels u et v, [si $u \leq v$, alors $f(u) \leq f(v)$].
de m̂ f est dite décroissante sur $\mathbb{R}$ lorsque : pr tt réels u et v [si $u \leq v$, alors $f(u) \geq f(v)$].

Ici $f(x) = (x-3)^2 - 4$

Etude du sens de variation de f sur $]-\infty ; 3]$:

Soit u et v deux réels appartenant à $]-\infty ; 3]$.
Supposons que $u \leq v \leq 3$. But : comparons $f(u)$ et $f(v)$.

Schéma d'étapes :

$$x \xrightarrow[*]{-3} x-3 \xrightarrow[**]{^2} (x-3)^2 \xrightarrow[***]{-4} (x-3)^2-4$$

$u \leqslant v \leqslant 3$

Donc $u-3 \leqslant v-3 \leqslant 3-3$

$u-3 \leqslant v-3 \leqslant 0$

$(u-3)^2 \geqslant (v-3)^2$ car la fonction carrée décroît sur $]-\infty ; 0]$.

$(u-3)^2-4 \geqslant (v-3)^2-4$

Donc : $f(u) \geqslant f(v)$: Donc f est décroissante sur $]-\infty ; 3]$.

Etude du sens de variation de f sur $[3 ; +\infty[$ tels que :

$3 \leqslant u \leqslant v$. But : comparer $f(u)$ et $f(v)$.

D'après * $3-3 \leqslant u-3 \leqslant v-3$

$0 \leqslant u-3 \leqslant v-3$

Donc d'après ** $0^2 \leqslant (u-3)^2 \leqslant (v-3)^2$

D'après *** $(u-3)^2-4 \leqslant (v-3)^2-4$

$f(u) \leqslant f(v)$

Donc f croît sur $[3 ; +\infty[$

c)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

$f(3) = -4$

Théorème (sens de variation d'une fonction du second degré). Le sens de variation de la fonction $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a. <u>Rappel</u> : F.C. est : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	β	$\nearrow$

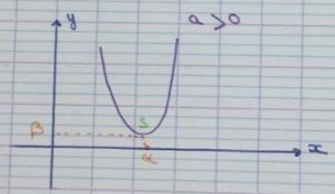
Si $a < 0$

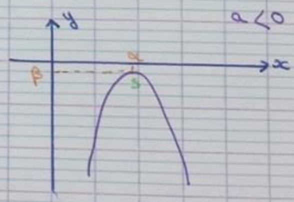
x	$-\infty$	α	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$	β	$\searrow$

Démonstration. On sait que toute fonction du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ s'écrit sous sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Supposons $a > 0$.
Considérons deux réels x et x' tels que $x < x' \leq \alpha$. Il vient donc $x - \alpha < x' - \alpha \leq 0$ et comme $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ on a

$$(x - \alpha)^2 > (x' - \alpha)^2.$$

On a donc $a(x - \alpha)^2 > a(x' - \alpha)^2$ puis $f(x) > f(x')$ en ajoutant β. Cela montre que f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$.
Considérons maintenant deux réels x et x' tels que $\alpha \leq x \leq x'$. On a $0 \leq x - \alpha < x' - \alpha$ et donc $(x - \alpha)^2 < (x' - \alpha)^2$ puisque $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
En multipliant par $a > 0$ puis en ajoutant β on conclut donc que $f(x) < f(x')$, ce qui traduit que f est croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
Pour $a < 0$, les inégalités sont inversées puisque la multiplication par un nombre négatif d'une inégalité change son sens. ■





Exercice 12

Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2+x-1$.

$f(x) = -x^2 + x - 1$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a=-1$; $b=1$; $c=-1$

$a=-1$, donc $a<0$

Or $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

Par théorème :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$-\frac{3}{4}$	↘	

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$

Rq : Le sommet de C_f est le point S avec $S\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4}\right)$.

α : abscisse du chgt de sens de varia° !

Exercice 13

Trouver pour chacun des tableaux de variation suivants, une expression algébrique des fonctions polynômes du second degré correspondantes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de f		↘	-2	↗	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
variations de g		↗	-1	↘	

$g(x) = a(x-3)^2 - 1$ avec $a<0$.

f est une fonc° trinôme. Donc pour $\forall$ réel x :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Trouver a, b, c :

Ici $a>0$! et (tableau) : $\alpha = 1 = \frac{-b}{2a}$ ou encore : $b = -2a$

Or la F.C. de f est : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec : $\alpha = 1$

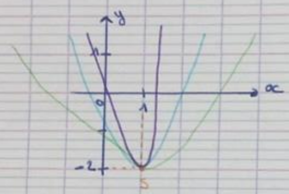
$\beta = -2$.

Donc : $f(x) = a(x-1)^2 - 2$ avec $a > 0$.

$f(x) = a(x^2 - 2x + 1) - 2$

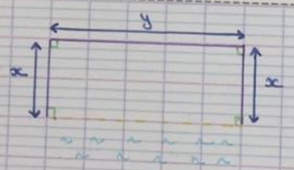
$f(x) = ax^2 - 2ax + a - 2$ avec $a > 0$.

Par exemple : $a = 1$ et $f(x) = x^2 - 2x - 1$



Exercice 14

Un éleveur de bovins désire enclore un terrain rectangulaire bordant une rivière rectiligne. Il dispose de 1000 m de fil et ne veut pas enclore le côté longeant la rivière, car ses bovins ne savent pas nager. Calculer la surface maximale qu'il peut créer.



Soit y la longueur et x sa largeur. Rq : $0 \leq x \leq 500$ ⇒ bon sens

Contrainte de fil : $y + 2x = 1000$ donc $y = 1000 - 2x$

$y = -2x + 1000$

Soit f la fonction donnant l'aire de l'enclos à boeufs :

$f(x) = x \times (-2x + 1000)$ (longueur × largeur = Aire rectangle)

$f(x) = -2x^2 + 1000x$ avec $0 \leq x \leq 500$

↳ fonc° trinôme avec : $a = -2$; $b = 1000$ et ($c = 0$).

Etudions le sens de variation de f sur $[0, 500]$:

$a < 0$ et $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1000}{-4} = 250$.

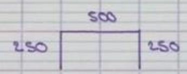
Donc par propriété :

x	0	250	500
$f(x)$	0 ↗	125000	↘ 0

$f(250) = -2 \times 250^2 + 1000 \times 250 = 125000$

f admet un maximum sur $[0; 500]$ atteint lorsque $x = 250$.

Conclusion :



Le fermier doit de construire un enclos rectangulaire de 250 m de large et de 500 m de long pr que ses boeufs disposent de la + grande surface possible (125 000 m²).

Exercice 15

Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal?

Soit x le nb de poiriers supplémentaire plantés par rapport aux 60 du champs :

But : Estimer le nb total de poires en fonction de x !

Il y aura $60 + x$ arbres, et chacun d'eux produira alors $480 - 5x$ poires.

Soit $f(x)$ le nb total de poires produites :

$f(x) = (x + 60)(-5x + 480)$

Contraintes sur x : $0 \leqslant x$ et $480 - 5x \geqslant 0$

$480 \geqslant 5x$

$5x \geqslant 480$

$x \geqslant \frac{480}{5}$

$x \geqslant 96$

Bref : $0 \leqslant x \leqslant 96$.

Et $f(x) = (x+60)(-5x+480)$

$f(x) = -5x^2 + 480x - 300x + 28800$

$f(x) = -5x^2 + 180x + 28800$

↳ De la forme : $ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$; $b = 180$ et $C = 28800$

Etudions le sens de variation de f sur $[0 ; 96]$:

$a < 0$ et $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-180}{-10} = 18$

x	0	18	96
$f(x)$	28800 ↗	30420	↘ 0

$f(18) = 30420$

$f(96) = 0$

f admet donc un maximum sur $[0 ; 96]$, atteint lorsque $x = 18$.

Conclusion : Le fermier doit donc planter 18 poiriers supplémentaires (donc au total un champ de $60 + 18 = 78$ poiriers) pour avoir un rendement maximal (30420 poires).

IV – Factorisation des fonctions trinômes et inéquations du second degré

1-Factorisation des polynômes du second degré

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$, alors on a la factorisation suivante :

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les racines de ce polynôme.

Si $\Delta = 0$, alors on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine de ce polynôme. $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas factoriser $f(x)$ en produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.

Preuve :

Là encore, c'est la forme canonique la clé de tout : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Rappelons que comme vu à la preuve du théorème du paragraphe II-C.

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}].$$

Si $\Delta > 0$, on se souvient de l'astuce : $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ de sorte que :

$$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

astuce : $+\omega = -(-\omega)$

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$$

Bref : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 = a(x - x_0)^2$ où $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Enfin, si $\Delta < 0$, imaginons un instant que l'on puisse factoriser $f(x)$ en un produit de facteurs du premier degré de la forme : $f(x) = (ux + v)(wx + z)$. D'après le théorème du produit nul, $f(x) = 0$ aurait au moins une solution, en contradiction avec le fait que $\Delta < 0$!

Remarque : la connaissance des éventuelles racines de f permet une factorisation mentale de ce polynôme du second degré.

Exercice 17

Factoriser, lorsque cela est possible, les fonctions trinômes suivantes :

$f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ $\quad g(x) = 18x^2 - 12x + 2$ $\quad h(x) = 3x^2 - 2x + 2$

$f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ avec $a = -2$; $b = 5$; $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25 + 24 = 49 = 7^2$

Donc $\Delta > 0$, donc ce trinôme a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{-4} = \dfrac{-12}{-4} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{-4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'après le cours, on a la factorisa° suivante :

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = -2$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Bref : $f(x) = -2(x-3)\left(x - \left(\frac{-1}{2}\right)\right)$

$f(x) = -2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$g(x) = 18x^2 - 12x + 2$ avec $a = 18$; $b = -12$ et $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 = 4 \times 18 \times 2 = 144 - 144 = 0$

g admet une unique racine : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

Donc $g(x) = a(x - x_0)^2 = 18\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

$h(x) = 3x^2 - 2x + 2$ avec $a = 3$; $b = -2$; $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 4 - 24 = -20$.

$\Delta < 0$ donc $h(x)$ ne se factorise pas en produit de facteurs du 1er degré.

Exercice 18

a) Déterminer la forme développée de la fonction polynôme f du second degré telle que : $f(2) = 0$; $f(-1) = 0$ et $f(0) = -2$.

b) Même question avec la fonction polynôme du second degré g qui admet 4 comme unique racine, et telle que $g(2) = 5$.

a) f : trinôme avec $\underbrace{f(2)=0}_{*}$; $\underbrace{f(-1)=0}_{**}$ et $f(0) = -2$.

↳ $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On cherche ici les valeurs des réels a, b et c.

* et ** nous disent que : les réels 2 et -1 sont les racines de f : $x_1 = 2$ et $x_2 =$

Donc : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a(x-2)(x-(-1))$

$f(x) = a(x-2)(x+1)$

Or $f(0) = -2$ donc $a(0-2)(0+1) = -2$

$-2a = -2$

$a = \frac{-2}{-2} = 1$

Par suite : $f(x) = 1(x-2)(x+1) = (x-2)(x+1)$

$f(x) = x^2 + x - 2x - 2$

$f(x) = x^2 - x - 2$

Nous allons généraliser ce qui a été fait dans l'exemple d'introduction et voir que le signe d'un polynôme du second degré dépend à la fois du signe du nombre a et de celui de Δ.

Propriété

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

Si $\Delta > 0$, f a deux racines distinctes x_1 et x_2, et on peut toujours supposer sans perte de généralité, que $x_1 < x_2$.

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x) = ax^2+bx+c$		M̂ signe que a	0	Signe contraire de a	0	M̂ signe que a	

Si $\Delta = 0$, f a pour unique racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$……, donc pour tout réel $x \neq x_0$, $f(x)$ est du même signe que le réel a.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x) = ax^2+bx+c$		M̂ signe que a	0	M̂ signe que a	

Si $\Delta < 0$, alors, pour tout réel x, $f(x)$ a le même signe que le réel a.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x) = ax^2+bx+c$		M̂ signe que a	

Preuve : $\Delta > 0$ et x_1 et x_2 st les racines du trinôme.

On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$ se factorise alors : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

À l'aide d'un tableau de signes, déterminons le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de a		Signe de a		Signe de a		Signe de a	
Signe de $x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\underbrace{a(x-x_1)(x-x_2)}_{ax^2+bx+c}$		Signe de a	0	Signe contraire de a	0	Signe de a	

$x - x_1 \geqslant 0$

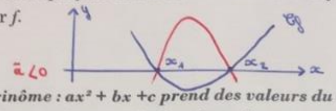
$x \geqslant x_1$

$x - x_2 \geqslant 0$

$x \geqslant x_2$

Comment retrouver graphiquement cette propriété ?

En construisant l'allure de C_f et en plaçant les éventuelles racines de f, puis en lisant graphiquement le signe des valeurs prises par f.



x	$-\infty$		x_1		x_2		$-\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

On peut aussi retenir que le trinôme : $ax^2 + bx + c$ prend des valeurs du même signe que le nombre a lorsque x n'appartient pas à l'éventuel intervalle formé par les racines de ce trinôme.

Exercice 19

1) Donner le tableau de signes des fonctions f et g suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$; *b)* $g(x) = x^2 + x + 9$

2) En déduire l'ensemble de solution des inéquations : $f(x) \geq 0$, puis $g(x) < 0$.

1) a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

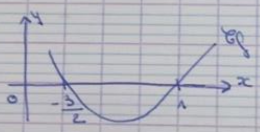
Ici $a = 2$; $b = 1$ et $c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$\Delta > 0$, donc f a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{4} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{4} = 1 \end{cases}$$

$a > 0$



Donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f(x) = 2x^2 + x - 3$		+	0	−	0	+	

2) $f(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{-3}{2}$ ou $x \geq 1$ d'après le tableau de signes précédent.

$\mathcal{S} =]-\infty ; \frac{-3}{2}] \cup [1 ; +\infty[$.

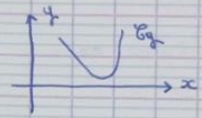
b) $g(x) = x^2 + x + 9$

Ici $a = 1$; $b = 1$ et $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 9 = 1 - 36 = -35.$

$\Delta < 0$, dc $g(x)$ a le m̂ signe que $a = 1$, à savoir positif, pour tout réel x.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g(x) = x^2 + x + 9$	$+$



2) $g(x) < 0$: $\mathcal{S} = \emptyset$

C- Résolution d'inéquations du second degré

La connaissance du signe des valeurs prises par une fonction trinôme permet très facilement de résoudre des inéquations du second degré de la forme : $ax^2+bx+c \geq 0$, ou encore avec l'un des trois autres symboles >0 ; ≤ 0 ; <0.

Exercice 20 ***(fondamental)***

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $4x^2 - 3x - 1 \geqslant 0$ $\qquad$ *b)* $-5x^2 + 2x - 3 < 0$

2) Déterminer mentalement l'ensemble des solutions de l'inéquation : $3(x+2)(x-6) \leq 0$.

1) a) $4x^2 - 3x - 1 \geqslant 0$ avec $a = 4$; $b = -3$ et $c = -1$.

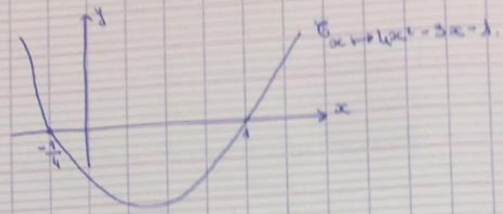
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 9 + 16 = 25.$

$\Delta > 0$, donc ce trinôme a 2 sol° :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{8} = \dfrac{-2}{8} = \dfrac{-1}{4}$

$x_2 = -b + \sqrt{\Delta} \quad 3+5 \quad 8 \quad 1$

Ici $a > 0$ (car $a = 4$).



Donc on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
Signe de $4x^2-3x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Grâce à ce tableau de signes :

$4x^2 - 3x - 1 \geqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{1}{4}$ ou $x \geqslant 1$.

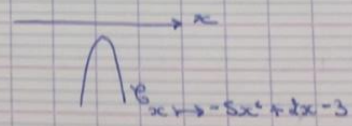
$S = \left]-\infty ; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[$.

b) $-5x^2 + 2x - 3 < 0$

Trinôme avec $a = -5$; $b = 2$ et $c = -3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-5) \times (-3) = 4 - 60 = -56$

$a < 0$



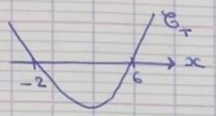
Donc pour tout réel x : $-5x^2 + 2x - 3 < 0$.

$S = \left]-\infty ; +\infty\right[= \mathbb{R}$.

2) $3(x+2)(x-6) \leqslant 0$ $\qquad T(x) = 3(x+2)(x-6)$

Ce trinôme a pr racine : $x_1 = -2$ et $x_2 = 6$.

Ici $a = 3$, donc $a > 0$.



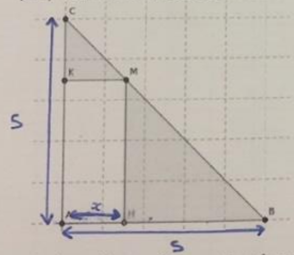
x	$-\infty$ -2 6 $+\infty$
Signe de $T(x) = 3(x+2)(x-6)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Donc $3(x+2)(x-6) \leqslant 0 \iff -2 \leqslant x \leqslant 6$.

$\mathcal{S} = [-2;6]$.

Exercice 21

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que AB=AC=5 cm. H est un point du segment [AB] tel que AH=x. AHMK est un rectangle tel que le montre la figure.



1. A quel intervalle appartient le nombre x.

2. Montrer que l'aire du domaine colorié vaut $x^2 - 5x + \frac{25}{2}$.

3. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle inférieure à 8 cm^2.

1) $H \in [AB]$, donc $AH \leqslant AB$

Donc : $0 \leqslant x \leqslant 5$

Donc $x \in [0;5]$

2) Soit $f(x)$ l'aire coloré en rouge :

$$f(x) = \text{Aire }(KMC) + \text{Aire }(HBM)$$
$$f(x) = \frac{KM \times KC}{2} + \frac{HB \times HM}{2}$$

avec : $KM = x$ ($KM = AH = x$, 2 opposés d'un rectangle)
$KC = KM = x$ (car KMC est isolé en K, c'est une réduc du triangle ABC)

$HB = 5 - x$
$HM = HB = 5 - x$

Par suite : $f(x) = \frac{x \times x}{2} = \frac{(5-x)(5-x)}{2} \rightarrow (5-x)^2$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{25 - 2 \times 5 \times x + x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 25 - 10x + x^2}{2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 10x + 25}{2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{2} - \frac{10x}{2} + \frac{25}{2}$$

$$f(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{2}$$

3) On cherche les réels x appartenant à $[0; 5]$, pour lesquels : $f(x) \leq 8$

Donc : $x^2 - 5x + \frac{25}{2} \leq 8$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{2} - 8 \leq 0$$

$$x^2 - 5x + 4,5 \leq 0$$

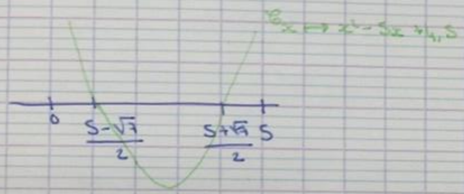
Ici $a = 1$; $b = -5$ et $c = 4{,}5$.

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4{,}5 = 25 - 18 = 7$

Donc $\Delta > 0$, dc ce trinôme a 2 sol° :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{2} \quad (\approx 1{,}18) \\ x_2 = \dfrac{5+\sqrt{7}}{2} \quad (\approx 3{,}8) \end{cases}$$

$a = 1$, dc $a > 0$



Donc

x	0	$\frac{5-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{7}}{2}$	5
Signe de $x^2 - 5x + 4{,}5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $x^2 - 5x + 4{,}5 \leqslant 0 \iff \dfrac{5-\sqrt{7}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$

Donc $\mathscr{S} = \left[\dfrac{5-\sqrt{7}}{2} ; \dfrac{5+\sqrt{7}}{2}\right]$.

Donc si $\dfrac{5-\sqrt{7}}{2} \leqslant AH \leqslant \dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$, alors l'aire achurée est inférieure à $8\,cm^2$

Exercice 21

1) Démontrer que les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2 + x + 1$, et $g(x) = 3x - 8$ n'ont aucun point en commun.
2) Etudier la position relative de ces deux courbes.

1) Résolvons l'équa° : $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \iff 2x^2 + x + 1 = 3x - 8$

$\iff 2x^2 + x + 1 - 3x + 8 = 0$

$f(x) = g(x) \iff 2x^2 - 2x + 9 = 0$

$a = 2$; $b = -2$ et $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 4 - 72 = -68$.

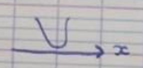
$\Delta < 0$, donc $S = \emptyset$.

Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ n'ont aucun point en commun.

2) Rappel : étudier la posi° relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ revient à résoudre l'inéqua° : $f(x) > g(x)$

Or $f(x) > g(x) \iff 2x^2 + x + 1 \geqslant 3x - 8$

$f(x) > g(x) \iff 2x^2 - 2x + 9 \geqslant 0$



$\Delta < 0$, donc :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $2x^2 - 2x + 9$	+

Donc pour tout réel x : $2x^2 - 2x + 9 \geqslant 0$, donc $f(x) > g(x)$

Donc $\mathcal{C}_f$ est entièrement située au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Exercice I **Exercices supplémentaires au chapitre I**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\frac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}>0$; $\frac{x-3}{-x+1} \geq -5x+3$.

$$\frac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} > 0$$

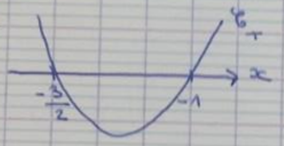
On étudie le signe des binômes : $2x^2+5x+3$; x^2+x-2.
Puis à l'aide d'un tableau de signe, on trouve celui de $\frac{2x^2+5x+\dots}{x^2+x-\dots}$

$T(x) = 2x^2+5x+3$

$x_1 = -1$ est une racine évidente de ce binôme $T(x)$.
Donc la seconde racine x_2 vérifie : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$-1 \times x_2 = \frac{3}{2}$

$a = 2$

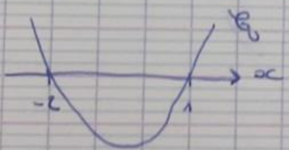


$x_2 = -\frac{3}{2}$

$U(x) = x^2+x-2$

$x_1 = 1$ est une racine évidente de U dc on a : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$a < 0$



$1 \times x_2 = -\frac{2}{1}$

$x_2 = -2$

→ voir tableau

x	$-\infty$		-2		$\frac{-3}{2}$		-1		1		$+\infty$
Signe de $2x^2+5x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de x^2+x-2		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Conclu° : $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} > 0 \iff x < -2$ ou $\frac{-3}{2} < x < -1$.

$S =]-\infty ; -2[\cup]\frac{-3}{2} ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\frac{x-3}{-x+1} \geqslant -5x+3$$

$$\frac{x-3}{-x+1} + \frac{5x-3}{1} \geqslant 0$$

$$\frac{x-3}{-x+1} + \frac{(5x-3)(-x+1)}{-x+1} \geqslant 0$$

$$\frac{x-3+(5x-3)(-x+1)}{-x+1} \geqslant 0$$

$$\frac{x-3+(-5x^2)+5x+3x-3}{-x+1} \geqslant 0$$

$$\frac{-5x^2+9x-6}{-x+1} \geqslant 0$$

On va donc faire un tableau de signes :
Etude du signe de : $-5x^2+9x-6$. Ici $a=5$; $b=9$; $c=-6$
$\Delta = b^2-4ac = 9^2-4\times(-5)\times(-6) = 81-120 = -39$
Ici $\Delta < 0$, donc ce trinôme a m̂ signe que $a=-5$, à savoir négatif pour tout réel x.

Etude de signe de $-x+1$: $-x+1 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant x \iff x \leqslant 1$.

D'où :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $-5x^2+9x-6$	$-$		$-$
Signe de $-x+1$	$+$	0	$-$
Signe de $\dfrac{-5x^2+9x-6}{-x+1}$	$-$	‖	$+$

Donc $\mathcal{S} =]1; +\infty[$.

Exercice II

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx^2+4x+2(m-1)$.
Déterminer l'ensemble des réels m tels que l'inéquation $f(x) < 0$ admette pour solution $\mathbb{R}$.

$f(x) = mx^2 + 4x + 2(m-1)$

But : $f(x) < 0$ ait pour solution $\mathbb{R}$

Pour $m \neq 0$, $f(x)$ est un trinôme

$\Delta < 0$ et $m < 0$

Or $\Delta = 4^2 - 4m \times 2(m-1)$

$\Delta = 16 - 8m^2 + 8m$

Donc résoudre : $-8m^2 + 8m + 16 < 0$

et $m < 0$!...

Exercice III

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

⚠ Ce n'est pas une équa° du second degré !

Je pose $y = x^2$

L'équa° $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ s'écrit alors : $(x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0$

Donc $y^2 - 5y + 4 = 0$

qui a pour racines évidentes : 1 et 4.

Or $y = x^2$ et $y = 1$ ou $y = 4$.

Donc $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$

Donc : $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$.

$\mathcal{S} = \{-1 ; 1 ; -2 ; 2\}$.