
BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Session Blanche _ mardi 13 février 2024
Lycée Alphonse BENOIT – L'Isle-sur-la-Sorgue

Spécialité Mathématiques
Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 16

SUJET

L'usage de la calculatrice en mode examen uniquement est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.



Vous rédigerez sur :
Une copie pour l'exercice 1
Une autre copie pour les exercices 2 et 3
Et enfin une autre copie pour l'exercice 4

Exercice 1 –

6 points

- **PARTIE A** :

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par : $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

- Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
- Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
- Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
- Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

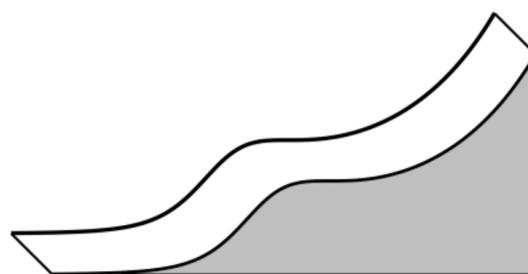
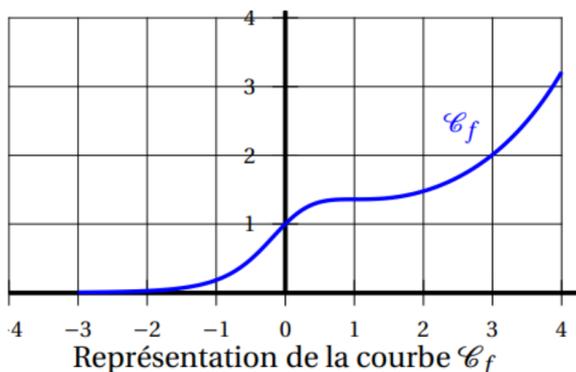
- **PARTIE B** :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe représentative C_f de f dans un repère.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Calculer l'expression de la dérivée de f .
- Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- Combien de tangentes horizontales admet la courbe C_f de f ? On précisera en quelle(s) abscisse(s) on a ces tangentes horizontales.

- **PARTIE C** :

On s'intéresse à présent à la partie de la courbe C_f de f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe C_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Vue de profil du toboggan

- D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
- On admet que la fonction f'' , dérivée seconde la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 4]$, $f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la partie A.
En utilisant cette expression de $f''(x)$, répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations » ? Justifier.

Exercice 2 –**4 points****PARTIE A :**

La partie A de cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée dans la partie A.

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère :

- les points $A(2 ; 5 ; 4)$; $B(4 ; 1 ; -2)$ et $C(7 ; -1 ; 6)$;
- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 15 + 6t \\ z = 19 - 4t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 :

Les points A, B et D sont alignés lorsque les coordonnées de D sont :

a) $D(2 ; 8 ; 7)$	b) $D(3 ; 3 ; 1)$	c) $D(5 ; 3 ; -2)$	d) $D(22 ; -35 ; 10)$
-------------------	-------------------	--------------------	-----------------------

Question 2 :

On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées du point E sont :

a) $E(12 ; -16 ; -2)$	b) $E(11 ; -9 ; -6)$	c) $E(14 ; -11 ; 2)$	d) $E(2 ; 8 ; 7)$
-----------------------	----------------------	----------------------	-------------------

Question 3 :

Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite d ?

a) $M_1(5 ; 39 ; 2)$	b) $M_2(0 ; 2 ; 8)$	c) $M_3(-2 ; 16 ; 17)$	d) $M_4(7 ; 45 ; -1)$
----------------------	---------------------	------------------------	-----------------------

Question 4 :

\vec{u} est un vecteur directeur de la droite d lorsque les coordonnées de \vec{u} sont :

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$	b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 19 \end{pmatrix}$	c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	d) $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}$
--	---	---	---

Question 5 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a) $\begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 5 - 4t' \\ z = 4 + 5t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$	b) $\begin{cases} x = 4 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = -2 + 3t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$	c) $\begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 5 - 4t' \\ z = 3 - 6t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$	d) $\begin{cases} x = 4 + 3t' \\ y = 1 - t' \\ z = -2 + 2t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$
---	---	---	---

Question 6 :

Les droites d et (AB) sont :

a) sécantes	b) strictement parallèles	c) confondues	d) non coplanaires
-------------	---------------------------	---------------	--------------------

PARTIE B :

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point dans la partie B.

Question 7 :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Affirmation 1 : L'expression de la fonction dérivée de f est $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$.

Question 8 :

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (2x^2 - 5x + 3)e^{-x^2}$.

Affirmation 2 :

La courbe représentative de la fonction g coupe exactement deux fois l'axe des abscisses.

Exercice 3 –

5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux
- Les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A et B sont indépendantes.

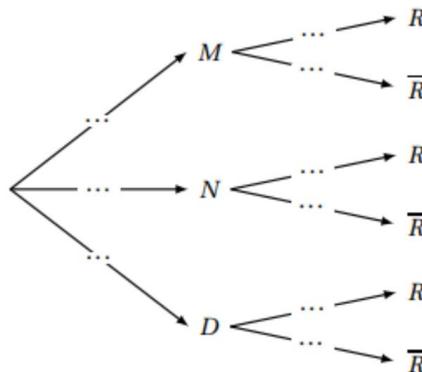
• PARTIE A :

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les événements suivants :

- M : « le déchet prélevé est minéral et non dangereux »
- N : « le déchet prélevé est non minéral et non dangereux »
- D : « le déchet prélevé est dangereux »
- R : « le déchet prélevé est recyclable ».

On note \bar{R} l'événement contraire de l'événement R .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité $P(M \cap \bar{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'événement R est $P(R) = 0,6514$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

• **PARTIE B :**

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

- a) Quelle est la loi suivie par X ? A justifier.
- b) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- b) Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*
- c) Calculer $P(X \geq 10)$. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

- a) Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
- b) Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Soit la suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1.
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
 - b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$.
 - c) En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
 - c) En déduire que la suite (T_n) est convergente. A justifier.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = T_n - 20$.
 - a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
 - c) Calculer la limite de la suite (T_n) .

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C . La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.
 - a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2.c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
 - b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temps(x):
    T=180
    n=0
    while T>x:
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temps(120)`. Justifier sa réponse.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.