BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Session Blanche Février 2022
Lycée Alphonse BENOIT – L'Isle-sur-la-Sorgue

Spécialité Mathématiques
Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 16

SUJET

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l’indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu’il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation des copies.

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Vous traiterez les exercices 1 et 2 sur la même copie.

Chacun des exercices 3 et 4 sera à traiter sur des copies différentes.

Exercice 1 – 5 points

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test);
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé?
   b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.
   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Exercice 2 – 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse, une réponse multiple, ou l'absence de réponse à une question ne rapporte aucun point.
Reporter sur sa copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), on considère les points *A*(2 ; -2 ; 3), *B*(0 ; 2 ; 5), *C*(-1 ; 0 ; 4) et *D*(-2 ; 6 ; 1), et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Une représentation paramétrique de la droite *(AB)* est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2.

Réponse A : Les points *A*, *B* et *C* sont alignés.

Réponse B : *ABCD* est un parallélogramme.

Réponse C : Les points *A*, *B*, *C* et *D* sont coplanaires.

Réponse D : Les points *A*, *B* et *D* définissent un unique plan.

3. Soit d la droite passant par le point *K* milieu de [*AB*] et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les droites Δ et d sont :

Réponse A : Non coplanaires **Réponse B :** Parallèles

Réponse C : Confondues **Réponse D :** Sécantes

4. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : *E*(-3 ; 9 ; 5) **Réponse B :** *F*(7 ; -6 ; 1)
Réponse C : *G*(1 ; 0 ; 3) **Réponse D :** *H*(1 ; 2 ; 4)

Exercice 3 – 6 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1}$, *et* C_f sa courbe représentative.

1) Calculer, en justifiant, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Interpréter graphiquement ces limites.

3) On admet que pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$, où f'' désigne la dérivée seconde de f.

Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, et déterminer le nombre de point d'inflexion de C_f.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1) Calculer, en justifiant : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2a) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel x : $g'(x) = -xe^x$.

2b) En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de g.

3a) Montrer en justifiant, que l'équation : $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que on la notera α.

3b) Donner un encadrement à 10^{-2} près de α en justifiant.

4) Démontrer que : $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

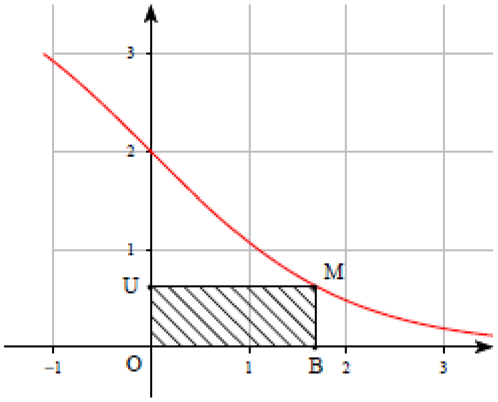
5) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de signes.

Partie C

On donne sur la page suivante la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé, où f est la fonction définie à la *partie A*.

Soit M un point appartenant à C_f, et x l'abscisse du point M.

B est le point appartenant à l'axe des abscisses qui a la même abscisse que M, et U est le point appartenant à l'axe des ordonnées qui a la même ordonnée que M.



0) Exprimer en fonction de x, les coordonnées des points M, B et U.

1) Soit $\mathcal{A}$ la fonction qui, à tout réel $x \geq 0$, associe l'aire du rectangle $OBMU$.

a) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

b) Démontrer que $\mathcal{A}'(x) = \dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$ où g est la fonction définie à la **partie B** et $\mathcal{A}'$ la dérivée de $\mathcal{A}$.

c) En déduire le sens de variation de $\mathcal{A}$ sur $[0;+\infty[$.

2) Montrer que l'aire du rectangle $OBMU$ est maximale lorsque M a pour abscisse α, où α est le réel défini à la **partie B**.

3) Démontrer que la tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse α et la droite (BU) sont parallèles.

Exercice 4 – 5 points

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+8}$.

- **PARTIE A : conjectures**

a) Calculer « à la main » u_1 et u_2. On donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies au dix-millième près.

b) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

```
def suite(n) :
    u=1
    for k in range(n) :
       u=u/(u+8)
    return(u)
```

1. Si on appelle `suite(4)` dans la console de Python, à quoi correspondra la valeur qui sera affichée en sortie ?
2. Donner cette valeur, arrondie à 10^{-4}près.

c) A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

d) A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

- **PARTIE B : étude générale**

a) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b) Etudier les variations de la suite (u_n).

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? A justifier.

- **PARTIE C : recherche d'une expression du terme général**

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8, et donner son premier terme.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$:

1. Justifier l'existence d'un tel entier n_0.

2. Recopier sur votre copie et compléter le programme ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la valeur attendue.

```
def seuil() :
    n=…
    u=…
    while u…:
       u=…
       n=
    return(…)
```

3. Déterminer la valeur de ce n_0.