Applications du produit scalaire

A - Relation d'Al-Kashi (ou relation de Pythagore généralisée)

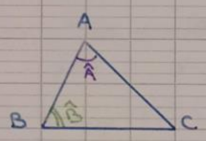
Pour tout triangle ABC, on a les relations suivantes :

① $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

② $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

③ $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$

Preuve :



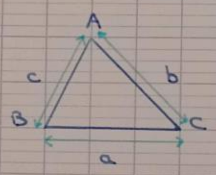
① $BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

De m̂ pour ② et ③.

La relation d'Al-Kashi s'appelle également la relaᵒ de Pythagore généralisé :

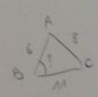


$a = BC$ Donc : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$

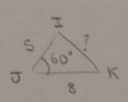
$b = AC$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\hat{B})$

$c = AB$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\hat{C})$

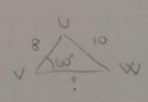
Applications



1) Soit ABC un triangle tel que AB $= 6\,cm$, AC $= 8\,cm$ et BC $= 11\,cm$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie à un degré près.



2) Soit IJK un triangle tel que IJ $= 5\,cm$, JK $= 8\,cm$ et $\widehat{IJK} = 60°$. Déterminer la longueur IK au mm près.



3) Soit UVW un triangle tel que : UV $= 8\,cm$; UW $= 10\,cm$ et $\widehat{UVW} = 60°$. Déterminer la longueur VW au mm près.

1) Al-Kashi donne :

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \times BC \times BA \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$8^2 = 11^2 + 6^2 - 2 \times 11 \times 6 \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$64 = 121 + 36 - 132 \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$64 = 157 - 132 \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$132 \cos(\widehat{ABC}) = 157 - 64 = 93$$
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{93}{132} = \frac{31}{44}$$

Donc $\widehat{ABC} \approx 45°$.

2) Al-Kashi donne :

$$IK^2 = IJ^2 + JK^2 - 2\, IJ \times JK \times \cos(\widehat{J})$$
$$IK^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos(60°) \quad \text{avec } 60° = \frac{\pi}{3} \text{ rad et } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$
$$IK^2 = 89 - 40 = 49$$
$$IK = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

3) D'après la rela° d'Al-Kashi :

$$UW^2 = UV^2 + VW^2 - 2 \times UV \times VW \times \cos(\widehat{V})$$
$$10^2 = 8^2 + VW^2 - 2 \times 8 \times VW \times \cos(60°)$$
$$100 = 64 + VW^2 - 8VW$$

Posons $x = VW$:
$$100 = 64 + x^2 - 8x$$
Donc $x^2 - 8x + 64 - 100 = 0$
$$x^2 - 8x - 34 = 0$$
↳ de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$; $b = -8$ et $c = -34$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times (-36) = 64 + 144 = 208.$$

Donc deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - \sqrt{208}}{2}$ $(\approx -3{,}2 < 0)$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + \sqrt{208}}{2} \quad (> 0)$$

Donc comme $x = VW$, $x > 0$.

Par suite : $VW = \frac{8+\sqrt{208}}{2} = \frac{8}{2} + \frac{\sqrt{208}}{2} = 4 + \frac{\sqrt{52 \times 4}}{2} = 4 + \sqrt{52}$

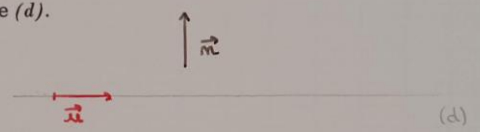
$VW = 4 + \sqrt{13}$ cm

$VW \approx 11,2$ cm.

B – Géométrie analytique

Définition : Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à une droite *(d)* s'il est non nul et s'il est orthogonal à un vecteur directeur de *(d)*.

Illustration :



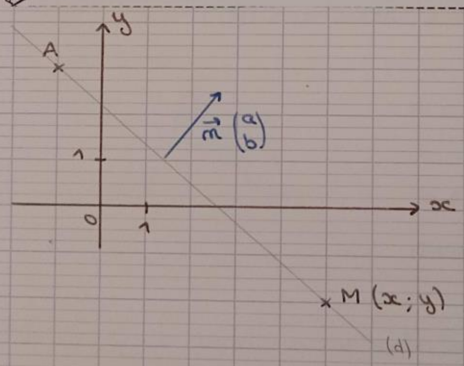
Propriété (équation normale d'une droite)

Soit $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\,)$ un repère orthonormé du plan, *(d)* une droite de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Alors une *équation cartésienne* de *(d)* est : $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, si a et b sont deux réels, non tous les deux nuls, l'équation : $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite dont un vecteur normal est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Preuve :



Soit $M(x;y) \in (d)$

(d) passe par deux points $A(v;w)$ } On a $\vec{AM} \perp \vec{n}$ de par la déf

Donc $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Or $\vec{AM}\begin{pmatrix} x-v \\ y-w \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Donc $xx' + yy' = 0$

$a(x - v) + b(y - w) = 0$

$ax - av + by - bw = 0$

$ax + by + c$ avec $c = -av - bw$

Donc $ax + by + c = 0$ est une équa° cartésienne de (d).

Exercice 0

Déterminer une équation de la droite (d) passant par $A(1;2)$ et ayant $\vec{n}(-4;1)$ comme vecteur normal.

$\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ est normal à (d).

Donc par propriété : (d) a pour équation : $-4x + 1y + c = 0$.

De plus, $A(1;2) \in (d)$ donc : $-4\times 1 + 1\times 2 + c = 0$

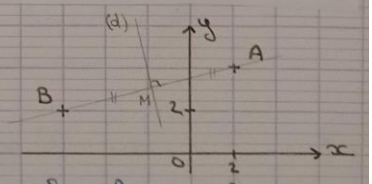
$-2 + c = 0$

$c = 2.$

Donc la droite a pour équation : $-4x + y + 2 = 0$.

Exemple 1

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé, $A(2 ; 4)$ et $B(-6 ; 2)$.
Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].



Soit M le milieu du segment [AB].
$\vec{AB}$ est normal à (d) par définition.

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6-2=-8\\2-4=-2\end{pmatrix}$ donc (d) a pour équation : $-8x - 2y + c = 0$.

$M\begin{pmatrix}\frac{2-6}{2} = -2\\ \frac{4+2}{2} = 3\end{pmatrix}$. Or $M \in (d)$ donc $-8\times(-2) - 2\times 3 + c = 0$

$10 + c = 0$

$c = -10.$

Donc (d) a pour équation : $-8x - 2y - 10 = 0$

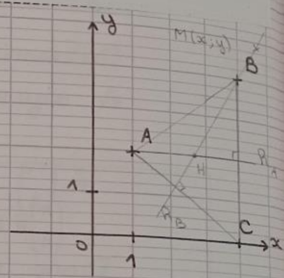
$8x + 2y + 10 = 0$

$4x + y + 5 = 0$.

Exemple 2

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormé, A(1 ; 2) ; B(4 ; 4) et C(4 ; 0).

1) Déterminer l'équation de la hauteur issue de A du triangle ABC.
2) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre Ω du triangle ABC.



1) h_A est "horizontale" et $y_A = 2$, $A \in h_A$
donc h_A a pour équation $y = 2$.

2) Soit h_B la hauteur issue de B du triangle ABC.
$\vec{AC}$ est un vecteur normal à h_B par déf° m̂ d'une hauteur.

Soit $M(x ; y)$;

$M(x;y) \in h_B \iff \vec{AC} \perp \vec{BM} \iff \vec{AC} \cdot \vec{BM} = 0$.

Or : $\vec{AC}\begin{pmatrix}4-1=3\\0-2=-2\end{pmatrix}$ et $\vec{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}$.

$M(x;y) \in h_B \iff xx' + yy' = 0 \iff 3(x-4) - 2(y-4) = 0$

$M(x;y) \in h_B \iff 3x - 12 - 2y + 8 = 0 \iff 3x - 2y - 4 = 0$.

Donc une équa° cartésienne de h_B est : $3x - 2y - 4 = 0$.

$\underline{M_2}$: Rappel : Si $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite (d) alors une équa° cartésienne est : $ax + by + c = 0$.

Ici : $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est normal à h_B.

Donc h_B a pr équa° : $3x + (-2)y + c = 0$

$3x - 2y + c = 0$

Enfin B(4;4), donc : $3x_B - 2y_B + c = 0$

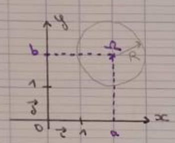
$3 \times 4 - 2 \times 4 + c = 0$

Propriété *(Equations cartésiennes d'un cercle)*

1) Soit $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ un repère orthonormé. Le cercle de centre $\Omega\,(a\,;\,b)$ et de rayon R a pour équation réduite :
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

2) Réciproquement, l'ensemble $\Lambda=\{M(x\,;y)\ /\ x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0\}$ est soit vide soit un cercle éventuellement réduit à son centre.

Preuve :



$\mathscr{C}$ = cercle de centre Ω et de rayon R.

1) $M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M=R$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$

Or $\Omega M^2=\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2=\overrightarrow{\Omega M}^2$ avec $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$.

Donc $\Omega M^2=(x-a)^2+(y-b)^2$.

Donc $M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

2) Λ : lambda majuscule

Soit $M(x;y)\in\Lambda$:

On a donc : $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0$

$x^2+2\alpha x+y^2+2\beta y+\gamma=0$

$x^2+2\alpha x+\alpha^2-\alpha^2+y^2+2\beta y+\beta^2-\beta^2+\gamma=0$

$(x+\alpha)^2-\alpha^2+(y+\beta)^2-\beta^2+\gamma=0$

$(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma$

Discution : - Si $\alpha^2+\beta^2-\gamma<0$: alors $\Lambda=\emptyset$

car $(x+\alpha)^2\geqslant 0$

$(y+\beta)^2\geqslant 0$, donc $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2\geqslant 0$.

$4+c=0$

$c=-4$.

Donc $\mathscr{H}_B$ a pour équation : $3x-2y-4=0$.

H est l'orthocentre de ABC donc $H(x;y)$ et $H\in\mathscr{H}_A$ et $H\in\mathscr{H}_B$.

Donc : $\begin{cases}y=2 & \to H\in\mathscr{H}_A\\3x-2y-4=0 & \to H\in\mathscr{H}_B\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\3x-2\times 2-4=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\x=\frac{8}{3}\end{cases}$

$H\left(\frac{8}{3}\,;2\right)$.

C – Equations cartésiennes de cercles

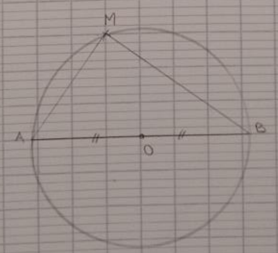
Théorème

Soient A et B deux points du plan.

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble de tous les points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Remarque et illustration : Ce théorème est une caractérisation du cercle de diamètre [AB].

Il signifie donc, d'une part, que si un point M est situé sur le cercle de diamètre [AB], alors le triangle MAB est rectangle en M, et que réciproquement, si un triangle est inscrit dans un cercle dont l'un des côtés en est un diamètre, alors ce triangle est rectangle.
Vous retrouvez ces propriétés abondamment vues en collège : notez l'efficacité et la concision de l'expression de ce théorème en utilisant le très performant outil produit scalaire !



b) $M(x;y)\in\Lambda_2 \iff 4x^2+4y^2+x-y+8=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff 4\left(x^2+y^2+\frac{x}{4}-\frac{y}{4}+2\right)=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff x^2+y^2+\frac{x}{4}-\frac{y}{4}+2=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff x^2+\frac{x}{4}+y^2-\frac{y}{4}+2=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff x^2+2\times\frac{x}{8}+y^2-2\times\frac{y}{8}+2=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff x^2+2\times x\times\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2+y^2-2\times y\times\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2+2=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff \left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2+2=0$

$M(x;y)\in\Lambda_2 \iff \left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2-2=\frac{1}{64}+\frac{1}{64}-2=\frac{1}{32}-2=-\frac{63}{32}$

Or $\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2\geq 0$ et $\frac{-63}{32}<0$.

Donc $\Lambda_2=\emptyset$.

Exercice 1

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB], avec A(4 ; 5) et B(-2 ; 7).

2) Vérifier que le point C(4 ; 7) appartient à ce cercle.

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à ce cercle en le point C.

4) Déterminer, suivant les valeurs du réel a, le nombre de points d'intersection de la droite (d) d'équation : $x=a$ et de ce cercle.

Soit Ω le centre du cercle de diamètre $[AB]$ et $\mathscr{C}$ le cercle.

1) $\underline{M_1}$: $M(x;y)\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ avec $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}4-x\\5-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-2-x\\7-y\end{pmatrix}$.

Donc $M(x;y)\in\mathscr{C} \iff (4-x)(-2-x)+(5-y)(7-y)=0$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \iff -8-4x+2x+x^2+35-5y-7y+y^2=0$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \iff x^2-2x+y^2-12y+27=0$

$M(x;y)\in\mathscr{C} \iff x^2+y^2-2x-12y+27=0$

$\underline{M_2}$: Ω centre du cercle $\mathscr{C}$ a pour coordonnées :

$\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$\Omega\,(1;6)$

- Si $\alpha^2+\beta^2-\gamma=0$ alors on a : $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=0$.

Or $(x+\alpha)^2\geq 0$ et $(y+\beta)^2\geq 0$.

Donc comme la somme est nulle on a :

$x+\alpha=0$ et $y+\beta=0$

$x=-\alpha$ et $y=-\beta$

Donc $\Lambda=\{P\}$ où $P(-\alpha;-\beta)$

Dans ce cas, Λ est un point.

- Si $\alpha^2+\beta^2-\gamma>0$ alors $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-\gamma=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}\right)^2$

On pose $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$, donc $(x-(-\alpha))^2+(y-(-\beta))^2=R^2$.

De la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ avec : $a=-\alpha$ et $b=-\beta$.

Donc d'après 1) : Λ est donc le cercle de centre $\Omega\,(-\alpha;-\beta)$ et de rayon $R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$.

Exemples : Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un repère orthonormé.

Déterminer la nature et les propriétés caractéristiques des ensembles suivants :

a) $\Lambda_1=\{M(x;y)\,/\,x^2+y^2-2x+y-6=0\}$ (tel que)

b) $\Lambda_2=\{M(x;y)/4x^2+4y^2+x-y+8=0\}$

---

a) $M(x;y)\in\Lambda_1 \iff x^2+y^2-2x+y-6=0$

$M(x;y)\in\Lambda_1 \iff x^2-2x+y^2+y-6=0$

$M(x;y)\in\Lambda_1 \iff x^2-2x+1^2-1^2+y^2+2\times\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-6$

$M(x;y)\in\Lambda_1 \iff (x-1)^2-1+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-6=0$

$M(x;y)\in\Lambda_1 \iff (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}+6=\frac{29}{4}$.

$M(x;y)\in\Lambda_1 \iff (x-1)^2+\left(y-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{29}{4}$: de la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

avec $a=1$; $b=-\frac{1}{2}$ et $R=\sqrt{\frac{29}{4}}$

$R=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Conclusion : Λ_1 est le cercle de centre $\Omega\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon : $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$. u.l.

$R = \frac{AB}{2}$ avec : $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$, donc $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-6)^2+2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Donc $R = \sqrt{10}$.

Donc $\mathscr{C}$ a pour équa° réduite : $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 10$.

Donc : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = 10$

$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$

2) Calculons :

$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27$

$4^2 + 7^2 - 2\times 4 - 12\times 7 + 27$

$16 + 49 - 8 - 84 + 27 = 0$

Donc $C(4;7)$ appartient à $\mathscr{C}$.

3) Rappel : La tangente en C au cercle $\mathscr{C}$ est la droite passant par le point C et $\perp$ au rayon $[\Omega C]$.

$\vec{\Omega C}$ est normal à $(\mathscr{T})$ de par la déf° de $(\mathscr{T})$.

Or $\vec{\Omega C}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, donc $(\mathscr{T})$ a pour équa° cartésienne : $3x + y + c = 0$

$C(4;7) \in \mathscr{T}$ donc : $3x_c + y_c + c = 0$

$3\times 4 + 7 + c = 0$

$12 + 7 + c = 0$

$c = -19$

Une équa° cartésienne de $\mathscr{T}$ est : $3x + y - 19 = 0$.

4)

$M(x;y) \in (d) \cap \mathscr{C} \iff \begin{cases} x = a \\ x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ a^2 + y^2 - 2a - 12y + 27 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = a \\ y^2 - 12y + a^2 - 2a + 27 = 0 \end{cases}$

Discution : $y^2 - 12y + a^2 - 2a + 27 = 0$

de la forme $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ avec $\alpha = 1$; $\beta = -12$ et $\gamma = a^2 - 2a + 27$

$\Delta(a) = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4\times(a^2 - 2a + 27) = 144 - 4a^2 + 8a - 108$

$\Delta(a) = -4a^2 + 8a + 36$

On a besoin de connaître le signe de $\Delta(a)$.

Résolvons par es l'inéqua° :

$\Delta(a) > 0 \iff -4a^2 + 8a + 36 > 0$

$4(-a^2 + 2a + 9) > 0 \iff -a^2 + 2a + 9 > 0$

$\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 9 = 40$.

$\Delta > 0$ donc ce trinôme a deux racines :

$a_1 = \frac{-2 - \sqrt{40}}{-2}$ et $a_2 = \frac{-2 + \sqrt{40}}{-2}$

$a_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{-2}$ et $a_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{-2}$

$a_1 = \frac{-2(1+\sqrt{10})}{-2} = 1 + \sqrt{10}$ et $a_2 = 1 - \sqrt{10}$

Donc :

a	$-\infty$		$1-\sqrt{10}$		$1+\sqrt{10}$		$+\infty$
Signe de $-a^2+2a+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : *) Si $a = 1 - \sqrt{10}$ ou $a = 1 + \sqrt{10}$, alors (d) et $(\mathscr{C})$ ont un seul point d'intersection

**) Si $a < 1 - \sqrt{10}$ ou $a > 1 + \sqrt{10}$: alors (d) et $(\mathscr{C})$ n'ont aucun point d'intersec°.

**) Si $1 - \sqrt{10} < a < 1 + \sqrt{10}$, alors (d) et $(\mathscr{C})$ ont 2 points d'interse…