Avant propos

Le but de ce chapitre est de construire une des fonctions mathématiques les plus importantes. Elle est en effet présente dans toutes les sciences.
Sa construction se fait à partir d'une équation différentielle.

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et théorèmes

Théorème 1 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et on la note : exp

Démonstration : L'existence de cette fonction est admise.
Montrons que cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est unique.

- **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$**

  Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.

  Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit :

  $$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \overset{f'=f}{=} f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

  Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

  On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction f ne peut s'annuler.

- **Unicité de la fonction exponentielle.**

  On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions :

  $$\begin{cases} f = f' \text{ et } f(0) = 1 \\ g' = g \text{ et } g(0) = 1 \end{cases}$$

  On pose $h = \dfrac{f}{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ car g ne s'annule pas.

  La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables :

  $$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

  La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

  On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$.

  On en déduit que $f = g$. La fonction exponentielle est unique.

1.2 Approche graphique : méthode d'Euler

Algorithme : Déterminer un algorithme permettant de visualiser la fonction exponentielle à partir de sa définition sur l'intervalle $[-a\,;\,a]$.

On utilise l'approximation affine en (x_0+p) (cf. chap. 4 : fonction dérivée) :

$$f(x_0+p) \approx f(x_0)+pf'(x_0) \overset{f'=f}{\Leftrightarrow} f(x_0+p) \approx f(x_0)+pf(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0+p) \approx f(x_0)(1+p)$$

L'approximation sera d'autant meilleure que p sera petit

On commence à tracer le point $(0;1)$ car $f(0)=1$, puis avec un pas p, on trace de proche en proche les points à droite $(X\,;\,Y)$ et les points à gauche $(-X\,;\,Z)$ du point $(0;1)$ dans l'intervalle $[-a\,;\,a]$.

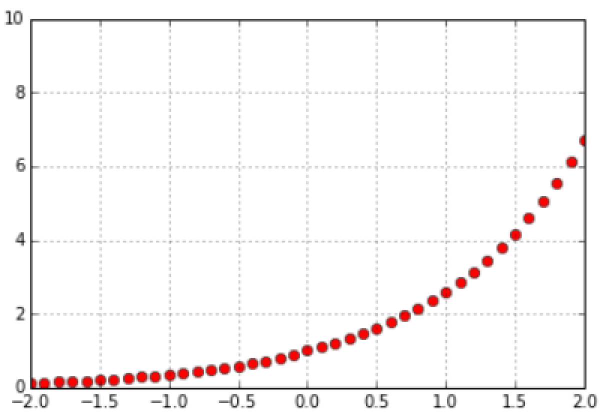
```python
import math as m
def courbe(a,p):
    x=0
    y=1
    z=1
    borne=int(a/p)
    plt.plot(x,y,'or')
    for i in range(1,borne+1):
        x=x+p
        y=y*(1+p)
        z=z*(1-p)
        plt.plot(x,y,'or')
        plt.plot(-x,z,'or')
    plt.show()
```

Programme 1 – python

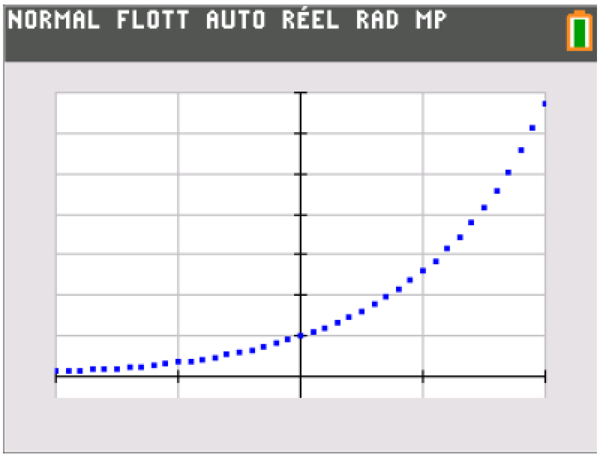
Variables : a, p : entiers
X, Y, Z : réels
Entrées et initialisation
- Lire a, p
- $0 \to X$
- $1 \to Y$
- $1 \to Z$
- Effacer dessin
- Tracer le point $(X;Y)$

Traitement
- **pour** i de 1 à a/p **faire**
  - $X+p \to X$
  - $Y(1+p) \to Y$
  - $Z(1-p) \to Z$
  - Afficher le point $(X;Y)$
  - Afficher le point $(-X;Z)$
- **fin**

On obtient la courbe suivante pour : $a=2$ et $p=1/10$
avec comme fenêtre pour la calculatrice : $X \in [-2\,;\,2]$ et $Y \in [-0{,}5\,;\,7]$



en python : courbe(2 , 0.1)



sur la calculatrice

1.3 Relation fonctionnelle

Théorème 2 : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Remarque : Cette relation s'appelle "relation fonctionnelle" car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété puis montrer qu'alors la fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Démonstration : Posons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables :

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x) \quad \text{et} \quad h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction h correspond alors à la définition de la fonction exponentielle.

On a alors : $\dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$

En prenant $x = b$ on a alors : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

1.4 Autres opérations

Théorème 3 : Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tous $n \in \mathbb{N}$:

1) $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ 2) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ 3) $\exp(na) = [\exp(a)]^n$

Démonstration :

1) On a vu au 1.1 que : $f(x)f(-x) = 1$
2) On remplace dans la relation fonctionnelle b par $(-b)$ puis relation 1)
3) Raisonnement de proche en proche à l'aide de la relation fonctionnelle.

1.5 Notation

Définition 1 : : De la similitude des propriétés de la fonction exponentielle et de la fonction puissance, on pose : $e^x = \exp(x)$ avec $e = \exp(1) \approx 2{,}718$

On a ainsi les propriétés :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Algorithme : On peut avoir une approximation du nombre e à l'aide de l'approximation affine :

On trouve pour :

- $p = 10^{-2}$, $e \approx 2{,}705$
- $p = 10^{-4}$, $e \approx 2{,}718\,146$

```
Variables : p : entiers  e : réel
Entrées et initialisation
    Lire p
    1 → e
Traitement
    pour i de 1 à 1/p faire
        e(1 + p) → e
    fin
Sorties : Afficher e
```

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Signe

Théorème 4 : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration : D'après la relation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[e^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^x$.

La fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et un carré est positif ou nul, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0.$$

2.2 Variation

Théorème 5 : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exp est strictement positive et étant égale à sa dérivée, sa dérivée est strictement positive.

Propriété 1 : De la stricte croissance de la fonction exponentielle :

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad$ et $\quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

2.3 Courbe représentative

D'après les résultats obtenus, on a le tableau de variation et la courbe suivante :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

T_0 : $y = e^0 x + e^0 = x - 1$

T_1 : $\begin{cases} y = e(x-1) + e = ex \\ \text{passe par l'origine} \end{cases}$