Exercices de synthèse issus de textes de baccalauréat

Exercice I

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

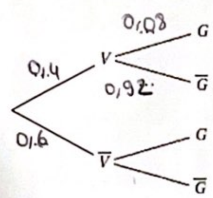
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.
   b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.
3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

PARTIE A :

1) a) $P(G) = \frac{20}{100} = \boxed{0,2}$

2) On cherche ici : $P(V \cap G) = P(V) \times P_V(G) = 0,4 \times 0,08 = \boxed{0,032}$

3) On cherche $P_{\overline{V}}(G)$.

Or $P(G) = 0,2$ et d'après p. totales :

$P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G)$

$0,2 = 0,032 + P(\overline{V} \cap G)$

$P(\overline{V} \cap G) = 0,2 - 0,032 = \boxed{0,168}$

Enfin : $P(\overline{V} \cap G) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(G)$

$0,168 = 0,6 \times P_{\overline{V}}(G)$

$P_{\overline{V}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = \boxed{0,28}$ La proba d'avoir la grippe sachant qu'on n'est pas vacciné est de 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X et interprétez le résultat obtenu.

Partie B

1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ avec n et $p = 0,4$

car pr chaque personne interrogée, être vacciné ou non constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = p(V) = 0,4$

on répète n fois de façon indpdte cette épreuve.

Donc X qui compte le nb de succès obtenus lors de ces n épreuves indpdte suit la loi $\mathcal{B}(n; 0,4)$.

2) a) $n = 40$

On cherche ici la valeur de $P(X = 15)$

et $X \hookrightarrow B(40; 0.4)$

$P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times (1 - 0,4)^{40-15} = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25}$

on tape BinomFdp (40, 0.40, 15). $P(X = 15) \approx \boxed{0,123}$ à 10^{-3} près

b) On cherche ici. $P(X \geq 20)$

$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19)$ car X à valeurs entières.

$P(X \geq 20) = 1 - \sum_{k=0}^{19} P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{19} \binom{40}{k} \times 0,4^{k} \times 0,6^{40-k}$

on tape 1 − BinomFrep (40, 0.4, 19). $P(X \geq 20) \approx \boxed{0,130}$ à 10^{-3} près

c) $E(X) = n \times p = 40 \times 0,4 = \boxed{16}$

$X \hookrightarrow B(40, 0.4)$ En moyenne, on peut espérer obtenir 16 prs vaccinées par échantillon de taille 40.

Exercice 10 déterminer le plus petit entier k tel que $P(Y \leq k) \geq p$ *à l'aide de la calculatrice.*

Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}63$.
Déterminer le plus petit entier k tel que $P(Y \leq k) \geq 0{,}95$

On "tabule" la fonction $k \longmapsto P(Y \leq k)$:

Pour la TI : dans $f(x)$, binomFRép(50, 0.63, X). Pour la Casio : 7 : Table…Y1 = BinomialCD(x,50,0.63)

Exercice II

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

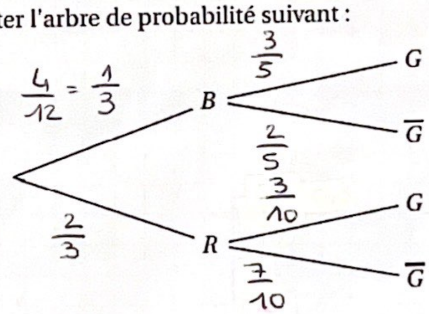
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».
   a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :

~~$P(R \cap G) = 0{,}3$~~
~~$= P(R) \times P_R(G)$~~
~~$P_R(G) = \frac{3}{10} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{10} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{20}$~~



$P(R \cap G) = 0{,}3$

2. a. Montrer que $P(G) = 0{,}4$.
   b. Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

1) $P_B(G) = \frac{3}{5}$ (Si blanc → 1 seul jeton tiré, trois portent un num impair sur les 5 jetons et équiproba).
$P_B(G) = 0{,}6$.

2) a) $P(G) = P(G \cap B) + P(G \cap R)$

$P(G) = P(B) \times P_B(G) + P(R) \times P_R(G)$

$P(G) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{15} + \frac{6}{30} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$ $= \frac{1}{5} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0,$

b) $P_G(B) = \frac{P(G \cap B)}{P(G)} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{6}{15}}$ $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{10}}$ $= \frac{3}{15} \times \frac{15}{6} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}$

3) B et G ne sont pas indépdt car) et $P(B \cap G) \neq P(B) \times P(G)$

$\frac{1}{5} \neq \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

$P(G) = \frac{6}{15}$ et $P_B(G) = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3} \neq \frac{6}{15}$ dc $P(G) \neq P_B(G)$

4)

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

c. Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ». G_n

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.

A ce stade de l'année, on s'aidera de l'algorithme suivant que l'on complétera :

```
def seuil():
    n=1
    while 1-0,6**n <0,99
        n=n+1
    return (n)
```

a) X suit la loi binomiale de paramètres : $n = 10$ et $p = P(G) = 0,4$

car faire une partie est une épreuve de Bernoulli ((gagner = succès et perdre = échec)) de paramètre $p = 0,4$.

On répète 10 fois de façon indépendante cette épreuve de B ; donc X suit la loi binomiale $B(10 ; 0,4)$.

$X \hookrightarrow B(0,4 ; 10)$

b) $P(X=3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times 0,6^7$

Binomfdp$(10 ; 0,4 ; 3)$ $P(X=3) \approx \boxed{0,215}$ à 10^{-3} près

c) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = \sum_{k=4}^{10} P(X=k)$. X à valeurs entières

Binomfrep$(10, 0,4 ; 3)$ $P(X \geq 4) \approx \boxed{0,618}$ à 10^{-3} près

La proba de gagner au - 4 des 10 parties est ≈ égale à 0,618 à 10^{-3} près.

5) $P_m = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\binom{10}{0} \times 0,4^0 \times 0,6^m\right)$

a) car Y à valeurs entières.

$= \boxed{1 - 0,6^m}$

Soit Y la variable aléatoire = au nb de parties gagnées au cours des m parties.

$Y \hookrightarrow B(m ; 0,4)$

ou : évènement contraire $\overline{G_n} = 1 - G_m$

$P(\overline{G_m}) = 0,6^m$ dc $P(G_m) = P_m = 1 - P(\overline{G_n}) = 1 - 0,6^m$

b) On cherche le + petit entier m tel que $P_m \geq 0,99$

$1 - 0,6^m \geq 0,99$

$m = 10$ $P_{10} = 0,9899$

$m = 11$ $P_{11} = 0,994 \rightarrow$ pr $m = 11$.

Exercice III

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, ~~si il~~ s'il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
   On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
   On note :
   - V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare »;
   - R l'évènement « Paul rate son train ».

   a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

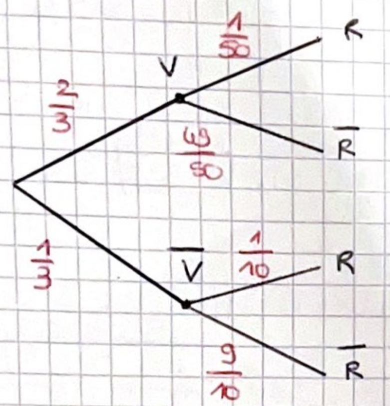
   b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.

   c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.
   On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

~~$P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + 0,3 = \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{}$~~

1a)



b) $P(R) = P(V \cap R) + P(\overline{V} \cap R)$

$= P(V) \times P_V(R) + P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(R)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10}$

$= \frac{2}{150} + \frac{1}{30} = \frac{2}{150} + \frac{5}{150} = \boxed{\frac{7}{150}}$

c) $P_R(V) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{150}}{\frac{7}{150}} = \frac{2}{\cancel{150}} \times \frac{\cancel{150}}{7} = \boxed{\frac{2}{7}}$

2)

a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ où $n = 20$ et $p = p(V) = \frac{2}{3}$

b) $P(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{20-10} = \binom{20}{10} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

On tape Binomfdp $(20; \frac{2}{3}; 10)$

$P(X = 10) \approx \boxed{0,054}$ à 10^{-3} près

X à valeurs entières

c) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = \sum_{k=10}^{20} P(X = k)$

On tape : 1- Binomfrep (20; 2/3, 9)

$P(X \geq 10) \approx \boxed{0,962}$ à 10^{-3} près

d) On cherche $E(X)$ sachant que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20 ; \frac{2}{3})$

$E(X) = n \times p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx \boxed{13}$

3) $E(T) = 10 \times 0,14 + 11 \times 0,13 + 12 \times 0,13 + 13 \times 0,12 + 14 \times 0,12 + 15 \times 0,11$
$+ 16 \times 0,10 + 17 \times 0,08 + 18 \times 0,07$

$E(T) \approx 12$ minutes.

Exercice IV

Un joueur a une addiction à un jeu vidéo…On suppose que :

- **S'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à $\frac{1}{4}$.**
- **S'il perd une partie, la probabilité de perdre la suivante est égale à $\frac{1}{2}$.**
- **La probabilité de gagner la première partie est égale à $\frac{1}{4}$.**

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement : *"le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie".*

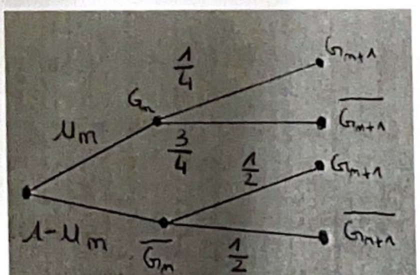
Enfin, on note u_n la probabilité de l'événement G_n. $u_n = P(G_n)$

0) Déterminer la valeur de u_1.

***1a)* En détaillant votre démarche, démontrer que $u_2 = \frac{7}{16}$.**

***1b)* Un joueur a perdu la seconde partie. Déterminer la probabilité qu'il ait gagné la première partie.**

***2a)* Compléter l'arbre de probabilité suivant :**



***2b)* Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2}$.**

3) On définit, pour tout entier $n \geq 1$ la suite (V_n) par : $V_n = u_n - \frac{2}{5}$.

***a)* Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison, et déterminer la valeur de son premier terme.**

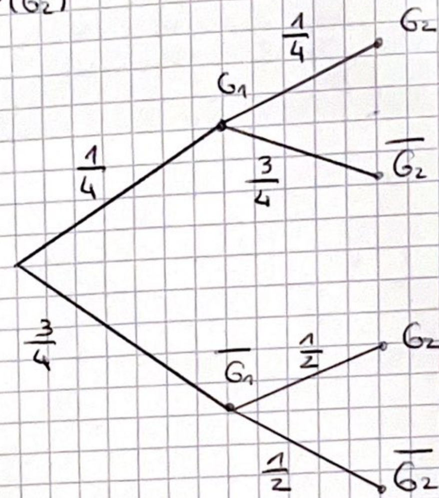
***b)* Exprimer alors, pour tout entier $n \geq 1$, V_n en fonction de n.**

***c)* En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^n$.**

***d)* Déterminer la limite de (u_n). Interprétez concrètement ce résultat dans le cadre de la situation étudiée ici.**

0) $u_1 = \frac{1}{4}$

1)a) $U_2 = P(G_2)$



$u_2 = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2)$

$u_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{7}{16}}$

1b) On cherche $P_{\overline{G_2}}(G_1) = \frac{P(G_1 \cap \overline{G_2})}{P(\overline{G_2})} = \frac{P(G_1) \times P_{G_1}(\overline{G_2})}{1 - P(G_2)}$

$P_{\overline{G_2}}(G_1) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{7}{16}} = \frac{3}{16} \div \frac{9}{16} = \frac{3}{\cancel{16}} \times \frac{\cancel{16}}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$

2b) $u_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$

$u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2}(1 - u_n) = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u_n$

$u_{n+1} = \boxed{-\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2}}$

3) $n \geq 1$ $\quad V_n = u_n - \frac{2}{5}$

a) $V_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$ or $u_n = V_n + \frac{2}{5}$

$V_{n+1} = -\frac{1}{4}\left(V_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = -\frac{1}{4} V_n - \frac{2}{20} + \frac{1}{10}$

$V_{n+1} = -\frac{1}{4} V_n - \frac{2}{20} + \frac{2}{20} = \boxed{-\frac{1}{4} V_n}$

donc (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{-1}{4}$

3b) $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

or $V_1 = u_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{-3}{20}$

$V_n = \frac{-3}{20} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

c) $u_n = V_n + \frac{2}{5}$ $\quad u_n = \frac{-3}{20} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

$u_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{-1}{4}\right)^{n}$.

d) $-1 < \frac{-1}{4} < 1$ dc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^{n} = 0}$

dc par lim de prdt puis de somme :

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{5}}$

$u_n = P(G_n)$ Au bout d'un très grand nb de parties réalisées, la proba de gagner la partie se stabilise à $\frac{2}{5}$.

exo 10 :

$u_k = P(Y \leq k)$

$u_{k+1} = P(Y \leq k+1)$

$u_{k+1} - u_k = P(Y \leq k+1) - P(Y \leq k) = \underbrace{P(Y = k+1)}_{\geq 0}$. $\quad (u_k)$ croît. → suite croissante.

Si $k \geq 50$, $u_k = P(Y \leq k) = 1$

$P(Y \leq 50) = 1 \quad Y \hookrightarrow B(50 ; 0{,}63)$.

$P(Y \leq k) \geq 0{,}95$

$f(x) \quad y_1 = $ BinomFrep $(50, 0.63, X)$

Ici $P(Y \leq k) \geq 0{,}95$ dès que $k \geq 37$. rep : 37.

Exercice V

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

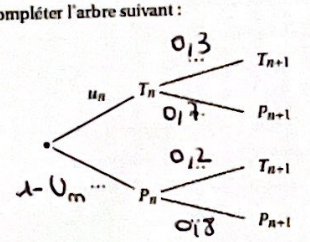
— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
— P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. a. Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   b. Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.
   c. Recopier et compléter l'arbre suivant :



   d. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1\,u_n + 0{,}2$.
   e. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

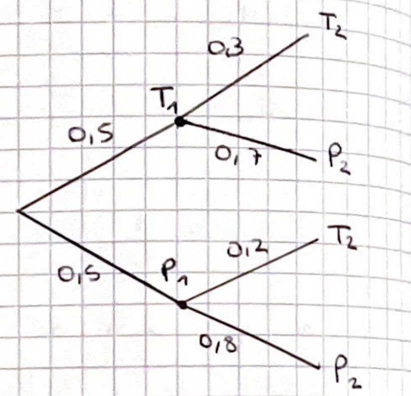
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e.?

1) a) $U_1 = P(T_1) = P(P_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$P_{T_1}(T_2) = 0{,}3$

$P_{P_1}(T_2) = 1 - P_{P_1}(P_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}$

b)



$U_2 = P(T_2) = P(T_1 \cap T_2) + P(P_1 \cap T_2)$

$= 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}2$

$= 0{,}15 + 0{,}10 = \boxed{0{,}25} = \frac{1}{4}$

$= P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(P_1) \times P_{P_1}(T_2)$

1 d) $P(T_{m+1}) = U_{m+1} = P(T_m \cap T_{m+1}) + P(P_m \cap T_{m+1})$ (p totales)

$= 0{,}3\,u_m + 0{,}2(1 - u_m)$

$= 0{,}3\,u_m + 0{,}2 - 0{,}2\,u_m = \boxed{0{,}1\,u_m + 0{,}2}$

1 e) ... $\boxed{\lim_{m \to +\infty} u_m \approx 0{,}222}$

2) $V_m = u_m - \frac{2}{9}$ et $u_m = V_m + \frac{2}{9}$

a) $V_{m+1} = u_{m+1} - \frac{2}{9} = 0{,}1\,u_m + 0{,}2 - \frac{2}{9}$

$V_{m+1} = \frac{1}{10}\left(V_m + \frac{2}{9}\right) + \frac{2}{10} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10} V_m + \frac{2}{90} + \frac{18}{90} - \frac{20}{90}$

$V_{m+1} = \boxed{\frac{1}{10} V_m} = 0{,}1 V_m$ (V_m) est une suite géo de raison $q = \frac{1}{10}$

$V_1 = u_1 - \frac{2}{9} = 0,5 - \frac{2}{9} = \frac{5}{10} - \frac{2}{9} = \frac{45}{90} - \frac{20}{90} = \frac{25}{90} = \boxed{\frac{5}{18}}$

b) $V_n = V_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18} \times \frac{1}{10^{n-1}}$

$u_n = V_n + \frac{2}{9} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}$

c) $-1 < \frac{1}{10} < 1$ dc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$

par lp puis ls $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}}$