

## Ordre dans $\mathbb{R}$ et inégalités

### I – Rappel sur les égalités

**Règle 1** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  et  $c$ ,  $[a = b] \Leftrightarrow [a + c = b + c]$ .

Une égalité est donc transformée en une égalité équivalente en ajoutant à chacun de ses membres le **même** nombre réel.

En particulier, pour tous réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ ,  $[a = b] \Leftrightarrow [a - c = b - c]$ .

Une égalité est donc transformée en une égalité équivalente en soustrayant à chacun de ses membres le **même** nombre réel.

Grâce à cette règle, on a donc :  $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$ .

En effet :  $a = b \Leftrightarrow a - b = b - b \Leftrightarrow a - b = 0$ .

**Règle 2** : Pour tous réels  $a$  et  $b$  et pour tout réel  $c$  **non nul**,  $[a = b] \Leftrightarrow [a \times c = b \times c]$ .

Une égalité est donc transformée en une égalité équivalente en multipliant chacun de ses membres par le **même** nombre réel non nul.

Remarque : pourquoi  $c$  doit-il être non nul ?

Car par exemple,  $2 \times 0 = 3 \times 0 = 0$ , pour autant,  $2 \neq 3$ .

En particulier, pour tous réels  $a$  et  $b$  et pour tout réel  $c$  non nul,  $[a = b] \Leftrightarrow [\frac{a}{c} = \frac{b}{c}]$ .

Une égalité est donc transformée en une égalité équivalente en divisant chacun de ses membres par le **même** nombre réel non nul.

Les deux règles citées, ainsi que leurs cas particuliers, sont à la base de la résolution des équations du premier degré à une inconnue.

Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $7x - 4 = 5x + 9$ .

$$\begin{aligned} 7x - 4 = 5x + 9 &\Leftrightarrow 7x - 4 - 5x = 5x + 9 - 5x \Leftrightarrow 2x - 4 = 9 \Leftrightarrow 2x - 4 + 4 = 9 + 4 \Leftrightarrow 2x = 13 \Leftrightarrow \\ 2x \div 2 = 13 \div 2 &\Leftrightarrow x = \frac{13}{2}. \mathcal{S} = \left\{ \frac{13}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Quand vous dites : "je fais passer le  $5x$  du côté gauche, il devient  $-5x$  et je fais passer le  $-4$  du côté droit, il devient  $+4$  etc...", vous utilisez ni plus ni moins que les règles *susmentionnées*, en faisant un peu de calcul mental : à droite,  $5x - 5x = 0$  et  $-4 + 4 = 0$ , donc vous écrivez d'un coup :

$$7x - 5x = 9 + 4.$$

Enfin rappelons qu'on peut respectivement additionner, soustraire membre à membre deux égalités :

Si  $A = B$  et si  $C = D$ , alors  $A + C = B + D$  et  $A - C = B - D$ .

*Attention au fait que la réciproque est fautive ! Par exemple,  $5 - 8 = 13 - 16$ , mais  $5 \neq 8$  !*

Enfin, on peut multiplier et diviser membres à membres deux égalités :

Si  $A = B$  et si  $C = D$ , alors  $A \times C = B \times D$  et  $A \div C = B \div D$  ( $A, B, C, D$  non nuls pour cette dernière).

## II – Rappel sur les in égalités

**Règle 1 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  et  $c$ ,  $[a \leq b] \Leftrightarrow [a + c \leq b + c]$ .

Une inégalité est donc transformée en une inégalité équivalente en ajoutant à chacun de ses membres le *même* nombre réel.

En particulier, pour tous réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ ,  $[a \leq b] \Leftrightarrow [a - c \leq b - c]$ .

Une inégalité est donc transformée en une inégalité équivalente en soustrayant à chacun de ses membres le *même* nombre réel.

Remarque : la règle énoncée et son cas particulier restent vraies lorsqu'on met l'un des symboles :  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  aussi.

Grâce à cette règle, on a donc :  $[a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0]$  (règle très utilisée en pratique).

En effet :  $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq b - b \Leftrightarrow a - b \leq 0$ .

**Règle 2 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$ , si  $a \leq b$  et **si**  $c > 0$ , alors :  $a \times c \leq b \times c$  et  $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ .

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , si  $a \leq b$  et **si**  $c < 0$ , alors :  $a \times c \geq b \times c$  et  $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ .

Lorsqu'on *multiplie* (respectivement *divise*) *chacun* des deux membres d'une inégalité par le **MEME** nombre **POSITIF**, on *conserve le sens* des inégalités.

Lorsqu'on *multiplie* (respectivement *divise*) *chacun* des deux membres d'une inégalité par le **MEME** nombre **NEGATIF**, on *renverse le sens* des inégalités.

Donnons une justification du point du premier point, les autres se traitant de façon similaire :

Supposons que  $a \leq b$  et que  $c > 0$ .

Pour prouver que  $a \times c \leq b \times c$ , on va établir que :  $a \times c - b \times c \leq 0$  (grâce à la règle très utilisée en pratique et *susmentionnée*).

Or,  $a \times c - b \times c = c \times (a - b)$ , et comme  $a \leq b$ , on a :  $a - b \leq 0$ . Par suite, vu que  $c > 0$ ,  $c \times (a - b) \leq 0$  car le produit d'un facteur positif par un facteur négatif est négatif (règle des signes d'un produit).

Par suite, on a établi que :  $a \times c - b \times c \leq 0$ , et donc que  $a \times c \leq b \times c$ .

**Règle 3 (transitivité)**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  et  $c$ , si  $a \leq b$  et si  $b \leq c$ , alors  $a \leq c$ .

La démonstration : si  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$  et si  $b \leq c$ , alors  $b - c \leq 0$ .

Par suite,  $(a - b) + (b - c) = a - c$  est un nombre négatif ou nul, en tant que somme de deux termes négatifs ou nuls.

Donc  $a - c \leq 0$  et donc  $a \leq c$  toujours grâce à la remarque très utilisée en pratique !

## Opérations licites sur les inégalités

$a, b, c, d, e$  et  $f$  désignent des nombres réels.

**$R_1$  : on peut additionner membre à membre deux inégalités de même sens :**

**si  $a \leq b \leq c$  et si  $d \leq e \leq f$ , alors :  $a + d \leq b + e \leq c + f$ . Même règle avec des inégalités strictes.**

Remarque : si  $a \leq b$  et si  $c < d$ , alors :  $a + c < b + d$ .

Exercice : prouver la règle  $R_1$  en utilisant la remarque très utilisée en pratique et le fait que dire que  $a \leq b \leq c$  équivaut à dire que :  $a \leq b$  et  $b \leq c$ .

**$R_2$  : on peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens CONCERNANT des nombres TOUS POSITIFS ou nuls.**

**Si  $0 \leq a \leq b$  et si  $0 \leq c \leq d$ , alors :  $0 \leq ac \leq bd$ .**

Remarque :  $R_2$  s'adapte avec des inégalités strictes.

## Opérations illicites sur les inégalités

**Attention, il est INTERDIT de :**

❖\* Additionner membre à membre deux inégalités qui n'ont pas le même sens.

❖\* Multiplier membre à membre les termes de deux inégalité de même sens lorsque ses termes ne sont pas TOUS positifs !!!

❖\* Diviser membre à membre les termes de deux inégalités, même si elles ont le même sens, et même si elles ne concernent que des nombres positifs !!!

Donnons des contre-exemples pour illustrer :

$-3 \leq 4$  et  $-2 \leq 1$  pour autant,  $-3 \times (-2) > 4 \times 1$  car  $6 > 4$ !!!

$2 < 3 < 5$  et  $4 < 6 < 15$ , pour autant, on n'a pas :  $\frac{2}{4} < \frac{3}{6} < \frac{5}{15}$  ! En effet,  $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$  et  $\frac{1}{2} > \frac{5}{15}$  ( $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ).

## Exercice

Sachant que :  $1 \leq x \leq 3$  et si  $2,5 \leq y < 5,5$ , donner un encadrement le plus précis possible de :

a)  $-2x$

b)  $x + y$

c)  $x - y$

d)  $-3x + 4y$

e)  $xy$

f)  $\frac{x}{y}$

g)  $x^2$

h)  $5x^2 - 2y^2$

i)  $\frac{x-4}{2y-3}$

### Corrigé de l'exercice

a) Si  $1 \leq x \leq 3$  alors :  $-2 \times 1 \geq -2 \times x \geq -2 \times 3$  c'est-à-dire :  $\boxed{-2 \geq -2x \geq -6}$  (règle 2 du rappel sur les inégalités).

b) Si  $1 \leq x \leq 3$  et si  $2,5 \leq y < 5,5$ , alors d'après la règle  $R_1$  :  $1 + 2,5 \leq x + y < 3 + 5,5$  i.e.  $\boxed{3,5 \leq x + y < 8,5}$ .

c)  $x - y = x + (-y)$ .

Or si  $2,5 \leq y < 5,5$ , alors  $-2,5 \geq -y > -5,5$  ce qui s'écrit encore :  $-5,5 < -y \leq -2,5$ .

Par suite on a :  $1 \leq x \leq 3$  et  $-5,5 < -y \leq -2,5$ , donc d'après  $R_1$  il vient que :  $1 + (-5,5) < x + (-y) \leq 3 + (-2,5)$  c'est-à-dire :  $\boxed{-4,5 < x - y \leq -2,5}$ .

d) Si  $1 \leq x \leq 3$  alors :  $-3 \times 1 \geq -3 \times x \geq -3 \times 3$  c'est-à-dire :  $-3 \geq -3x \geq -9$  (règle 2 du rappel sur les inégalités) ce qui s'écrit encore :  $-9 \leq -3x \leq -3$ .

De même, si  $2,5 \leq y < 5,5$ , alors :  $2,5 \times 4 \leq 4y < 5,5 \times 4$  c'est-à-dire :  $10 \leq 4y < 22$ .

Par suite, grâce à  $R_1$ , on a :  $-9 + 10 \leq -3x + 4y < -3 + 22$  c'est-à-dire :  $-1 \leq -3x + 4y < 19$ .

e) De même, grâce à la règle  $R_2$  ici applicable car  $x$  et  $y$  sont positifs :  $1 \times 2,5 \leq xy < 3 \times 5,5$  i.e.  $\boxed{2,5 \leq xy < 16,5}$ .

f)  $\frac{x}{y} = x \times \left(\frac{1}{y}\right)$ . Or,  $(0 <) 2,5 \leq y < 5,5$ , donc comme sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , la fonction inverse décroît, on a :

$\frac{1}{2,5} \geq \frac{1}{y} > \frac{1}{5,5}$  ou encore  $(0 <) \frac{1}{5,5} < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2,5}$ . Comme  $1 \leq x \leq 3$ , grâce à  $R_2$  on obtient :

$\frac{1}{5,5} < x \times \frac{1}{y} \leq \frac{3}{2,5}$  c'est-à-dire :  $\frac{1}{5,5} < \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2,5}$  ou encore, pour plus d'esthétique :  $\boxed{\frac{2}{11} < \frac{x}{y} \leq \frac{6}{5}}$ .

g) Si  $1 \leq x \leq 3$  alors comme la fonction carrée croît sur  $[1 ; 3]$  (contenu dans  $[0 ; +\infty[$ ), on a :  $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$  c'est-à-dire :  $\boxed{1 \leq x^2 \leq 9}$ .

Une fonction croissante sur un intervalle conserve le sens des inégalités lorsqu'on passe aux images par cette fonction.

h) Grâce au travail fait à la question g) : Si  $1 \leq x \leq 3$ , alors  $1 \leq x^2 \leq 9$ , et donc :  $5 \leq 5x^2 \leq 45$  car on a multiplié chacun des membres de l'inégalité par le même nombre  $5 > 0$ .

De même, si  $2,5 \leq y < 5,5$ , alors  $2,5^2 \leq y^2 < 5,5^2$ , donc  $6,25 \leq y^2 < 30,25$ , et par suite on a :

$-2 \times 6,25 \geq -2y^2 > -2 \times 30,25$ , c'est-à-dire :  $-60,5 < -2y^2 \leq -12,5$ .

Ainsi :  $5 \leq 5x^2 \leq 45$  et  $-60,5 < -2y^2 \leq -12,5$ , donc :  $5 + (-60,5) < 5x^2 + (-2y^2) \leq 45 + (-12,5)$ .

Donc :  $\boxed{-50,5 < 5x^2 - 2y^2 \leq 32,5}$ .

i) Si  $1 \leq x \leq 3$  alors :  $1 - 4 \leq x - 4 \leq 3 - 4$  c'est-à-dire :  $-3 \leq x - 4 \leq -1$ .

Si  $2,5 \leq y < 5,5$ , alors :  $5 \leq 2y < 11$  (car  $2 > 0$ ), donc  $2 \leq 2y - 3 < 8$ .

Or,  $\frac{x-4}{2y-3} = (x-4) \times \frac{1}{2y-3}$ .

Vu que :  $2 \leq 2y-3 < 8$  et que sur l'intervalle  $[2; 8[$  (inclus dans  $]0; +\infty[$ ) la fonction inverse décroît, on a :  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2y-3} > \frac{1}{8}$ .

Par suite on a :  $-3 \leq x-4 \leq -1$  et  $\frac{1}{8} < \frac{1}{2y-3} \leq \frac{1}{2}$ .

On ne peut pas appliquer ici directement  $R_2$  car la première inégalité concerne des termes négatifs.

Or, si  $-3 \leq x-4 \leq -1$ , alors :  $1 \leq -x+4 \leq 3$  (on a multiplié par  $-1$  et  $-1 < 0$ ).

Par suite, grâce à  $R_2$  on a :  $\frac{1}{8} \times 1 < (-x+4) \times \frac{1}{2y-3} \leq 3 \times \frac{1}{2}$  c'est-à-dire :  $\frac{1}{8} < \frac{-x+4}{2y-3} \leq \frac{3}{2}$ .

Donc :  $\boxed{-\frac{1}{8} > \frac{x-4}{2y-3} \geq -\frac{3}{2}}$ .