TeSciA

2021

Mathématiques Générales Avancées

Épreuve 2, Option B

Sujet zéro

Durée : 1h30

Code sujet : ◯ ◯ ●

Fonctionnement des questions

- Les *questions à choix multiples* sont numérotées **M1**, **M2** etc. Le candidat y répond en **noircissant** la case correspondant à sa réponse dans la feuille-réponse □. Pour chacune de ces questions, il y a une et une seule bonne réponse. Toute réponse fausse retire des points aux candidats. Noircir plusieurs réponses à une même question a un effet de neutralisation (le candidat récoltera 0 point).
- Les *questions à réponse brute* sont numérotées **L1**, **L2** etc. Elles ne demandent aucune justification : les résultats sont reportés par le candidat dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse △. Tout débordement de cadre est interdit.
- Les *questions à réponse rédigée* sont numérotées **R1**, **R2** etc. Elles sont écrites dans le cadre correspondant sur la feuille-réponse ◯ ou la feuille-réponse △, selon le symbole précédant le numéro de la question. Tout débordement de cadre est interdit.

Conseils de bon sens

- L'énoncé est (très) long : il n'est absolument pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une note et un classement excellents.
- Ne vous précipitez pas pour reporter vos réponses, notamment aux questions à choix multiples. Il est préférable d'avoir terminé un exercice avant d'en reporter les réponses.
- Ne répondez *jamais* au hasard à une question à choix multiples !
- Selon l'exercice, les questions peuvent être dépendantes les unes des autres ou non. Soyez attentifs à la variété des situations.

TeSciA est une initiative de l'AORES (Association pour une Orientation Raisonnée vers l'Enseignement supérieur Scientifique).
Énoncés et feuilles-réponses réalisés à l'aide du logiciel libre Auto-Multiple-Choice.

AORES

Exercice 1. Parties du plan définies par des équations

Dans cet exercice, le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormal, et on demande la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M dont le couple de coordonnées (x,y) vérifie l'équation (E) indiquée.

☐ **M1** Si $(E) : x^2 + y^2 = -1$ alors $\mathcal{C}$ est :

A réduit à un point
B un cercle
C la réunion de deux droites
D une droite
E l'ensemble vide

☐ **M2** Si $(E) : x^2 + y^2 = 0$ alors $\mathcal{C}$ est :

A la réunion de deux droites
B l'ensemble vide
C un cercle
D réduit à un point
E une droite

☐ **M3** Si $(E) : x^2 - y^2 = 0$ alors $\mathcal{C}$ est :

A l'ensemble vide
B réduit à un point
C un cercle
D la réunion de deux droites
E une droite

☐ **M4** Si $(E) : (x^2 - 2y)^2 = y^2\,(y-2)^2$ alors $\mathcal{C}$ est :

A un cercle
B une droite
C la réunion de deux droites
D la réunion de deux droites et d'un cercle
E la réunion d'une droite et d'un cercle

Exercice 2. Quelques équations à une variable

Dans toutes les équations considérées, l'inconnue x représente un nombre réel.

☐ **M5** Le nombre de solutions de l'équation $x^4 = 3 - 2x^2$ est :

A 1 B 0 C 2 D 4 E 3

☐ **M6** Le nombre de solutions de l'équation $e^{8x} = 3 - 2e^{4x}$ est :

A 3 B 2 C 1 D 0 E 4

☐ **M7** Le nombre de solutions de l'équation $\ln(x^4) = 3 - \ln(2x^2)$ est :

A 4 B 0 C 3 D 1 E 2

☐ **M8** Le nombre de solutions de l'équation $x^4 = 3 - 2x^3$ est :

A 3 B 4 C 1 D 2 E 0

☐ **M9** Le nombre de solutions de l'équation $x^4(\ln x)^4 = 3 - 2x^3(\ln x)^3$ est :

A 4 B 3 C 1 D 0 E 2

Exercice 3. Autour d'une fonction

On considère dans cet exercice la fonction de variable réelle

$$f : x \mapsto -\sqrt{2 - |1 - x|}.$$

☐ **M10** Le domaine de définition de f, que l'on notera D_f, est :

A $[0; 3]$ B Aucun des autres ensembles proposés C $[-1; 3]$ D $[-1; 0]$ E $]-1; 0]$

△ **L1** Donner le domaine de définition des fonctions $g : x \mapsto f(x^2)$ et $h : x \mapsto f(\sqrt{x})$. Aucune démonstration n'est attendue.

☐ **M11** Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto f(f(x))$ est :

A $[-1; 0]$ B $[-1; 3]$ C $[-1; 0] \cup [2; 3]$ D $[0; 2]$ E $[-\sqrt{2}; 0]$

☐ **M12** Sur son domaine de définition, la fonction f est :

A continue mais non dérivable

B dérivable mais non continue

C dérivable et continue

D ni dérivable ni continue

☐ **M13** L'ensemble des points où f est dérivable est :

A D_f privé de 1

B D_f privé de -1 et 1

C aucun de quatre ensembles proposés

D D_f privé de -1 et 3

E D_f privé de 1 et 3

☐ **M14** Si g désigne une fonction dérivable sur D_f dont la dérivée est f, la fonction g est :

A décroissante, mais ni convexe ni concave

B ni croissante ni décroissante

C croissante, mais ni convexe ni concave

D décroissante et concave

E croissante et concave

☐ **M15** Les tangentes au graphe de f qui sont parallèles à la droite d'équation $y = 2x$ sont au nombre de :

A 0 B 3 C 2 D 4 E 1

△ **L2** Dans le cas où vous n'avez pas répondu “0" à la question **M15**, donnez un réel a tel que le point A de coordonnée $(a,0)$ appartienne à une tangente au graphe de f qui soit parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice 4. Mots

On appelle **mot fini** une suite finie (non vide) de 0 et de 1. Par exemple, 0011010 est un mot fini. Le nombre de chiffres du mot est appelé longueur du mot. Par exemple, la longueur du mot 0011010 est 7.

On appelle **mot infini** une suite infinie de 0 et de 1 (c'est-à-dire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \in \{0{,}1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On représentera un mot en « collant » les chiffres de la suite. Par exemple, le mot w défini par $w_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ peut être représenté par

$$w = 0000000000\cdots$$

Si u est un mot (fini ou infini), on appelle **sous-mot fini** de u tout mot fini constitué de chiffres consécutifs dans u. L'ensemble des sous-mots de u est noté $S(u)$.

Par exemple :

- Le mot 110 est un sous-mot fini (de longueur 3) de 0011010.
- Le mot 111 n'est pas un sous-mot fini de 0011010.
- Les sous-mots finis de longueur 3 de 011011011 sont 011, 110 et 101.
- Le mot 00000 est un sous-mot fini de longueur 5 du mot infini w défini précédemment.
- On a $S(w) = \{0{,}00{,}000,\cdots\}$.
- Les mots 1 et 01 ne sont pas des sous-mots finis de w.

Vrai ou Faux

Dans les questions de cette partie, on demande d'évaluer la validité logique des propositions indiquées.

☐ **M16** Le mot 0101 est un sous-mot fini de 010010011.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M17** Le mot infini w (défini dans le préambule de l'exercice) a un seul sous-mot de longueur 4.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M18** Il existe (au moins) un mot fini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 10.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M19** Il existe (au moins) un mot infini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 10.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M20** Il existe (au moins) un mot fini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 11.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M21** Il existe (au moins) un mot infini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 11.

[A] Faux [B] Vrai

☐ **M22** Il existe (au moins) un mot fini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 01.

A Faux B Vrai

☐ **M23** Il existe (au moins) un mot infini dont les seuls sous-mots de longueur 2 sont 00 et 01.

A Vrai B Faux

Ensemble des sous-mots

☐ **M24** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A Aucune des autres affirmations n'est vraie
- B L'ensemble $S(u)$ peut être fini même si u est infini.
- C L'ensemble $S(u)$ est toujours fini.
- D L'ensemble $S(u)$ est toujours infini si u est infini, toujours fini si u est fini.
- E L'ensemble $S(u)$ est toujours infini.

☐ **M25** Étant donné deux mots u et v, l'hypothèse minimale, parmi les suivantes, pour pouvoir obtenir l'égalité $u = v$ est :

- A $S(u) = S(v)$ et u et v sont finis de même longueur
- B $S(u) = S(v)$, u et v sont finis de même longueur et ont le même premier chiffre
- C $S(u) = S(v)$, u et v sont finis de même longueur et ont le même premier chiffre et le même dernier chiffre
- D $S(u) = S(v)$ et u et v sont finis
- E $S(u) = S(v)$

☐ **M26** Il existe (au moins) un mot infini u tel que $S(u)$ contienne tous les mots finis possibles.

- A Vrai
- B Faux

◯ **R1** Justifier votre réponse à la question **M26**.

Mots périodiques

On dit qu'un mot infini $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **périodique** s'il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u_n = u_{n+d} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Cela signifie que le mot u est obtenu en répétant un mot de longueur d. Par exemple, le mot

$$z = 011011011011011011011\cdots$$

est périodique avec $d = 3$ (ou encore $d = 6$), obtenu en répétant le mot fini 011 (ou le mot fini 011011).

Dans les questions suivantes, on demande d'évaluer la véracité des propositions indiquées.

☐ **M27** Toutes les mots infinis sont périodiques.

A Vrai B Faux

☐ **M28** L'ensemble des mots périodiques est infini.

A Faux B Vrai

☐ **M29** Si u est un mot périodique obtenu en répétant un mot fini v, alors $S(u) = S(v)$.

A Vrai B Faux

Étant donné un mot u et un entier k, l'ensemble des sous-mots de longueur k de u est noté $S_k(u)$, et le nombre de sous-mots de longueur k de u est noté $P_k(u)$. Par exemple, pour $u = 0111011$, on a $S_3(u) = \{011,111,110,101\}$ et $P_3(u) = 4$.

☐ **M30** Si u est un mot périodique obtenu en répétant un mot fini v de longueur d, alors $S_i(u) = S_i(v)$ pour tout entier i compris entre 1 et d.

A Faux B Vrai

☐ **M31** Si u est un mot périodique obtenu en répétant un mot fini v de longueur d, alors $P_i(u) \leq d$ pour tout entier $i > 0$.

A Faux B Vrai

◯ **R2** Justifier brièvement votre réponse à la question **M31**.

Transformation de mots (début)

Étant donné deux mots finis a et b, on appelle transformation de mots associée à a et b le processus qui transforme les mots en remplaçant les 0 par le mot a et les 1 par le mot b. Le résultat obtenu pour un mot u est noté $f_{a,b}(u)$. Par exemple, si $a = 00$ et $b = 101$, alors : $f_{a,b}(0) = 00$, $f_{a,b}(01) = 00101$, $f_{a,b}(0110) = 0010110100$, $f_{a,b}(100) = 1010000$, $f_{a,b}(001111111\cdots) = 0000101101101101101101101101\cdots$

Dans les questions de cette partie, on donne des égalités et on demande de dire s'il existe des mots a et b satisfaisant simultanément à toutes celles qui sont indiquées.

☐ **M32** $f_{a,b}(0) = 11$ et $f_{a,b}(1001) = 10111110$

A Oui B Non

☐ **M33** $f_{a,b}(0) = 01$ et $f_{a,b}(110) = 001$

A Non B Oui

☐ **M34** $f_{a,b}(0101) = 11011101$ et $f_{a,b}(11) = 00$

A Oui B Non

☐ **M35** $f_{a,b}(000) = 101010$ et $f_{a,b}(10) = 110$

A Oui B Non

☐ **M36** $f_{a,b}(001) = 00000$ et $f_{a,b}(101) = 0000$

A Non B Oui

☐ **M37** $f_{a,b}(0011) = 1010101010$

A Oui B Non

☐ **M38** $f_{a,b}(001) = 111111$ et $f_{a,b}(101) = 1111$

A Non B Oui

☐ **M39** $f_{a,b}(010101010101\cdots) = 1010101010\cdots$ et $f_{a,b}(10) = 010101$

A Non B Oui

☐ **M40** $f_{a,b}(011011011011011\cdots) = 1010101010\cdots$

A Oui B Non

☐ **M41** $f_{a,b}(011011011011011\cdots) = 1100110011001100\cdots$

A Non B Oui

Transformation de mots (fin)

☐ **M42** La propriété « Pour n'importe quel mot périodique u, le mot $f_{a,b}(u)$ est périodique » est vraie :

A pour tous mots finis a et b B pour certains mots finis a et b mais pas tous
C pour aucun choix des mots finis a et b

◯ **R3** Soit a un mot fini de longueur au moins 2 et commençant par 0. Justifier qu'il existe un mot infini u tel que $f_{a,b}(u) = u$.

Exercice 5. Une opération étrange sur l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Étant donné deux points A et B de l'espace, de triplets de coordonnées respectifs (a_1,a_2,a_3) et (b_1,b_2,b_3), on note $A \star B$ le point de l'espace dont le triplet de coordonnées est $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 + b_1 a_2)$.

☐ **M43** Vrai ou faux : la loi $\star$ est commutative, c'est-à-dire que $A \star B$ est égal à $B \star A$ quels que soient les points A et B envisagés.

A Faux B Vrai

△ **L3** En cas de réponse "Faux" à la question **M43**, donner deux points A et B pour lesquels $A \star B \neq B \star A$.

☐ **M44** Vrai ou faux : la loi $\star$ est associative, c'est-à-dire que $(A \star B) \star C$ est égal à $A \star (B \star C)$ quels que soient les points A, B et C envisagés.

A Vrai B Faux

△ **L4** En cas de réponse "Faux" à la question **M44**, donner trois points A, B et C pour lesquels $(A \star B) \star C$ est différent de $A \star (B \star C)$.

☐ **M45** Vrai ou faux : quel que soit le choix d'un point M de l'espace, il existe un point A de l'espace tel que $A \star M = M$.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M46** Vrai ou faux : il existe un point A de l'espace telle que $A \star M = M = M \star A$ pour n'importe quel point M de l'espace.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M47** Vrai ou faux : quel que soit le choix du point A de l'espace, il existe un point B de l'espace tel que $B \star A = O$.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M48** Vrai ou faux : quel que soit le choix des points A et B de l'espace, il existe un point M de l'espace tel que $A \star M = B$.

$\boxed{\text{A}}$ Faux $\boxed{\text{B}}$ Vrai

☐ **M49** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

$\boxed{\text{A}}$ Pour tout point A de l'espace, il existe un et un seul point M de l'espace tel que $M \star M = A$.

$\boxed{\text{B}}$ Il existe un point A de l'espace tel qu'il n'existe aucun point M de l'espace tel que $M \star M = A$.

$\boxed{\text{C}}$ Pour tout point A de l'espace, il existe un point M de l'espace tel que $M \star M = A$, et il peut même exister plusieurs tels points selon le choix de A.

☐ **M50** Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

$\boxed{\text{A}}$ Il existe un point A de l'espace tel qu'il n'existe aucun point M de l'espace tel que $(M \star M) \star M = A$.

$\boxed{\text{B}}$ Pour tout point A de l'espace, il existe un et un seul point M de l'espace tel que $(M \star M) \star M = A$.

$\boxed{\text{C}}$ Pour tout point A de l'espace, il existe un point M de l'espace tel que $(M \star M) \star M = A$, et il peut même exister plusieurs tels points selon le choix de A.

On part d'un point A de l'espace et on définit par récurrence une suite $(M_n)_{n \geq 1}$ de points par la donnée initiale $M_1 = O$ et la relation de récurrence $\forall n \geq 1$, $M_{n+1} = M_n \star A$.

△ **L5** Donner sans démonstration l'expression des coordonnées du point M_n en fonction de l'entier n.

On part d'un point A de l'espace et on définit par récurrence une suite $(N_n)_{n \geq 1}$ de points par la donnée initiale $N_1 = A$ et la relation de récurrence $\forall n \geq 1$, $N_{n+1} = N_n \star N_n$.

△ **L6** Donner sans démonstration l'expression des coordonnées du point N_n en fonction de l'entier n.

Exercice 6. Fonction définie par un produit infini

Convergence d'une suite de produits

On fixe dans cette partie un nombre réel x. On considère la suite de terme général

$$u_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n}.$$

En d'autres termes $(u_n)_{n\geq 1}$ est la suite de terme initial $u_1 = \cos\frac{x}{2}$ et qui vérifie, pour tout entier $n \geq 2$, la relation :

$$u_n = u_{n-1} \times \cos\Big(\frac{x}{2^n}\Big).$$

☐ **M51** Lorsque $x = 0$, la suite (u_n) :

A est constante de valeur 0

B est constante de valeur 1

C n'est pas constante mais converge vers 0

D n'est pas constante mais converge vers 1

☐ **M52** On admet que la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, le terme $\cos\frac{x}{2^n}$ tend donc vers :

A $+\infty$ B 1 C aucune limite D 0 E -1

☐ **M53** On peut affirmer, à partir de la limite trouvée à la question précédente :

A Rien de tout cela

B Que u_n tend vers u_{n-1} quand n tend vers $+\infty$

C Que u_n tend vers $-u_{n-1}$ quand n tend vers $+\infty$

D Que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

☐ **M54** Parmi les affirmations suivantes, une ou plusieurs sont vraies : indiquez la plus fine des affirmations vraies :

A La suite (u_n) est majorée et minorée quel que soit le choix du réel x

B Il est possible de choisir x de telle sorte que la suite (u_n) ne soit ni majorée ni minorée

C La suite (u_n) est minorée quel que soit le choix du réel x

D La suite (u_n) est majorée quel que soit le choix du réel x

☐ **M55** Parmi les affirmations suivantes, une ou plusieurs sont vraies : indiquez la plus fine des affirmations vraies :

A Il est possible de choisir x de telle sorte que la suite (u_n) ne soit ni croissante ni décroissante

B La suite (u_n) est croissante ou décroissante quel que soit le choix du réel x

C La suite (u_n) est croissante quel que soit le choix du réel x

D La suite (u_n) est croissante quel que soit le choix du réel x

☐ **M56** Parmi les affirmations suivantes, une ou plusieurs sont vraies : indiquez la plus fine des affirmations vraies :

A Quel que soit le choix du réel x, on peut trouver un entier naturel $n_0 > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit croissante ou décroissante.

B Quel que soit le choix du réel x, on peut trouver un entier naturel $n_0 > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit décroissante.

C Quel que soit le choix du réel x, on peut trouver un entier naturel $n_0 > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit croissante.

D Quel que soit le choix du réel x, quel que soit l'entier naturel $n_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est ni croissante ni décroissante.

E On peut choisir le réel x de telle sorte que, quel que soit l'entier naturel $n_0 > 0$, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne soit ni croissante ni décroissante.

◯ **R4** En vous appuyant sur vos réponses antérieures (pour lesquelles on ne demande pas de justification), démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel compris entre -1 et 1.

Dans la suite du sujet, la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est notée $c(x)$ (elle dépend ***a priori*** du réel x).

On a ainsi défini une fonction c de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on souhaite étudier.

Propriétés fonctionnelles de c, premières conclusions sur les points d'annulation

☐ **M57** On a :

A $c(-x)$ vaut $c(x)$ ou $-c(x)$, selon la valeur de x, mais n'est pas toujours égal à $c(x)$ et pas toujours égal à $-c(x)$

B $c(-x) = -c(x)$ pour tout réel x

C $c(-x) = c(x)$ pour tout réel x

D Aucune des trois autres affirmations n'est vraie.

☐ **M58** On peut affirmer que pour tout réel x, le réel $c(x)$ est égal à :

A $c(x) \cos \frac{x}{2^n}$ B $c(x/2) \cos \frac{x}{2}$ C $c(x) \cos x$ D $c(x \cos x)$ E $c\left(\frac{x}{2} \cos x\right)$

Minoration de c près de 0

Principe (admis) : Dans le plan, la longueur d'une courbe joignant les points d'extrémités A et B est supérieure ou égale à la distance du point A au point B, autrement dit à la longueur du segment $[AB]$.

☐ **M59** En appliquant le principe précédent au cercle trigonométrique, on obtient :

A $|\cos x| + |1 - \sin x| \leq |x|$ pour tout réel x.

B $|1 - \cos x| + |\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x.

C $\sqrt{(\cos x)^2 + (1 - \sin x)^2} \leq |x|$ pour tout réel x.

D $\sqrt{(1 - \cos x)^2 + (\sin x)^2} \leq |x|$ pour tout réel x.

E $\sqrt{(\cos x)^2 + (\sin x)^2} \leq |x|$ pour tout réel x.

☐ **M60** L'inégalité la plus précise que l'on peut en déduire est :

A $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x$ pour tout réel x

B $1-\frac{x}{2}\leq \cos x$ pour tout réel x

C $1-x\leq \cos x$ pour tout réel x

D $1-x^2\leq \cos x$ pour tout réel x

E $1-\frac{x^2}{4}\leq \cos x$ pour tout réel x

△ **L7** Justifier en une ligne que la fonction $\ln$ est concave.

△ **L8** Donner sans justification ce que représente la droite d'équation $y=x-1$ vis-à-vis de la représentation graphique de la fonction $\ln$.

On obtient alors que $\ln(u)\leq u-1$ pour tout réel strictement positif u, ce que l'on admettra.

☐ **M61** On a donc, pour tout réel strictement positif v :

A $\ln v\geq 1-\frac{1}{v}$

B $\ln v\geq -v+1$

C $\ln v\leq \frac{1}{v}-1$

D $\ln v\geq -v$

E $\ln v\geq -v-1$

☐ **M62** L'inégalité la plus précise que l'on puisse en déduire, pour tout élément x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, est alors :

A $\ln(\cos x)\geq -\frac{x^2}{\cos x}$

B $\ln(\cos x)\geq -\frac{x^2}{2}$

C $\ln(\cos x)\geq -\frac{x^2}{2\cos x}$

D $\ln(\cos x)\geq -x^2$

E $\ln(\cos x)\geq -2\frac{x^2}{\cos x}$

△ **R5** Soit x un élément de l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. En vous appuyant sur vos réponses antérieures (dont on n'attend pas de justification), démontrer que $c(x)>0$ et plus précisément que $c(x)\geq \exp\left(-\frac{x^2}{6\cos x}\right)$.

Conclusion sur le signe de c

△ **R6** Un entier naturel $n\geq 1$ étant donné, on suppose acquis que, pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, la fonction c est strictement positive sur $]2k\pi,(2k+1)\pi[$, et strictement négative sur l'intervalle $](2k+1)\pi,(2k+2)\pi[$.

Déterminer le signe de c sur les intervalles $]2n\pi,(2n+1)\pi[$ et $](2n+1)\pi,(2n+2)\pi[$. Décrire ensuite, pour un réel x, le signe de $c(x)$ en fonction du signe de x et de la partie entière de $\dfrac{x}{\pi}$ (en justifiant votre réponse, bien entendu).