« Qui parle sème, qui écoute récolte. » Pythagore de Samos

Chapitre V — Limites de fonctions-Asymptotes

I – Limite d'une fonction à l'infini

A – Limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$

Définition

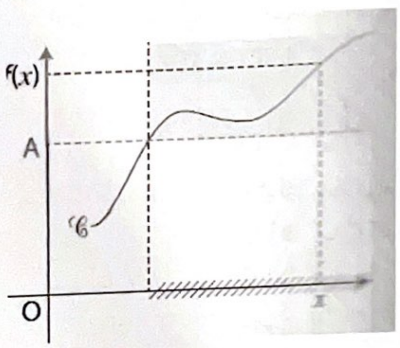
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $]w\ ;\ +\infty[$, où *w est un réel.*

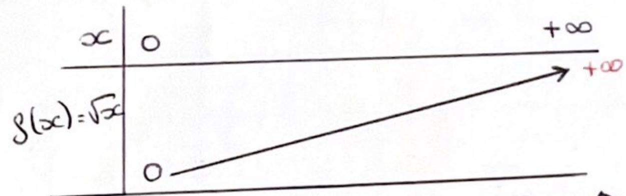
Dire que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ signifie que les valeurs prises par f finissent par dépasser n'importe quel nombre réel A (aussi grand soit-il) dès que x est suffisamment grand.

En des termes plus savants, tout intervalle ouvert de la forme : $]A\ ;\ +\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On notera : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ pour décrire ce phénomène.

Illustration graphique :





Propriété (limites de fonctions de référence)

♥♥♥ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} k = k$ ♥♥♥

Remarque : à partir de maintenant, on fera figurer ces résultats dans les tableaux de variation des fonctions.

Exemple : dresser le tableau de variation complet de la fonction racine carrée.

Preuve: pour $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$:

Autre preuve ultérieurement.

DÉMONSTRATION AU PROGRAMME **Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$**

Puisque $e > 1$, la suite géométrique (e^n) a pour limite $+\infty$.
Donc, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$: $e^n > A$.
Pour x assez grand, $x \geqslant n_0$, d'où $e^x \geqslant e^{n_0}$ par croissance de la fonction exponentielle, et par suite $e^x > A$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Définition

De même, on dira que f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (on notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$),

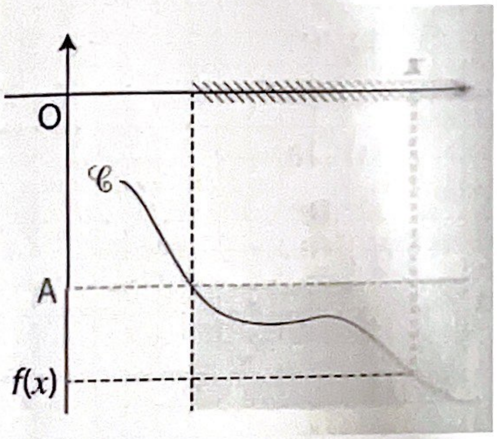
pour signifier que, les valeurs $f(x)$ deviennent inférieures à n'importe quel nombre arbitrairement fixé aussi petit soit-il, dès lors que x est suffisamment grand.

En des termes plus savants, tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty\ ;\ A[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

$f(x) = -x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

$f(x) = -e^{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}(-e^{x}) = -\infty$

Illustration graphique :



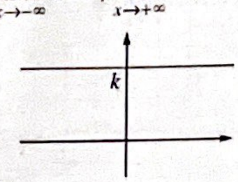
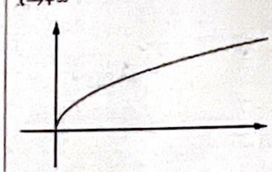
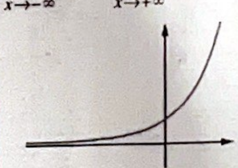
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

***Propriété* (limites de fonctions de référence)**

$\forall k \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to-\infty} k = k$ $\qquad$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} ; \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty}$

Illustration graphique :

Fonction $x \mapsto k$	Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$	Fonction $x \mapsto e^x$
$\lim\limits_{x\to-\infty} k = k$; $\lim\limits_{x\to+\infty} k = k$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
		

⚠ $e^{x} > 0$

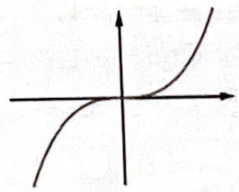
La limite en $-\infty$ de la fonction exponentielle est admise provisoirement et sera justifiée plus loin.

si $x \leq x_0$ alors
$L-\varepsilon \leq f(x) \leq L+\varepsilon$

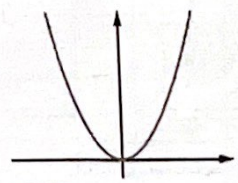
Fonction $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$

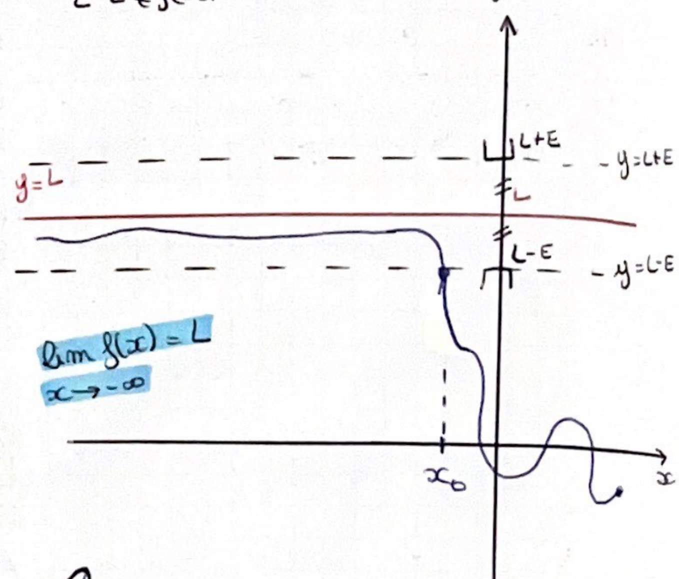
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

• Si n est impair :
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$



• Si n est pair :
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$





$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

B – Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel L en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (et on dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$).

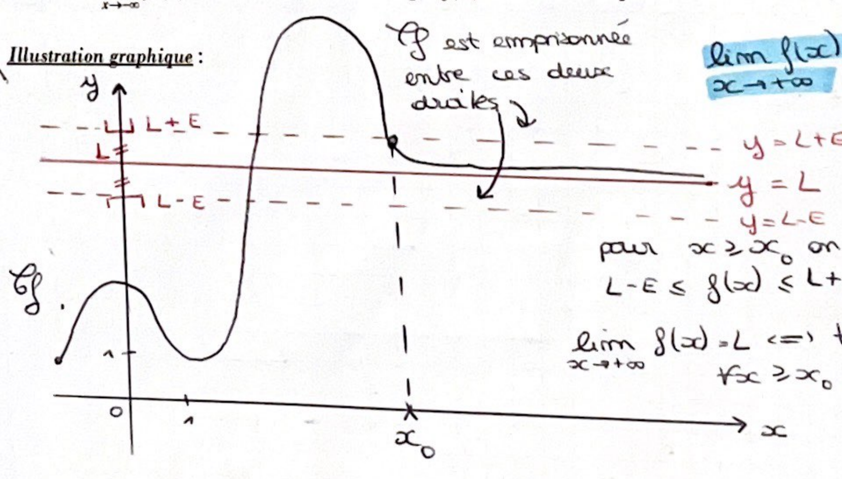
Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel L en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment petit.

On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ (et on dit encore que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$).

Illustration graphique :

C_f est emprisonnée entre ces deux droites

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$



pour $x \geq x_0$ on a
$L-\varepsilon \leq f(x) \leq L+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R},$
$\forall x \geq x_0,\ L-\varepsilon \leq f(x) \leq L+\varepsilon$

Concrètement, pour x suffisamment grand, la portion de C_f correspondante à ces valeurs de x reste entièrement emprisonnée dans la bande formée par les droites horizontales délimitant l'intervalle ouvert contenant L.

Propriété (limites de fonctions de référence)

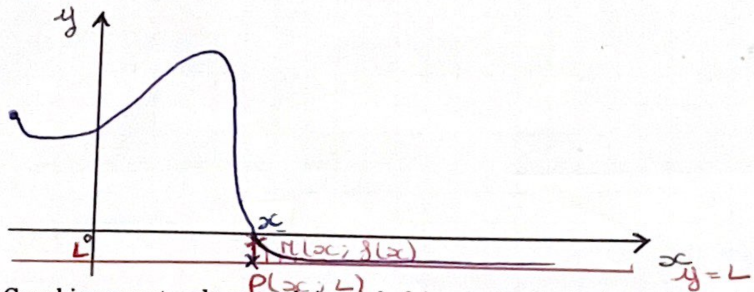
$$\heartsuit\heartsuit\heartsuit \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ \heartsuit\heartsuit\heartsuit$$

Remarque : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ sera justifiée ultérieurement au paragraphe limite de fonctions composées.

***Définition** (à mémoriser par cœur)*

♥♥♥ Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, avec $L \in \mathbb{R}$, on dit que la droite (d) d'équation : $y = L$ est ASYMPTOTE HORIZONTALE à la courbe C_f représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$. → qd $x \to +\infty$

Illustration :



la distance MP se rapproche de 0.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que C_f et la droite horizontale d'équation : $y = L$ se confondent quasiment pour les grandes valeurs de x : plus précisément, la longueur MP tend vers 0 dès lors que x tend vers $+\infty$:

De même, si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est ***asymptote horizontale*** à C_f en $-\infty$.

Remarque

En traçant la courbe représentative d'une fonction à l'aide d'une calculatrice, on peut conjecturer la présence d'asymptote horizontale.

la droite d'éq $y = 0$ (l'axe des abs) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$

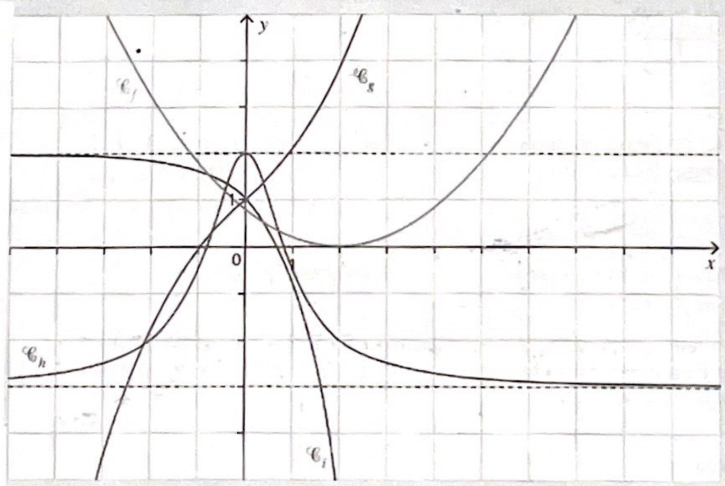
// à l'axe des abs.

Exemple 1 : Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

On sait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Qu'en déduit-on en termes d'asymptote ?

1 Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions représentées ci-dessous.

exo 1)



2 Certaines courbes représentatives semblent-elles admettre des asymptotes horizontales ? Si oui, donner leurs équations.

3) Dresser les tableaux de variation complets des fonctions f, g, h définies sur $\mathbb{R}$.

exo 1 :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -3$ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -3$

2) la droite d'éq $y = -3$ est asy à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$ et $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = \alpha$ $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$

2) la droite d'éq $y = 2$ est asy à $\mathcal{C}_i$ en $-\infty$

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$i(x)$	α	↘	$-\infty$

Exercice 2

Énoncé On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

1. Quelle est la limite de f en $+\infty$? en $-\infty$?
2. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Proposer une courbe pouvant représenter la fonction f.

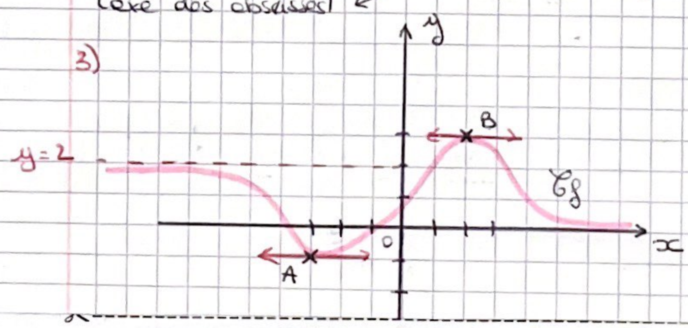
x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	-1	↗	3	↘	0

1) $\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ et $\underbrace{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2}$

2) la droite d'éq $y = 0$ est asy à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (axe des abscisses)

la droite d'éq $= -2$ est asy à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$

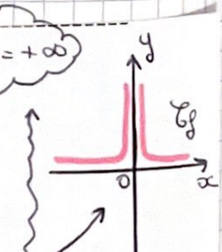
3)



C – Limite infinie en un réel a

Exemple

constat : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Intéressons-nous aux valeurs prises par f lorsque x est proche de 0, sans jamais valoir 0.

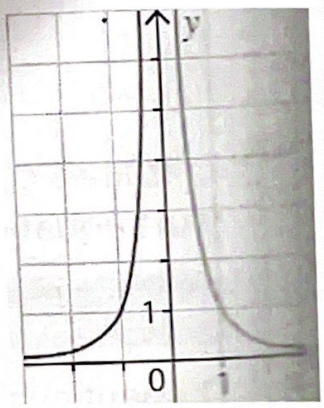
x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	-10^{-3}	0	10^{-3}	$0{,}01$	$0{,}1$
$f(x)$	100	10 000	1000 000	☠	1000 000	10 000	100

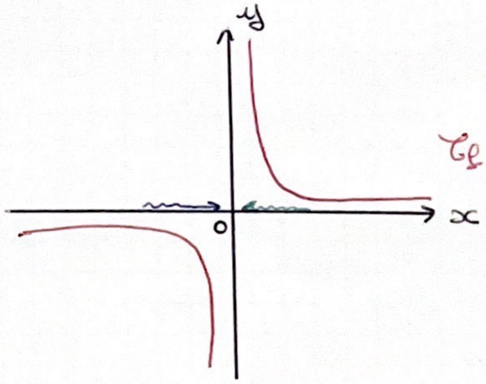
Définition

Soit a un nombre réel. Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en a, signifie que tout intervalle de la forme $]A\ ;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Illustration : Ici, $\lim\limits_{x\to\ldots} f(x) = +\infty$





Limite à gauche d'un point – Limite à droite d'un point

Quand x est proche de 0, qu'en est-il de $\frac{1}{x}$?

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ (appelée limite à droite de la fonction inverse). (on se rapproche de 0 $x \to 0$ mais $x>0$).

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ (appelée limite à gauche de la fonction inverse).

Remarque : la notation $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ peut se noter : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. De même, la notation $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ sera notée : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

♥ ***Formulaire*** : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$

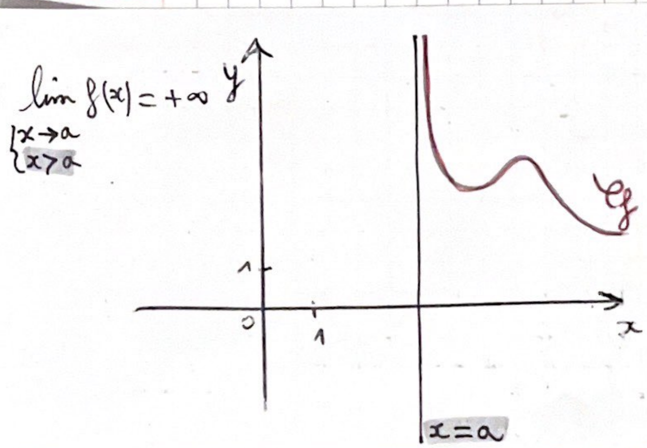
Définition

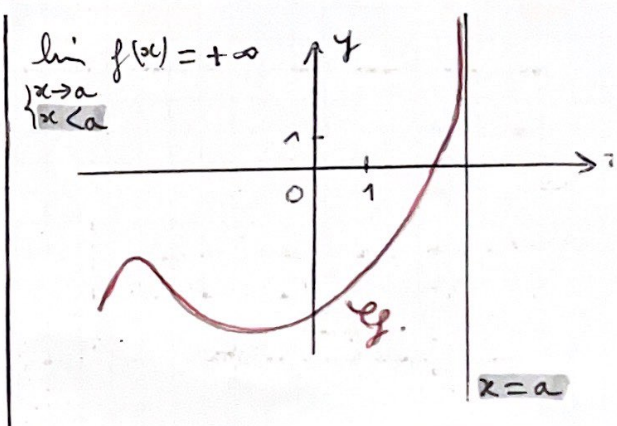
Soit a un réel.

// à l'axe des ordonnées

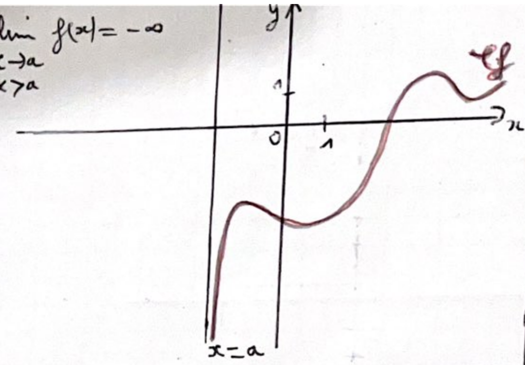
Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $(-\infty)$, on dit que la droite verticale d'équation : $\boldsymbol{x = a}$ est ***asymptote verticale*** à C_f

Illustrat° :

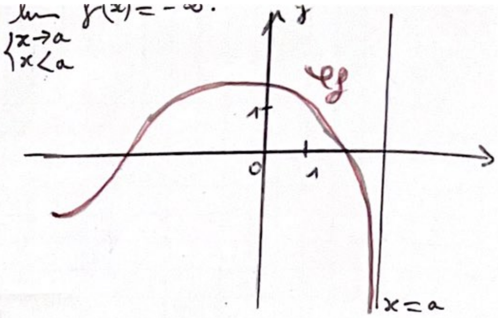




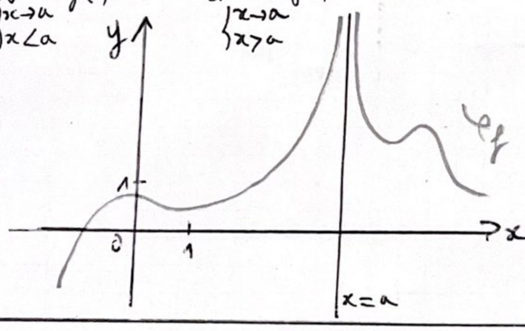
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$



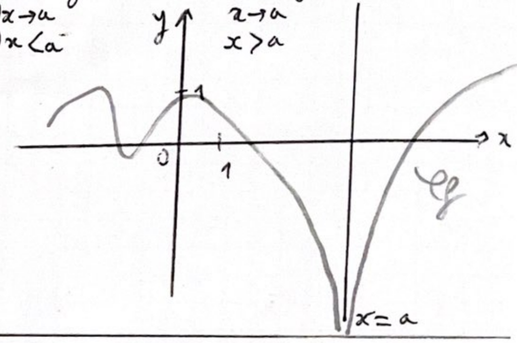
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty.$



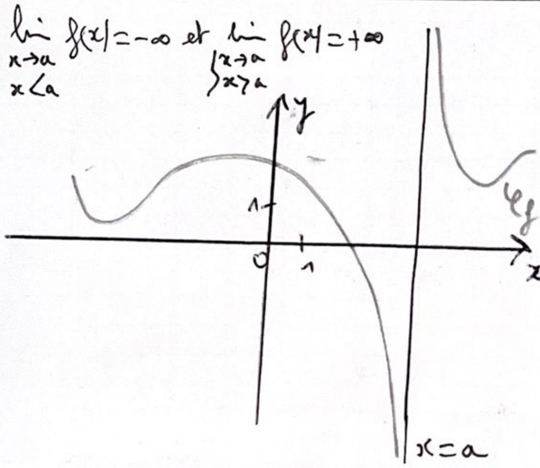
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$



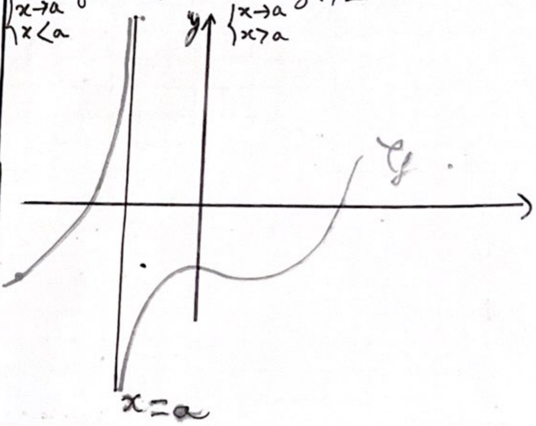
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

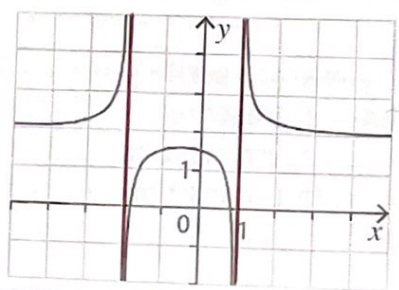


$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$



Exercice 3

On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.



1. Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{\begin{cases} x \to -2 \\ x < -2 \end{cases}} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\begin{cases} x \to 1 \\ x < 1 \end{cases}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{\begin{cases} x \to -2 \\ x > -2 \end{cases}} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{\begin{cases} x \to 1 \\ x > 1 \end{cases}} f(x) = +\infty$

2) La droit d'éq $y = 2$ est ash à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$
La droite d'éq $x = -2$ " as verticale à $\mathcal{C}_f$.
" " " $x = 1$ " " " " " "

3)

x	$-\infty$		-2		$-0{,}5$		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1{,}5$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

fct° décroît de $+\infty$ = impossible.
fct° ↗ de $-\infty$ = impossible.

Exercice 4

Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

1. Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Donner les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.
3. Construire une courbe susceptible de représenter la fonction f.

1)
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

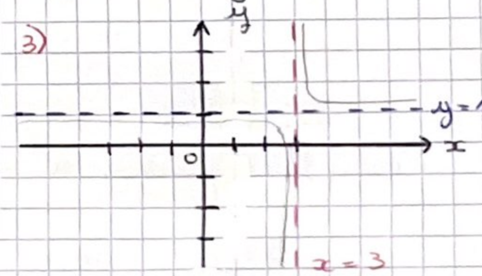
$\lim\limits_{\begin{cases} x \to 3 \\ x < 3 \end{cases}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\begin{cases} x \to 3 \\ x > 3 \end{cases}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2) La droite d'éq $y = 1$ est as h à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
La droite d'éq $x = 3$ est as v à $\mathcal{C}_f$

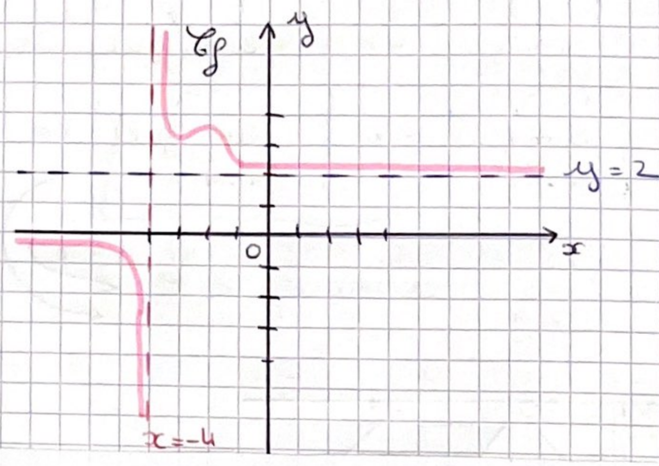
3)



Exercice 5

Donner une représentation graphique possible d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-4\}$ telle que :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{\begin{cases} x \to -4 \\ x < -4 \end{cases}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\begin{cases} x \to -4 \\ x > -4 \end{cases}} f(x) = +\infty$.



III – Calculs de limites

A – Opérations sur les limites

Toutes les règles sur les limites vues au chapitre *"suites"* se généralisent sans difficulté aux fonctions.

Les tableaux suivants résument les différents cas de figures :

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition.
a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ, ℓ' désignent des nombres réels.

A Somme et produit de deux fonctions : règles admises

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = \dots$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Donnons quelques exemples de formes indéterminées pour la somme et le produit :

ex : somme :

mon $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ $\quad f(x) = x^2$, $g(x) = x$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x(x+1)) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$.

Exercice 6

Calculer les limites suivantes.

1 a. $\lim\limits_{x\to-\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2)$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3\right)$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 7x + 1)$

2 a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(2 - x)$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-3)\left(2 - \frac{1}{x}\right)$ c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (3 - e^x)(2 + e^x)$

3) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de : $f(x) = e^x + e^{-x}$, puis de $g(x) = x(1+e^{-x})$.

1) a) Par lr : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ dc $\lim\limits_{x\to-\infty} 7x^3 = -\infty$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ dc $\lim\limits_{x\to-\infty} -9x^2 = -\infty$ lp

par ls $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (7x^3 - 9x^2 + 2) = -\infty}$

b) par lr : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (2x+3) = 3$

par ls $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3\right) = -\infty}$

c) par lr : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (7x+1) = +\infty$

par ls : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 7x + 1) = +\infty}$

2) a) par lr : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$

par lp $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,(2-x) = -\infty}$

b) par lr : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-3) = -3$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

dc par lp et ls : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$

par lp $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left((x-3)\left(2 - \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty}$

c) par lim ref : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

par ls $\lim\limits_{x\to-\infty} (3 - e^x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2 + e^x) = 2$

par lp $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (3 - e^x)(2 + e^x) = 6}$

$f(x) = e^x + e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x}$

par lr : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ par lq $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

par ls : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ car $e^x > 0$ par lq $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

par ls $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + e^{-x} = +\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Expliquer pourquoi on est ici en présence d'une forme indéterminée pour la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

---

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x + 2) = -\infty$

donc F.I pr la somme.

b) Par facto partielle :

$f(x) = x(x^2 - 3) + 2$

par lr $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

par lp et ls $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Par facto globale :

$f(x) = \underset{+\infty}{x^3} \Big(\underset{1}{1} - \underbrace{\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}_{0} \Big)$

Remarque : lorsqu'on est en présence d'une *FI*, on ne peut pas conclure directement. Pour lever l'indétermination, on utilisera les transformations d'écriture vues au chapitre sur les suites (en particulier, la technique de factorisation, puis de simplification, ces deux étapes lèvent souvent l'indétermination !).

B Quotient de deux fonctions : règles admises

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ldots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ldots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Donnons quelques exemples de formes indéterminées pour le quotient :

Exercice 8

f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-2}$

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b) Déterminer la limite de f en 2. Interpréter graphiquement ce résultat.
c) Déterminer la limite de f en 4.

a) $\underset{x>2}{f(x)} = \dfrac{5x+1}{x-2} = \dfrac{\cancel{x}\left(5+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{5+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$

par lr : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ par ls : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5+\dfrac{1}{x}\right) = 5$

par lq : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5}$ $\lim\left(1-\dfrac{2}{x}\right) = 1$

la droite d'eq $y = 5$ est ASH à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b) on cherche ici $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ car $x \in \,]2\,;+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (5x+1) = 11$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2) = 0^+$

dc par lq $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty}$

la droite d'eq $x = 2$ est ASV à $\mathcal{C}_f$

c) $\lim\limits_{x\to 4}(5x+1) = 21$ $\qquad \lim\limits_{x\to 4}(x-2) = 2$

par lq : $\boxed{\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \frac{21}{2}}$

Exercice 9

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{6x^2+3x-5}{2x^2+7}$.

Démontrer que la droite d'équation : $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et également en $-\infty$.

cherchons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; but : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(6+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{7}{x^2}\right)} = \frac{6+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{7}{x^2}}$$

or par lr : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

par ls et lp : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right) = 6$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{7}{x^2}\right) = 2$

donc par lq : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3}$ idem en $-\infty$

↳ ⟺ Cela signifie : la droite d'eq $y = 3$ est ASH à C_f en $+\infty$

B – Composition et limites

Une composée de deux fonctions est un enchaînement de ces deux fonctions l'une après l'autre.

Par exemple, soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

L'expression $f(x)$ s'obtient en appliquant à x la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2 + 1$ suivie de la fonction racine carrée notée v définie par $v(X) = \sqrt{X}$.

Schéma :

$$x \xrightarrow{u} \underbrace{x^2+1}_{X} \xrightarrow{v} \sqrt{X} = v(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$\lim (x^2+1) = +\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

par l de fct° compo

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a donc : $f(x) = v(u(x))$, on dit que f est la composée de u suivie de v.

***Théorème* (limite de composée de fonctions)**

Soit f et g des fonctions que l'on peut faire s'enchaîner.
a, b et c désignent soit des nombres réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$

Ce théorème assez intuitif est admis, une preuve rigoureuse sera donnée l'année prochaine.

Exercice 11

Déterminer : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+e^x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} e^{\frac{2x}{x-3}}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

or :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $f(x) = \sqrt{x + e^x}$

ls $\lim\limits_{x \to +\infty} x + e^x = +\infty$

or : $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ dc par l de fct° compo $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1$ par lr et s et p : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-1) + 1 = +\infty$

dc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty$

or lr $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ dc par lfc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} e^{\frac{2x}{x-3}}$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} 2x = 6$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} (x-3) = 0^-$

par lq : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{2x}{x-3} = -\infty$

or $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ dc par lfc. : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} e^{\frac{2x}{x-3}} = 0}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

or $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

par lr $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ par ls $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$ dc par lfc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$

par lq : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 1$ dc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1}$

Prouvons maintenant grâce au théorème de composition des limites que : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$:

$e^x = e^{-(-x)} = \dfrac{1}{e^{-x}}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = +\infty$

dc par lfc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

dc par lq : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Exercice 12

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x+1}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$.

2) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Déterminer la limite de h en : $+\infty$; $-\infty$; 0 (on distinguera les limites à gauche et à droite en 0).

3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+4}{2x+1}}$.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty$

$\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par lfc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1} = 0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty$ dc par lfc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x+1} = +\infty}$

$\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

2) • $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{X\to0} e^X = e^0 = 1$ dc par lfc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$

pareil en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ dc par lfc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ dc par lfc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

3) $g(x) = e^{\frac{-x+4}{2x+1}}$

or $\dfrac{-x+4}{2x+1} = \dfrac{\cancel{x}\left(-1+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1+\frac{4}{x}}{2+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+\frac{4}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x} = 2$

par lq : $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{-x+4}{2x+1}\right) = -\frac{1}{2}$

enfin : $\lim\limits_{X\to -\frac{1}{2}} e^X = -\frac{1}{2}$ de par lfc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

C – Théorèmes de comparaison et limites

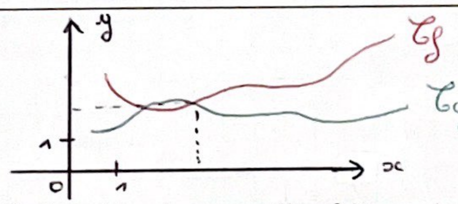
Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions.

Si pour x suffisamment grand, $f(x) \geq g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Si pour x suffisamment grand, $f(x) \leq g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Illustration :



Remarque : **ce théorème s'étend sans problème lorsque x tend vers $-\infty$ en changeant le premier point de la condition en : pour x suffisamment petit, ou encore même lorsque x tend vers un réel a.**

Exemple : **1) Déterminer** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **où** $f(x) = x^2 + \cos(x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x - 3\sin(x))$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(3+2\sin(x))$

Question : **Si** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, **peut-on en déduire que f est croissante à partir d'un certain stade ?** Faux !

1) $f(x) = x^2 + \cos(x)$

⚠ $\left\{\begin{array}{l}\sin \\ \cos\end{array}\right.$ n'admet pas de limites en $+\infty$; $-\infty$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(x) \geq -1$

$x^2 + \cos(x) \geq -1 + x^2$

$f(x) \geq -1 + x^2$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} (-1+x^2) = +\infty$ d'ap le th de comp $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $g(x) = 5x - 3\sin(x)$.

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$3 \geq -3\sin(x) \geq -3$ car $-3 < 0$

$3+5x \geqslant 5x - 3\sin(x) \geqslant 5x-3$

or $\lim_{x \to -\infty} (3+5x) = -\infty$ dc d'ap le th de comp $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$

3) $h(x) = e^{x}(3+2\sin(x))$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$ car $2>0$

$3-2 \leq 3+2\sin(x) \leq 3+2$

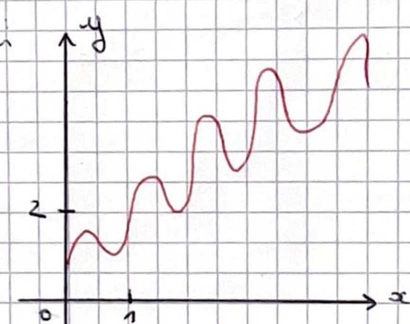
$1 \leq 3+2\sin(x) \leq 5$

donc $e^{x} \leq e^{x}(3+2\sin(x)) \leq 5e^{x}$ car $e^{x}>0$.

ainsi $e^{x} \leq h(x)$

or $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, d'ap le th de comp $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

question fausse



💣 💣 💣 Un calcul de limite ne permet JAMAIS de prévoir le sens de variation d'une fonction ! 💣 💣 💣

Théorème des gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I de la forme : $]a\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ b]$. (a et b désignent des réels, ou bien $+\infty$ pour b, et $-\infty$ pour a), et enfin, soit ℓ un <u>réel</u>.

Si pour x suffisamment grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell$
Alors, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

De même, on a l'énoncé analogue suivant :

Si pour x suffisamment petit, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \ell$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \ell$
Alors, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

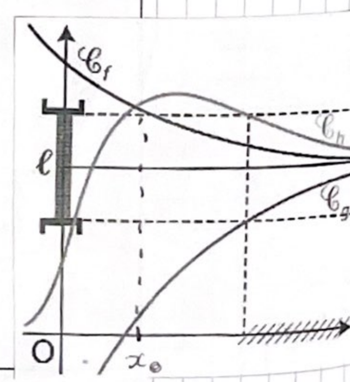


Illustration :

Remarque **: Retenez que pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut que 3 conditions soient remplies :**

- **Avoir l'encadrement $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de $+\infty$.**
- **Que les fonctions g et h admettent des limites finies en $+\infty$.**
- **Que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$**

Mêmes conditions au voisinage de $-\infty$ et en un point.

Exercice 13

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x \geq 1$: $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes, et interpréter graphiquement les résultats obtenus :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ où $g(x) = (e^{-x}\cos(x) + 2)$

✂---

1) pour $x \geq 1$: $1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$

par cr : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

donc les $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

d'ap le th des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2) a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

pour $x > 0$: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$

par cr $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

d'ap le th des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

l'axe des abs est ASH à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

b) $g(x) = (e^{-x}\cos(x) + 2)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$-e^{-x} \leq e^{-x}(\cos(x)) \leq e^{-x}$ car $e^{-x} > 0$

$2 - e^{-x} \leq e^{-x}\cos(x) + 2 \leq e^{-x} + 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ par les $\lim\limits_{x \to +\infty}(2 - e^{-x}) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^{-x} + 2) = 2$

d'ap le th des G : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$ la droite d'eq $y = 2$ est ASH à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

D- Croissances comparées et nouvelles limites

A l'aide d'étude de fonctions, démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Étudier les variations de f.

b) En déduire que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

c) En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ (nouvelle justification).

1) a) $f(x) = e^x - x - 1$ avec $x \in \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1$

étude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x - 1 \geqslant 0$

$e^x \geqslant e^0$

$x \geqslant 0$ car fct e ↗

$f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		0	↗	

$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

b) grâce à a) : f admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$ ce qui signifie : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geqslant 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$ $e^x - x - 1 \geqslant 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{e^x \geqslant x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1) = +\infty$ et $e^x \geqslant x + 1$ d'ap le th de comp : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

♥♥♥ ***Propriété*** ♥♥♥

1) $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$

prop de croissance comparée

2) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0}$

Preuve du 1) :

2. g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$.

a) Déterminer la fonction dérivée de g. Déduire de la question **1.** que g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

Preuve du 2) : On se ramène au cas 1) :

a) Déterminer la fonction dérivée de g. Déduire de la question **1.** que g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

2) a) $x \geq 0$, $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$

$g'(x) = e^x - \frac{1}{2} \times 2x = e^x - x$

or cf 1) : $e^x \geq x+1$ et $x+1 \geq x$

$e^x \geq x$ dc $e^x - x \geq 0$ dc $g'(x) \geq 0$.

dc g ↗ sur $\mathbb{R}$.

b)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	1	↗	

$g(0) = 1$

g croît sur $[0 ; +\infty[$ et $g(0) = 1$

dc $\forall x \geq 0$ $g(x) \geq 1$

$g(x) \geq 1$

$e^x - \frac{1}{2}x^2 \geq 1 \geq 0$

$e^x \geq \frac{1}{2}x^2$

pour $x > 0$ $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}$

$\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{2}x$

preuve 2) $xe^x = xe^{-(-x)} = x \times \frac{1}{e^{-x}} = \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-(-x)}{e^{-x}}$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ et d'ap 1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ dc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

par lim de compo $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(-x)}{e^{-x}} = 0$ dc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{(-x)}{e^{-x}}\right) = 0$

dc $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Propriété (croissance comparées)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Remarque : ces deux résultats contiennent ceux de la propriété précédente ($n = 1$ dans cette dernière !).

$e^{1000} > 1000^{100}$

Par exemple, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}} = +\infty$

Exercice 14

1) Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$; $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

2a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x^4$ .Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2b) Déterminer la limite de la fonction k en $+\infty$ où $k(x)=x+2 - e^x$.

3) g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x^2 + 2x +3$.

a) Vérifier que pour $x>0$, $g(x) = x^2(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de g en $-\infty$.

1) • Par croissance comparée : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

fct° inverse

Par quotient : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

• x^3e^{-x} $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$) FI pr le prdt.

$x^3e^{-x} = \frac{x^3}{e^x}$ et par cc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (x^3e^{-x}) = 0$

• $\frac{e^{3x}}{x} = \frac{e^{3x}}{3x} \times 3$

or $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ et par cc $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

par compo $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = +\infty$

par prdt $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{3x}}{3x} \times 3\right) = +\infty$ dc $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty$

• $\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty}$ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

2a) $f(x) = e^x - x^4$) FI : $\infty - \infty$

$= x^4\left(\frac{e^x}{x^4} - 1\right)$ par c.c $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x^4} - 1\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (x^4) = +\infty$

par ep $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 \left(\frac{e^x}{x^4} - 1\right)\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

8b) $k(x) = x + 2 - e^x$

pour $x > 0$ $k(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$

on par cr et cc.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

par somme et pdt $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ par ep $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -\infty$

3a) pareil.

3b) $g(x) = e^x - x^2 + 2x + 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ de $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+3) = -\infty$ par ls $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x)) = -\infty$

Exercices de synthèse de type bac

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{e^x - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f en 0.

2. a. Montrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes. En donner une équation.

4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de f.

5) Etudier la position relative de C_f et de son asymptote en $+\infty$.

6) Donner le portrait-robot de C_f.

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{sur }]0 ; +\infty[$$

1) on cherche ici $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2e^x + 1}{e^x - 1}$

or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ dc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^x = 1$

par produit et somme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2e^x + 1) = 3$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (e^x - 1) = 0^+$

par lq : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 1}\right) = +\infty$

2a) $x > 0$: $\frac{2e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{\cancel{e^x}\left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

2b) FI avec la forme initiale.

on q 2a) $f(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

dc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + e^{-x}) = 2$ et $(1 - e^{-x}) = 1$

par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

3) rep 1) : la droite d'éq $x = 0$ est as V à $\mathcal{C}_f$

rep 2b) : " " " $y = 2$ est as H à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

4a) $x > 0$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = 2e^x + 1$ et $u'(x) = 2e^x$
$v(x) = e^x - 1$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x(2e^x + 1)}{(e^x - 1)^2}$

$f'(x) = \frac{\cancel{2e^{2x}} - 2e^x - \cancel{2e^{2x}} - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$

4b) $x>0$

$(e^x-1)^2>0$

$e^x>0$

$-3e^x<0$ car $-3<0$

règles signes quotient : $\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0$

$f'(x)<0$

dc $f \searrow$ sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow 2$

5) (d) a pr eq $y=2$

$f(x)-g(x) \Rightarrow$ signe $f(x)-g(x)>0$: $\mathcal{C}_f$ au dessus $\mathcal{C}_g$

$f(x)-g(x)<0$: $\mathcal{C}_g$ " " $\mathcal{C}_f$.

Ici : $f(x)-2 = \dfrac{2e^x+1}{e^x-1} - 2 = \dfrac{2e^x+1}{e^x-1} - \dfrac{(2e^x-2)}{e^x-1} = \dfrac{3}{e^x-1}$

or $x>0$ dc $e^x>e^0$ ($e \nearrow$ sur $\mathbb{R}$)

dc $e^x>1$

$e^x-1>0$

dc $\dfrac{3}{e^x-1}>0$

conclu : $x>0$ $\left.\begin{array}{l} f(x)-2>0 \\ f(x)>2 \end{array}\right)$ $\mathcal{C}_f$ au dessus de sa ASH sur $]0;+\infty[$.

6)