exercice II La taille d'une population de rongeurs exprimée en centaines d'individus, est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t}+2}$, où t représente le temps écoulé depuis l'année 2015, exprimé en années.

1. a. Calculer $f(0)$ et interpréter ce résultat.

b. Montrer que : $f(t) = 3 - \dfrac{6}{e^{0,5t}+2}$.

c. En déduire la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{3e^{0,5t}}{\left(e^{0,5t}+2\right)^2}.$$

b. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction rongeur retourne l'année à partir de laquelle il y aura plus de 250 rongeurs.

```
from math import*
def rongeur():
    t=0
    p=1
    while ........:
        t=t+1
        p=3*exp(0.5*t)/(exp(0.5*t)+2)
    return(........)
```

1)a) $f(0) = \dfrac{3\times e^0}{e^0+2} = \dfrac{3}{3} = \boxed{1}$

En l'an 2015, il y avait 100 rongeurs.

b) $3 - \dfrac{6}{e^{0,5t}+2} = \dfrac{3e^{0,5t}+6-6}{e^{0,5t}+2}$

$f(t) = \dfrac{3e^{0,5t}}{e^{0,5t}+2}$

c) F. I

dc $f(t) = 3 - \dfrac{6}{e^{0,5t}+2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 0,5t = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

par compo et somme

$\lim\limits_{t\to+\infty} (e^{0,5t}+2) = +\infty$ / ~~lim~~

par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-6}{e^{0,5t}+2} = 0$

par ls $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = 3$

2a) on l'admet :

$f'(t) = \dfrac{3e^{0,5t}}{(e^{0,5t}+2)^2}$

b) $\forall t \in \mathbb{R}$ ou $t \geq 0$: $e^{0,5t} > 0$ et $3 > 0$

$(e^{0,5t}+2)^2 > 0$ $f'(t) > 0$

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	3

3) while $(p \leq 2,5)$ p <= 2,5

return (2015+t)

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{ax+b}$, où a et b sont deux constantes réelles.

Les points $B(100 ; 100)$ et $C\left(50 ; \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ appartiennent à la courbe de f.

1. Expliquer pourquoi le couple $(a ; b)$ est solution du système $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -0,5 \end{cases}$.

2. Résoudre le système et en déduire que, pour tout réel x, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout réel x, on a :
$$f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$
5. En déduire la limite de f en $-\infty$.
6. Dresser le tableau de variation de f.

$\circledast$ $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$

Interpréter graphiquement le résultat de la question 5).

1) $B(100, 100) \in \mathcal{C}_f \iff f(100) = 100 \iff 100e^{100a+b} = 100$

$\iff e^{100a+b} = \frac{100}{100} = 1$

$\iff e^{100a+b} = e^0$

$\iff 100a + b = 0$

De m̂ : $C(50; \frac{50}{\sqrt{e}}) \in \mathcal{C}_f \iff f(50) = \frac{50}{\sqrt{e}} \iff 50e^{50a+b} = \frac{50}{\sqrt{e}}$

$\iff e^{50a+b} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $\circledast$

$\iff e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \iff 50a+b = -\frac{1}{2}$

ainsi $(a; b)$ vérifie le système $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -0,5 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -100a \\ 50a - 100a = -0,5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{-0,5}{-50} = 0,01 \\ b = -100 \times 0,01 = -1 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{(0,01; -1)\}$ Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{0,01x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (0{,}01x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ par compo: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{0{,}01x-1} = +\infty$

enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ par ep: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{0{,}01x-1}\right) = +\infty$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$: $\frac{100}{e}\times 0{,}01xe^{0{,}01x} = \frac{1}{e}xe^{0{,}01x} = e^{-1}\times x\times e^{0{,}01x}$

$\boxed{xe^{0{,}01x-1}} = f(x)$

dc $f(x) = \frac{100}{e}\times 0{,}01xe^{0{,}01x}$

ou M2: $f(x) = xe^{0{,}01x-1} = x\times\frac{e^{0{,}01x}}{e^1} = \frac{x}{e}e^{0{,}01x}$

$= \frac{100}{e}\times 0{,}01xe^{0{,}01x}$ car $100\times0{,}01=1$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}01x = -\infty$ et par croissance comp $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

par compo : $\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}01xe^{0{,}01x} = 0$

dc par ep $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{100}{e}\times0{,}01xe^{0{,}01x}\right)=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

6) L'axe des abs (eq : $y=0$) est ASH à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

$f(x) = xe^{0{,}01x-1} = u(x)\times v(x)$

$u(x)=x$ $v(x) = e^{0{,}01x-1}$

où $u'(x)=1$ et $v'(x) = 0{,}01e^{0{,}01x-1}$

$f'(x) = u'v+uv' = e^{0{,}01x-1} + x\left(0{,}01e^{0{,}01x-1}\right)$

$= e^{0{,}01x-1}(1+0{,}01x)$

étude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{0{,}01x-1}>0$ dc $f'(x)$ a le m̂ signe que $(1+0{,}01x)$

or $1+0{,}01x\geq0$

$\iff x\geq\frac{-1}{0{,}01}$ car $0{,}01>0$

$\iff x\geq -100$

$f(-100) = -100e^{0{,}01\times(-100)-1}$
$= -100e^{-1-1} = -100e^{-2} = \frac{-100}{e^2}$

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-100}{e^2}$	↗	$+\infty$

Chapitre VI — **Continuité et théorème des valeurs intermédiaires**

I – Continuité d'une fonction

1 – Généralités sur la continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à l'intérieur de I.

Définition : f est dite continue en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

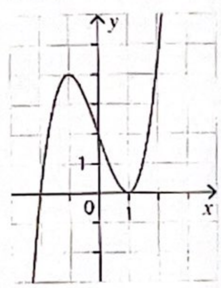
Ou encore, f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

En français, f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.

f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel a appartenant à I.

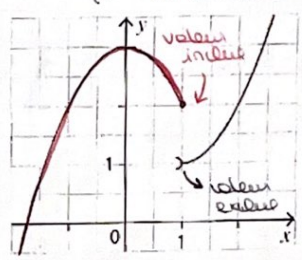
Illustration graphique de la notion de continuité

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x + 2$.



f est continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 \text{ si } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$



$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (3 - x^2) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x^2 - 2x + 2) = 1$

$2 \neq 1$ donc f n'a pas de limite en 1 donc f n'est pas continue en 1.

Montrons que f n'est pas continue en 1 :

Dans le second exemple, f n'est pas continue en 1, et donc f est non continue sur $\mathbb{R}$.

Concrètement, la continuité de f sur I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut être tracée sans avoir à lever le stylot.

Remarque : le terme continuité n'a pas été choisi de façon anodine, il signifie qu'il n'y a pas de *« coupure »* dans le graphe de f.

Post bac, f est continue en a se quantifie en : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R} \ [a - \alpha \leq x \leq a + \alpha \Rightarrow f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon]$

Exercice 1

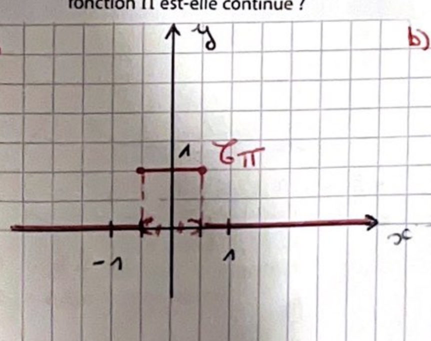
La **fonction porte**, notée Π, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}.$$

a) Dans un repère, tracer la courbe de la fonction Π.

b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction Π est-elle continue ?

a)



b) f est continue sur :

$]-\infty ; -\frac{1}{2}[$, $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

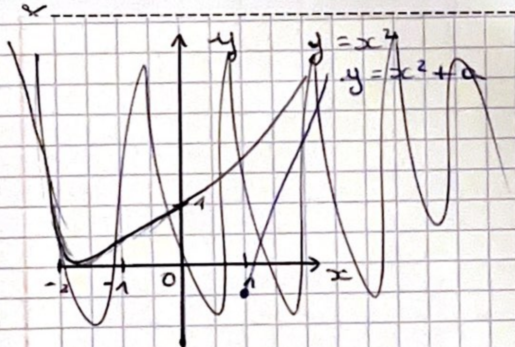
***Propriété** (admise)*

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$; $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- Sur chaque intervalle où elle est définie, une fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) est continue.
- De façon générale, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et k est un réel, alors les fonctions $kf + g, fg, f^n$ (n entier naturel non nul) sont continues sur I ; $\frac{f}{g}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ et si $g : J \to \mathbb{R}$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

De façon générale, la notion de continuité se transmet en faisant de l'algèbre sur des fonctions continues au départ.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x<1 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue en 1.



$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x+2)^2 = 9$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^2+a) = 1 + a$

or f est continue en 1 ssi : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = f(1)$

$9 = 1 + a$ dc $\boxed{a = 8}$

Théorème ***(être dérivable implique être continue)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.

1) Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

$f(a) + \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h = f(a) + f(a+h) - f(a)$

2) La réciproque est fausse !

Preuve : 1) Pour h non nul : $f(a+h) = f(a) + \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} h$ permet de conclure instantanément !

En effet : f est dérivable en a dc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ (chap 1)

dc $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h \right) = 0$ dc par les $\lim\limits_{h \to 0} \left(f(a) + \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = f(a)$

lp

dc $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

$\Rightarrow f$ est continue en a

2) La fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 !

$\lfloor x \rfloor$: partie entière de x

Comme cette année on ne manipule presque exclusivement que des fonctions dérivables, ces fonctions à disposition sont donc continues !

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, m \in \mathbb{Z}, m \leq x \leq m+1$

Il existe cependant des fonctions non continues (on dit discontinues) en un réel a.

$-8 \leq -7,4 \leq -7$ dc $\lfloor -7,4 \rfloor = -8$

si $0 \leq x < 1$: $\lfloor x \rfloor = 0$

si $1 \leq x < 2$: $\lfloor x \rfloor = 1$

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

A titre culturel, donnons un exemple de fonction discontinue en plusieurs valeurs :

__Remarque__ : **Dans un tableau de variations, une flèche sans coupure sur un intervalle indique la continuité de la fonction en question sur cet intervalle.**

__Complément__ : **au chapitre 1, nous avons appris à dériver les fonctions composées.**
Voici une preuve du théorème de dérivation des fonctions composées :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout réel x appartenant à I, on ait $u(x)$ qui appartienne à J.

Si u est dérivable sur l'intervalle I et f est dérivable sur J, alors la fonction $g = f\circ u$ est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a :

$g'(x)=(f\circ u)'(x)=u'(x)\times f'(u(x))$.

Preuve: Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I.

On calcule le taux d'accroissement de $f(u)$ entre a et $a+h$.

$$\frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

De plus :

— La fonction u est continue sur I donc en a et on a :

$$\lim_{h\to 0} u(a+h) = u(a) \iff \lim_{h\to 0} u(a+h) - u(a) = 0.$$

— La fonction f étant dérivable sur J, elle est dérivable en $u(a) \in J$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{u(a+h) - u(a)} \underset{H = u(a+h) - u(a)}{=} \lim_{H\to 0} \frac{f\big(u(a) + H\big) - f\big(u(a)\big)}{H} = f'\big(u(a)\big).$$

— Enfin, la fonction u est dérivable en a donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

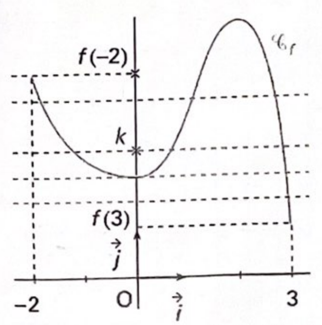
En conclusion, d'après les théorèmes sur les limites de produits :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\big(u(a+h)\big) - f\big(u(a)\big)}{h} = u'(a) \times f'\big(u(a)\big).$$

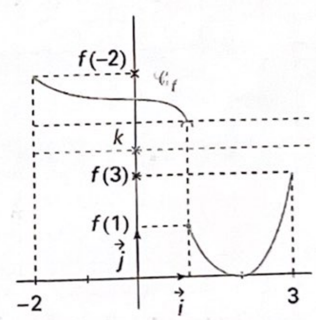
La fonction $f(u)$ est donc dérivable en $a \in I$ quelconque donc sur I tout entier.

__II – Le théorème des valeurs intermédiaires et ses innombrables conséquences__

__Approche graphique__ :



f est continue sur $[-2\,;3]$. Pour tout réel k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.



f est définie sur $[-2\,;3]$ mais elle n'est pas continue sur $[-2\,;3]$. Il existe des réels k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

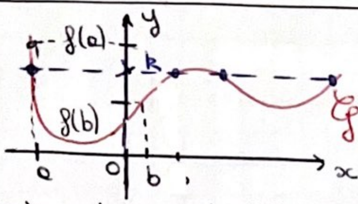
au ⊖ une

♥♥♥ *Théorème des valeurs intermédiaires* (noté T.V.I.) ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est continue sur $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Illustration



si k est compris entre f(a) et f(b) alors f prend au - une fois la valeur k sur [a;b] pr u que f soit continue sur [a;b]

On admet ce théorème qui est assez intuitif, dont la preuve est difficile !

Mnémo : ♥♥♥ **On retiendra que si f est définie et continue sur $[a\ ;\ b]$, alors f prend *AU MOINS* une fois toute valeur intermédiaire k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.** ♥♥♥

Remarque : **L'équation $f(x) = k$ où k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On ne sait pas lequel des deux réels $f(a)$ et $f(b)$ est le plus grand, donc lorsqu'on dit compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ne pas croire que $f(a)<f(b)$!**

Le *T.V.I* va donc permettre de *« prévoir »* l'existence de solution(s) pour une équation donnée, sur un intervalle.

Application 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur [-2 ; 2].

f est continue sur $[-2;2]$ car elle y est dérivable.

$f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = \boxed{-9}$

$f(2) = 2^3 + 2 + 1 = \boxed{11}$

dc comme 0 est une V.I comprise entre -9 et 11.
le th de V.I nous dit que l'équat° $f(x)=0$ admet au - une solut° sur $[-2;2]$.

Application 2

Montrer que l'équation : $e^{3x+1} = x+4$ a au moins une solution sur [-5 ; 0].

✂--

$e^{3x+1} = x + 4$ (tj avoir un 2nd membre nul).

$\Leftrightarrow e^{3x+1} - x - 4 = 0$

soit f la fct déf sur $[-5;0]$ par $f(x) = e^{3x+1} - x - 4$

f est continue sur $[-5;0]$ car f est dérivable sur $[-5;0]$ (somme et composée de fct° dérivables).

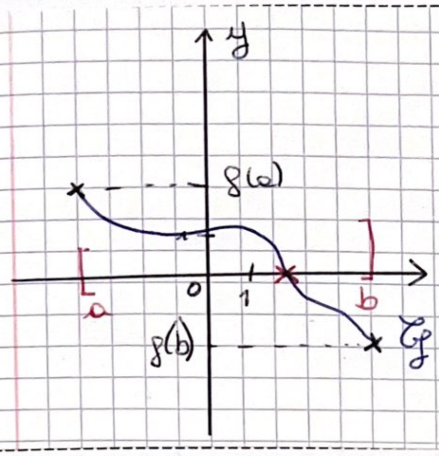
$f(-5) = e^{-15+1} + 5 - 4 = 1 + e^{-14} \approx 1$ et $f(0) = e^1 + 0 - 4 = e - 4 \approx -1,28$

dc : 0 est une V.I comprise entre $e-4$ et $1+e^{-14}$ $(0 \in [e-4 ; 1+e^{-14}])$
D'ap le T.V.I, l'éq $f(x) = 0$ admet au moins 1 sol sur $[-5;0]$.
par suite : $e^{3x+1} = x+4$ a au - 1 sol sur $[-5;0]$.

Application 3 (principe de Bolzano, important)

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a ; b]$.



f est continue sur $[a ; b]$

$f(a) > 0$ et $f(b) < 0$

dc 0 est valeur intermédiaire de f comprise entre $f(b)$ et $f(a)$: $f(b) < 0 < f(a)$

Dc d'ap le TVI, l'éq $f(x) = 0$ a au - une sol sur $[a ; b]$.

♥♥

Corollaire du T.V.I : (capital, c'est de lui dont on se servira fréquemment en terminale).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est *continue* sur $[a ; b]$, et si f est *strictement monotone* sur $[a ; b]$ (c'est-à-dire f est strictement croissante sur $[a ; b]$ ou f est strictement décroissante sur $[a ; b]$), alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a ; b]$.

♥♥

Preuve : les hyp du TVI sont vérifiées dc : existence d'au- une sol à l'éq $f(x) = k$ sur $[a ; b]$.

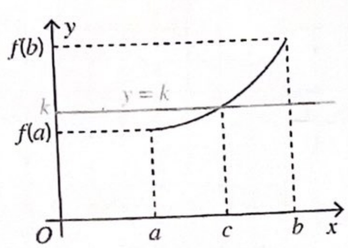
→ supposons par l'absurde que l'éq $f(x) = k$ ait 2 sol distinctes sur $[a ; b]$

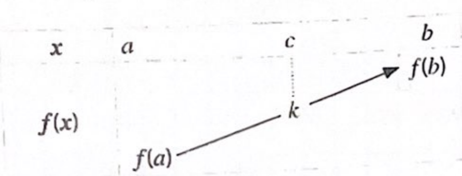
Soit x_1 et x_2 ces 2 sol : $x_1 \in [a ; b]$ et $x_2 \in [a ; b]$ et $x_1 \neq x_2$; $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Sans perte de généralité, on a par ex : $x_1 < x_2$. De + f est strictement monotone sur $[a ; b]$. Dc on peut sans perte de généralité supposer : f strictement croissante sur $[a ; b]$. Or $x_1 < x_2$ et f strictement ↗ sur $[a ; b]$ dc $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow k < k$ → contradict°. dc $f(x) = k$ a une unique sol sur $[a ; b]$ (idem avec f strictement ↘ sur $[a ; b]$.

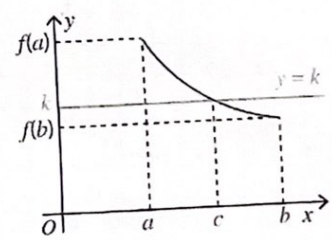
Illustration

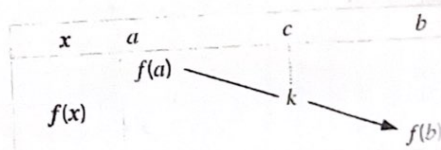
- Cas où f est strictement croissante :





- Cas où f est strictement décroissante :





• qd f est strictement ↗ sur $\mathbb{R}$:
$\forall (x;y) \mathbb{R}^2$ si : $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ → pas de pallier.

Remarques importantes

Trois conditions sont nécessaires pour pouvoir appliquer ce corollaire du T.V.I :

1) ...Avoir...f...continue...sur...un...intervalle...$I = [a;b]$...
2) ...''...''...strictement...monotone...sur...cet...intervalle...
3) ...k...doit...être...une...valeur...intermédiaire...comprise...entre...$f(a)$ et $f(b)$.

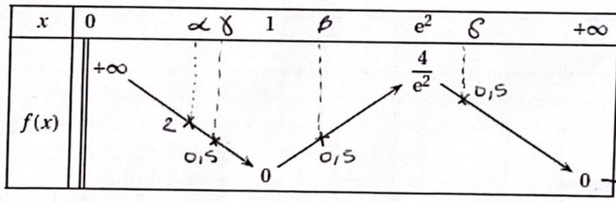
Le corollaire du *T.V.I.* s'applique aussi sur un intervalle de la forme : $[a ; b[$; $]a ; b[$; $]a ; b]$; $[a ; +\infty[$; $]a ; +\infty[$; $]-\infty ; b[$; $]-\infty ; b]$.

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Si l'intervalle est ouvert en une borne a ou b est ouverte, alors <u>on remplace l'image $f(a)$ ou $f(b)$ par la *LIMITE* de f en cette borne</u> ; si une borne de l'intervalle est $-\infty$ (ou $+\infty$), alors on considère la limite de f en $-\infty$ (ou en $+\infty$).

Pour un intervalle, la borne écrite à gauche est toujours inférieure à celle écrite à droite : ainsi écrire 0 appartient à $[4 ; -2]$, ou encore 1 appartient à $]+\infty ; 0[$ sont des inexactitudes.

Exercice graphique



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = 2$ *sur* $]0 ; 1]$.

b) $f(x) = 0$ *sur* $]0 ; +\infty[$

c) $f(x) = 0,5$ *sur* $[1 ; e^2]$ puis sur $]0 ; +\infty[$.

d) $f(x) = -1$ *sur* $]0 ; +\infty[$

a) Résoudre l'éq $f(x) = 2$ lorsque $0 < x \leq 1$.

f est continue sur $]0;1]$ (tableau de Δ). f est strictement ↘ sur $]0;1]$
2 est une valeur intermédiaire pour f : $2 \in]0;+\infty[$.
sur $[0;1]$.
Dc d'ap le corollaire du TVI, l'éq $f(x) = 2$ admet une unique solut° sur $]0;1]$. On la note α : $f(\alpha) = 2$ et $0 < \alpha \leq 1$

b) Par lecture du tableau de Δ de f sur $]0;+\infty[$, $f(x) = 0$ a pr unique solut° $x = 1$ sur cet intervalle

⚠ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ mais $+\infty$ n'est pas sol de cett éq car non réel

c) $\frac{4}{e^2} \approx 0,54$ dc $\frac{4}{e^2} > 0,5$

f est continue sur $[1 ; e^2]$ et strictement croissante sur cet intervalle
$0,5 \in [0 ; \frac{4}{e^2}]$ (0,5 est une valeur int de f comprise entre 0 et $\frac{4}{e^2}$).

Dc d'ap le C. TVI : l'éq $f(x) = \frac{1}{2}$ a une unique sol sur $[1 ; e^2]$ notée β.

ensuite sur $]0 ; 1]$: m̂ raisonnement
f continue + strictement ↘ sur $]0 ; 1]$ et $0,5 \in]0 ; 1]$.
d'ap le C TVI, l'éq $f(x) = \frac{1}{2}$ a une unique sol γ sur $]0 ; 1[$

De part le m̂ raisonnement sur $[e^2 ; +\infty[$, $f(x) = 0,5$ a une unique sol δ sur $[e^2 ; +\infty[$

⟹ Conclu : $f(x) = 0,5$ admet 3 sol sur $]0 ; +\infty[$

d) Par lecture du tableau, f admet pr minimum 0 sur $]0 ; +\infty[$: $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$. Dc l'éq $f(x) = -1$ n'admet aucune sol sur $]0 ; +\infty[$. $(0 > -1)$.

Exercice 2

f est définie sur [0 ; 2] par : $f(x) = -x^3 - x + 3$.

***a)* Démontrer que f est strictement décroissante sur [0 ; 2] et dresser son tableau de variation.**

***b)* En déduire que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution sur [0 ; 2].**

a) $f'(x) = -3x^2 - 1$

or $\forall x \in [0 ; 2]$ $\quad x^2 \geq 0$
$-3x^2 \leq 0$ car $-3 < 0$
$-3x^2 - 1 \leq -1 < 0$

$\forall x \in [0 ; 2]$, $f'(x) < 0$ dc f est strictement ↘ sur $[0 ; 2]$

x	0		2
$f(x)$	3	↘ 0 ↘	-7

$f(0) = 3$
$f(2) = -7$.

b) • f est continue sur $[0 ; 2]$ car f est dérivable sur $[0 ; 2]$.
• f est strictement ↘ sur " ". (quest a)).
• $0 \in]-7 ; 3[$

⤳ D'ap le C. TVI, l'éq $f(x) = 0$ admet une unique sol sur $[0 ; 2]$, on la note α. $f(\alpha) = 0$ et $0 \leq \alpha \leq 2$.

se appuyer sur + de la table et changer ΔTbl.

def table : début = 1,2
ΔTbl = 0,01 → avoir au centième près.
⟹ $1,21 < \alpha < 1,22$.

$1 < \alpha < 2$: encadrement à l'unité près.

$1,2 < \alpha < 1,3$: encadrement au dixième près. à 10^{-1} près

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + x - 2$.

a) Démontrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée α.

d) Encadrer α à : l'unité près, puis au dixième près, puis à 10^{-2} près à l'aide de votre calculatrice. (Méthode des balayages successifs).

e) Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(f dérivable sur $\mathbb{R}$).

a) $f'(x) = e^x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x > 0$
$\quad e^x + 1 > 1 > 0$

dc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

b) par lr : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x-2) = -\infty$

par ls $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + x - 2) = -\infty$

par lr : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$

par ls $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + x - 2) = +\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$=]-\infty ; +\infty[$

c) f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est strictement ↗ sur $\mathbb{R}$.
$0 \in \mathbb{R}$ $\quad (0 \in]-\infty ; +\infty[)$

⟹ d'ap le c. TVI, l'éq $f(x) = 0$ admet une unique sol s $\mathbb{R}$, notée α.

d) Grâce à une calculatrice

x	$f(x)$
0	-1
α	0
1	1,718

→ avec un pas égal à 1.

$0 < \alpha < 1$ encadrement à l'unité près de α

unité

x	$f(x)$
0,4	$-0,108$
α	0
0,5	0,1487

avec un pas égal à 0,1.

$0,4 < \alpha < 0,5$ encadrement au dixième près de α.

avec un pas égal à 0,01.

x	$f(x)$
0,44	-0,007
α	0
0,45	0,0183

$0,44 < \alpha < 0,45$ encadrement de α à 10^{-2} près

c) f croît strictement sur $]-\infty ; \alpha]$ et $f(\alpha) = 0$ dc $\forall x \in]-\infty ; \alpha]$, $f(x) \leq 0$, de m̂ $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$.

d'où

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

* zéro de Δ de f
* tableau (avec limites)

Exercice 4

f est la fonction définie sur $[-10 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^x - 3$.

En détaillant les étapes de votre démarche, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

* $f(x) = u(x)v(x)$ $\quad u'(x) = 1$
$v'(x) = e^x$

$f'(x) = e^x + (x+1)e^x = e^x(1+1+x) = e^x(x+2)$

étude du signe de $f'(x)$ sur $[-10 ; +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ dc $f'(x)$ a le m̂ signe que $x+2$

$f'(x) \geq 0 \iff x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$

$f(-10) = -9e^{-10} - 3$

$f(-2) = \frac{-1}{e^2} - 3$

x	-10		-2		α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-9e^{-10} - 3$	↘	$-\frac{1}{e^2} - 3$	↗	0	

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f décroît sur $[-10;-2]$ et $f(-10) < 0$ donc $\forall x \in [-10;-2]$, $f(x) < 0$

Montrons qu'il existe un unique réel $\alpha \in [-2;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- f est continue sur $[-2;+\infty[$ car elle y est dérivable
- f est strictement croissante sur $[-2;+\infty[$
- $0 \in \left[-\frac{1}{e^2} - 3 ; +\infty\right[$ car $-\frac{1}{e^2} - 3 < 0$.

Dc d'ap le corollaire du TVI, l'éq $f(x) = 0$ admet une unique solut° notée α.

Par suite :

x	-10		-2		α		$+\infty$
$f(x)$	$-9e^{-10}-3$	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}-3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe $f(x)$		$-$			0	$+$	

$\Rightarrow$ on peut tj encadrer α.

Remarques : *T. V. I* et son corollaire ***permettent de montrer l'existence et /ou l'unicité de(s) solution(s) à une équation donnée,*** sur un intervalle donné, mais néanmoins, ces gros théorèmes ***ne permettent pas de savoir combien vaut chaque solution (valeur exacte).***

On se contentera, dans les exercices, de donner une valeur approchée de chaque solution, avec la précision que l'on nous demandera. L'utilisation d'une calculatrice sera nécessaire.

III- Continuité et suite récurrentes

***Propriété** (admise)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a un réel appartenant à I.
Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

1) Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

2) Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, *où f est continue sur I.*

***Si** (u_n) **converge vers** $L \in I$, **alors** L **est solution de l'équation :** $f(x) = x$*

Schéma : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n)$ dès que f est continue en a où $a = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$.

Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; 2]$ et dresser son tableau de variation.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) En déduire que (u_n) converge, puis calculer sa limite.

$0 \leq x \leq 2$

1) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3} = \sqrt{u(x)}$ $\qquad u'(x) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}x+3}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}x+3}}$$

$f'(x) > 0$ sur $[0,2] \to f$ strictement croissante sur $[0,2]$

x	0		2
$f(x)$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	2

$f(0) = \sqrt{3}$ $\quad f(2) = \sqrt{4} = 2$

2) Soit $n \geq 1$ et $P(n)$: " $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ ".

- initialisat° : pr $n = 1$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}u_0 + 3} = \sqrt{-\frac{5}{2} + \frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{1}{2}u_1 + 3} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + 3} \approx 1{,}83$$

Par suite : $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 2 \rightsquigarrow P(0)$ est vraie.

- Hérédité : Soit n un entier non nul pour lequel $P(n)$ est vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$. Montrons $P(n+1)$ est vraie càd : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

Par hypothèse de récurrence on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$
$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2) \text{ car } f \nearrow \text{ sur } [0;2]$$
$$\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

or $0 \leq \sqrt{3}$ dc $0 \leq \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

dc $P(n+1)$ est vraie.

Conclu : $P(1)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ héréditaire dc par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$: dc (u_n) croît.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$ dc (u_n) majorée par 2.

dc d'ap le th de convergence des suites monotones (u_n) converge

Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Comme f est continue sur $[0, 2]$, ℓ est solut° de

$f(x) = x$ cad $\sqrt{\frac{1}{2}x + 3} = x$

dc $\left(\sqrt{\frac{1}{2}x + 3}\right)^2 = x^2$

$$-x^2 + \frac{1}{2} + 3 = 0$$

$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 12,25 = 3,5^2 > 0$ dc 2 solut°

$x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} - \sqrt{3,5^2}}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$ $\quad x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2} + 3,5}{-2} = \dfrac{3}{-2} = \dfrac{-3}{2}$

$S = \left\{\frac{-3}{2} ; 2\right\}$

enfin : $\ell \in [0;2]$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$

conclu : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$ car $\frac{-3}{2} < 0$

Exercices de synthèse

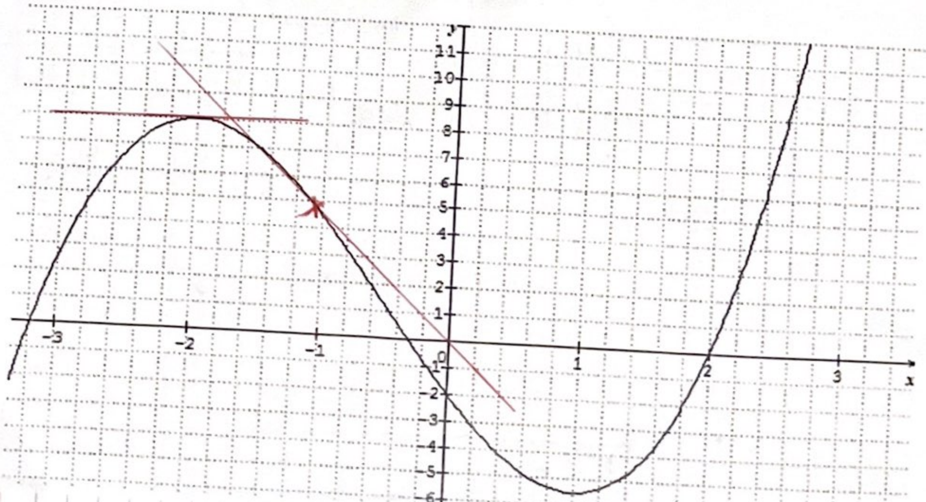
Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O ; I ; J).

Le but de l'exercice est de chercher s'il existe des tangentes à C_f passant par le point O.

0) Conjecturer graphiquement si le problème posé admet des solutions, le cas échéant, préciser combien.



1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a de C_f passe par l'origine du repère si et seulement si : $f(a) - af'(a) = 0$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation complet.

d) Démontrer que la fonction g s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$. On note α cette valeur.

e) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près, puis la valeur approchée de α au dixième près.

f) Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3) Résoudre alors le problème posé en début d'énoncé.

0) Il semblerait que $\mathcal{C}_f$ admette une seule tangente qui passe par l'origine O du repère. (tangente au pt d'abs $x \approx -1,2$).

1) $a \in \mathbb{R}$

Commençons par donner l'éq de T_a :

T_a : $f'(a)(x-a) + f(a) = y$

enfin $O(0;0) \in T_a \iff 0 = f'(a)(0-a) + f(a)$

$\iff 0 = f(a) - af'(a)$

2a) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2 - x(3x^2 + 3x - 6)$

$g(x) = x^3 + 1,5x^2 - \cancel{6x} - 2 - 3x^3 - 3x^2 + \cancel{6x}$.

$g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2$

b) par cr : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ par pdt $\lim\limits_{x \to +\infty} -1,5x^2 = -\infty$

Par es : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

FI en $-\infty$

$g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2 = x^2(-2x - 1,5) - 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 1,5) = +\infty$

par cp et es $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

c) $g(x) = -2x^3 - 1,5x^2 - 2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -6x^2 - 3x = \underbrace{-3x(2x+1)}$

étude du signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$g'(x)$ est un trinôme ayant pr racines évidentes : $x = 0$; $x = \frac{-1}{2}$

ici $a < 0$ dc

x	$-\infty$		α		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$			0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-2,125$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = -2$

$g\left(\frac{-1}{2}\right) = -2,125$

d) D'après le tableau de Δ :

sur : $\left]-\infty ; \frac{-1}{2}\right]$,

g est continue car dérivable et strictement $\searrow$

$0 \in]-2,125 ; +\infty[$ dc 0 est une VI pr g.

d'ap le c TVI, l'éq $g(x) = 0$ admet une unique sol α sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$

sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$: $g(x) \leq -2$ dc $g(x) = 0$ n'a aucune solut° sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

dc $g(x) = 0$ admet une unique sol sur $\mathbb{R}$ notée α.

e) Par balayage successif :

x	$g(x)$
$-1,33$	$0,0519$
$-1,32$	$-0,014$

pas à $0,01$

$\downarrow$

$-1,33 < \alpha < -1,32$ à 10^{-2} près.

(pas à $0,1$)

x	$g(x)$
$-1,4$	$0,548$
$-1,3$	$-0,141$

$-1,4 < \alpha < -1,3$ à 10^{-1} près

$-1,33 \quad \alpha \quad -1,32$

$\alpha \approx -1,3$ à 10^{-1} près

f)

x	$-\infty$		α		$-0,5$		0		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-2,125$	↗	-2	↘	$-\infty$
signe de $g(x)$		+	0			−			

3) Grâce à q1 : T_a passe par $O(0;0) \iff f(a) - af'(a) = 0$

$\iff g(a) = 0$ où g est la fct° déf à q.2

$\iff a$ est sol de l'éq $g(x)=0$

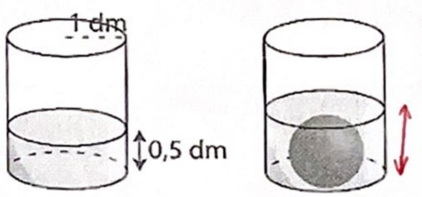
$\iff a = \alpha$ car il y a une unique sol α à l'éq $g(x)=0$

$\Rightarrow$ C'est en le pt d'abs α que la tangente à C_f passe par l'origine $O(0,0)$.

Exercice II

Un vase cylindrique de base un disque de rayon 1 dm, contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.

On plonge une bille sphérique de diamètre d dm dans ce cylindre et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.



1. a) Exprimer en fonction de d le volume, en dm^3 :
• d'eau versé initialement, • de la bille.

b) Exprimer de deux façons différentes le volume du cylindre de hauteur d contenu dans le vase après avoir plongé la bille.

c) En déduire que d vérifie $0 < d < 2$ et :

$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$

2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;2[$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du diamètre d de la bille.

1) a) $V_i = V_{cylindre} = \pi r^2 \times h$

$V_i = \pi \times 1^2 \times 0,5 = \frac{1}{2}\pi$ dm^3

$V_b = V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi r^3$ avec $r = \frac{d}{2}$

$V_b = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{8}$

$V_b = \frac{\pi d^3}{6}$ dm^3

b) $V_{\text{cylindre de hauteur } d} = \pi r^2 \times h$ avec ici $h = d$, $R = 1$

$V_c = \pi \times 1^2 \times d = \pi d$ dm^3

or $V_c = V_i + V_{bille} = 0,5\pi + \frac{\pi d^3}{6}$

c) $0 \leq d$ assure l'existence de la bille

$d \leq 2$ la bille rentre dans le cylindre de 2 dm de diamètre

Par suite $0 \leq d \leq 2$

Enfin $\pi d = 0,5\pi + \frac{\pi d^3}{6}$

$d = 0,5 + \frac{d^3}{6}$ car $\pi > 0$

$0,5 + \frac{d^3}{6} - d = 0$

$\alpha^3 - 6\alpha + 3 = 0$ (on multiplie par 6).

2a) $x^3 - 6x + 3 = 0$.

Soit $f(x) = x^3 - 6x + 3$ avec $0 \leq x \leq 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) = 3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

étude du signe de $f'(x)$ sur $]0, 2[$

$x > 0$, $\sqrt{2} > 0$ dc $x + \sqrt{2} > 0$ et $3 > 0$

dc $f'(x)$ a le m̄ signe que $x - \sqrt{2}$

par suite : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$

d'où :

x	0		α		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$-$			0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-4\sqrt{2}+3$	$\nearrow$	-1

ici : $0 \leq x \leq 2$ sinon 0 et 2 valeurs interdite

$f(0) = 3$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 3 = -4\sqrt{2} + 3$

$f(2) = 2^3 - 6 \times 2 + 3 = -1$

Plaçons-nous d'abord sur $[0; \sqrt{2}]$

- f est continue sur $[0, \sqrt{2}]$ car elle y est dérivable.
- f " strictement décroissante sur $[0; \sqrt{2}]$
- $-4\sqrt{2} + 3 \approx -2,7$ dc $0 \in [-4\sqrt{2}+3 ; 3]$

→ d'ap le corollaire du TVI, l'éq. $f(x) = 0$ admet une unique sol α avec $\alpha \in [0; \sqrt{2}]$.

sur $[\sqrt{2} ; 2]$: f croît sur cet intervalle.
$f(2) = -1 \; (< 0)$ dc $f(x) = 0$ n'admet aucune sol sur $[\sqrt{2}; 2]$

conclu : $f(x) = 0$ admet une unique sol sur $[0; 2]$.

2b) Par balayages successifs.

Pas à 0,1

x	$f(x)$
0,5	0,125
α	0
0,6	-0,384

$0,5 < \alpha < 0,6$ à 10^{-1} près

Pas à 0,01

x	$f(x)$
0,52	0,0206
α	0
0,53	-0,031

$0,52 < \alpha < 0,53$ à 10^{-2} près

α est l'unique sol sur $[0, 2]$ de $g(x) = 0$. Par suite $d = \alpha$ et on a $0,52 < d < 0,53$.

Exercice III ***(métropole 2022)***

g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = (-0,15x+2,2)e^{0,2x} - 2,2$.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x+0,29)e^{0,2x}$.

c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,2x = +\infty$ $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ par comp $\lim e^{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -0,15x = -\infty$ par ls $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,15x + 2,2 = -\infty$

par lp $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0,15x+2,2)e^{2x} = -\infty$ par ls $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

b) $g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2 = u(x)v(x) - 2,2$

$u'(x) = -0,15$ $v'(x) = 0,2e^{0,2x}$

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$= -0,15e^{0,2x} + (-0,15x+2,2) \times 0,2e^{0,2x}$

$= e^{0,2x}(-0,15 + (-0,03x + 0,44)$

$= e^{0,2x}(-0,03x + 0,29)$.

c) Étude du signe de $g'(x)$ sur $[0, +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{0,2x} > 0$ dc $g'(x)$ a le m̂ signe que $-0,03x + 0,29$

$g'(x) \geq 0 \iff -0,03x + 0,29 \geq 0 \iff x \leq \frac{-0,29}{-0,03} \iff x \leq \frac{29}{3}$

car $-0,03 < 0$

x	0		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$2,98$	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = 0$

$g\left(\frac{29}{3}\right) = \left(-0,15 \times \frac{29}{3} + 2,2\right)e^{0,2 \times \frac{29}{3}} - 2,2$

$g\left(\frac{29}{3}\right) \approx 2,98$

Le max de g sur $[0; +\infty[$ est $2,98$ environ.

d) ici $x \neq 0$

Si $0 < x \leq \frac{29}{3}$: • tableau : $g(x) > 0$ dc pas de sol à l'éq $g(x) = 0$ sur $]0 ; \frac{29}{3}]$

• sur $\left[\frac{29}{3} ; +\infty\right[$:

→ g est continue car dérivable sur cet intervalle

→ g est strictement décroissante " " "

→ $0 \in]-\infty ; 2,98]$

d'ap le corollaire du TVI, l'éq $g(x) = 0$ admet une unique sol α sur $[0 ; +\infty[$

On commence par encadrer α à 10^{-3} près

Pas égal à 0,01

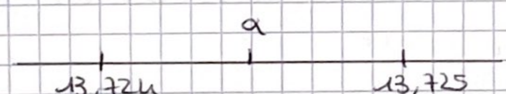
x	$g(x)$
13,72	0,008
13,73	−0,011

$13,72 < \alpha < 13,73$

Pas égal à 0,001

x	$g(x)$
13,724	0,001
13,725	$-9 \times 10^{-4} = -0,0009$

$13,724 < \alpha < 13,725$



dc $\alpha \approx 13,72$ à 10^{-2} près

IV – Algorithme de dichotomie

Méthode d'encadrement d'une solution à l'aide d'un algorithme de dichotomie

On considère une fonction ***f* continue et strictement monotone sur** $[a ; b]$, avec $a \leq b$.

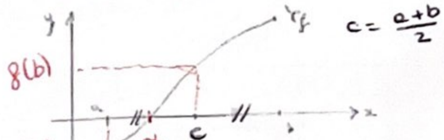
On suppose également que l'équation : $f(x) = 0$ ***admet une unique solution sur*** $[a ; b]$ que l'on ne sait pas déterminer explicitement par le calcul ! On note α cette solution.

Le principe de dichotomie (en grec signifie couper en deux) consiste à déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe α, en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque itération.

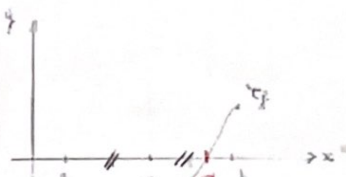
Pour ce faire, on détermine le centre c de chacun des intervalles, et on teste si α est située dans $[a ; c]$ ou $[c ; b]$:

Les dessins ci dessous sont importants :

$c = \frac{a+b}{2}$



Si la solution est dans $[a ; c]$, on recommence recommence ce procédé appliqué à $[a ; c]$.



Si la solution est située dans $[c ; b]$, on recommence ce procédé appliqué à $[a ; c]$.

D'après le corollaire du T.V.I :

Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors α appartient à $]a ; c[$. → dc $f(a)$ et $f(c)$ signe contraire dc f s'annule sur $[a ; c]$

Si $f(a) \times f(c) > 0$, alors α appartient à $]c ; b[$. → $f(a)$ et $f(c)$ de m̂ signe dc la fct ne s'annule pas sur $[a ; c]$ ↳ dc $\alpha \notin [a ; c]$ dc $\alpha \in]c ; b[$

En itérant cette procédure, on arrive rapidement à encadrer α à la précision voulue.

Algorithme de Dichotomie :

Demander à l'utilisateur a, b et e (e désigne l'amplitude de l'encadrement souhaité)
$e > 0$.

Tant que $b - a \geq e$

Affecter à c la valeur $\frac{a+b}{2}$.

Si $f(a) \times f(c) < 0$

Alors

Affecter à b la valeur c

Sinon

Affecter à a la valeur c.

Fin de Si.

Fin de Tant que

Sortie : Afficher a et b.

Application

On considère l'équation : $x^3 + 5x + 7 = 0$.

On admet que cette équation a une unique solution sur [-2 ; -1] car la fonction f définie sur [-2 ; -1] par :
$f(x) = x^3 + 5x + 7$ est continue, strictement croissante sur [-2 ; -1] et que $0 \in [f(-2) ; f(-1)]$ vu que $f(-2) = -11$ et $f(-1) = 1$.

Avec Python : avoir une valeur approchée à 10^{-n} près de l'unique solution α de l'équation $f(x)=0$: l'entier naturel n est choisi par l'utilisateur).

$x^3 + 5x + 7 = 0$ a une unique sol α sur $[-2 ; -1]$

```
def f(x):
    y=x**3+5*x+7
    return y

def Dichotomie(n):
    a=-2
    b=-1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

mémoriser la valeur de $f(x)$

$f(x)$.

Utiliser ce programme, puis déterminer une valeur approchée de α à :10^{-2} près ; 10^{-4} près.
10^{-4} près.

Attention, avant de modifier ce programme et l'appliquer à une autre fonction f, il faudra toujours commencer par prouver que f est continue sur $[a ; b]$, strictement monotone sur $[a ; b]$ et telle que l'équation : $f(x)=0$ admet une seule solution sur $[a ; b]$!

on tape Dichotomie (2) :

$m = -1,17 \ldots$ } valeur α à 10^{-2} près.

on tape Dichotomie (3) :

$m = -1,120$ } à 10^{-3} près $\alpha \approx -1,120$

'' '' '' (4)
à 10^{-4} près $\alpha \approx -1,1194$.