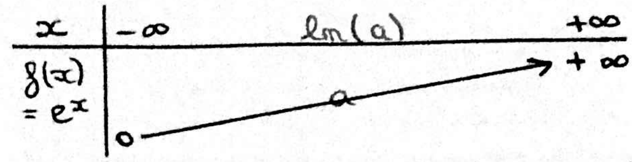
« En mathématiques, évident est le mot le plus dangereux. » *Eric Temple Bell*

Chapitre VIII — *Fonction logarithme népérien*

I – Généralités

On sait que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation suivant :



Donc, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet...une....unique...solut° réelle d'ap le corollaire du TVI : exp cont sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $a \in]0,+\infty[$.

Définition

Soit ***a un réel strictement positif.***
On appelle logarithme népérien de a, noté $ln(a)$, ***l'unique réel solution de l'équation : $e^x = a$, d'inconnue x.***

Conséquences

La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, et à tout réel x strictement positif, elle associe le réel $ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x.

$ln :]0\ ;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
$\qquad x \mapsto ln(x)$ avec par définition $e^{ln(x)} = x$.

Important :	**On a donc :**	$\boxed{x>0 \text{ et } y = ln(x) \Leftrightarrow x = e^y}$

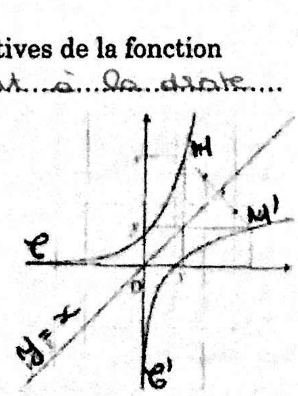
On a donc immédiatement : ♥♥♥

- Pour tout réel x ***strictement positif***, $e^{ln(x)} = x$
- Pour tout réel x, $ln(e^x) = ..x..$
- $ln(1) = ...0...$
- $ln(e) = ...1......$

Remarque : Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ du plan, les courbes représentatives de la fonction exponentielle et celle de la fonction ln sont donc ..symétriques....par..rapport...à...la..droite.... d'eq $y = x$ (1ère bissectrice).

Illustration et justification :

On note respectivement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous réels $x > 0$ et y, dire que $M'(x\ ;y)$ appartient à $\mathcal{C}'$ équivaut à $y = ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^y$, ce qui équivaut à dire que $M(y\ ;x)$ appartient à $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Pour tous réels a et b strictement positifs, on a l'équivalence : $\boxed{\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b}$.

Exercice1

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\ln(x) = -3$; b) $\ln(x) = 4$; c) $e^x = 2$; d) $\ln(x+5) = \ln(4x-8)$; e) $3e^{2x} - 5 = 0$

a) $\ln(x) = -3 \iff e^{\ln(x)} = e^{-3} \iff x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$ $\quad \mathcal{S} = \{e^{-3}\}$

b) $\ln(x) = 4 \iff e^{\ln(x)} = e^4 \iff x = e^4$ $\quad \mathcal{S} = \{e^4\}$

c) $e^x = 2$

- on applique ln : $\ln(e^x) = \ln(2) \iff x = \ln(2)$. $\quad \mathcal{S} = \{\ln(2)\}$
- ou $e^x = 2 = e^{\ln(2)}$ et $e^x = e^{\ln(2)} \iff x = \ln(2)$.

d) $\ln(x+5) = \ln(4x-8)$.
Commencer par donner l'ensemble sur lequel les express° contenant des ln sont définies

- $\ln(x+5)$ existe ssi $x+5>0$
  $x > -5$
- $\ln(4x-8)$ " ssi $4x-8>0$
  $x > 2$

Dc on résout cette éq sur $I =]-5, +\infty[\cap]2, +\infty[=]2 ; +\infty[$

$\ln(x+5) = \ln(4x-8) \iff \begin{cases} x > 2 \\ x+5 = 4x-8 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ 3x = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ x = \frac{13}{3} \end{cases}$

$\frac{13}{3} > 2$ dc solut° acceptée dc $\mathcal{S} = \left\{\frac{13}{3}\right\}$.

e) $3e^{2x} - 5 = 0 \iff e^{2x} = \frac{5}{3} \iff \ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \iff 2x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$x = \dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{2}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{\dfrac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{2}\right\}$

II – Propriétés algébriques de la fonction ln

Théorème ***(relation fonctionnelle de ln)***

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : ♥ $\ln(xy) =$ ...$\ln(x) + \ln(y)$...**♥**

Remarque : La fonction $\ln$ transforme donc...un produit en une somme...........

(soit l'action....inverse de celle de l'exp $\left(e^{a+b} = e^a \times e^b\right)$..........).

Preuve : $x>0$ et $y>0$ dc $xy>0$ dc $\ln(xy)$ existe.
Soit $A = \ln(xy)$ et $B = \ln(x) + \ln(y)$.
on $e^A = e^{\ln(xy)} = xy$ et $e^B = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)}$

$$e^B = x \times y$$

par suite $e^A = e^B = xy$
donc $e^A = e^B \iff A = B \iff \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

♥♥ Propriétés importantes de la fonction ln ♥♥

1) Pour tout réel $x > 0$, $ln(\frac{1}{x}) =$ $-\ln(x)$

2) Pour tous réels x et y strictement positifs, $ln(\frac{x}{y}) =$ $\ln(x) - \ln(y)$

3) Pour tout réel $x>0$ et pour tout entier relatif n, $ln(x^n) =$ $n\ln(x)$

4) Pour tout réel $x>0$, $ln(\sqrt{x}) =$ $\frac{1}{2}\ln(x)$

Preuve :

1) Soit $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$ dc d'ap la th fondamentale :
$\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(x) + \ln(\frac{1}{x})$

donc $\underbrace{\ln(1)}_{0} = \ln(x) + \ln(\frac{1}{x})$

$0 = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

dc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

2) Soit $x > 0$ et $y > 0$: on a $\frac{x}{y} > 0$ dc $\ln(xy)$ existe.
$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right)$

$= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

4) Soit $x > 0$ dc $\sqrt{x} > \sqrt{0}$ bref $\sqrt{x} > 0$ dc $\ln(\sqrt{x})$ existe.

or $(\sqrt{x})^2 = x$ dc $\ln((\sqrt{x})^2) = \ln(x)$

$\ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln(x)$

$\ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = \ln(x)$

$2\ln(\sqrt{x}) = \ln(x)$

$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

3) Soit $x > 0$:

- on montre la relat° pr $n \in \mathbb{N}$ en procédant par récurrence.
  donc $x^n > 0$, donc $\ln(x^n)$ existe.
  Soit $P(n)$ la prop : $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

- initialisat° pr $n = 0$

  $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x) \Rightarrow P(0)$ est vraie.

- hérédité : Soit n un entier naturel arbitrairement fixé pr lequel on suppose que $P(n)$ est vraie cad : $\ln(x^n) = n\ln(x)$. Montrons sous cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie donc que :
  $\ln(x^{n+1}) = (n+1)\ln(x)$.

or $x^{n+1} = x^n \times x$

dc $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x)$ or par hp. $\ln(x^n) = n\ln$

$\ln(x^{n+1}) = n\ln(x) + \ln(x) = \ln(x)(n+1) = (n+1)\ln(x)$.

dc $P(n+1)$ est vraie. on factorise

conclu: $P(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ héréditaire dc d'ap le principe de réc :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

- Soit n un entier négatif. dc $(-n) \geq 0$ et $-n \in \mathbb{N}$
or : $n = -(-n)$

dc $\ln(x^n) = \ln(x^{-(-n)})$ et $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

$\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n})$ (règle 1) $= -(-n)\ln(x) = \boxed{n\ln(x)}$
récurrence précédente

Exercice 2

1) Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$, chacune des expressions suivantes :

cbl : $\ln(6) = a\ln(2) + b\ln(3)$

$A = \ln(6)$; $B = \ln(9)$; $C = \ln(\frac{2}{3})$; $D = \ln(\frac{1}{12})$; $E = \ln(\sqrt{12})$; $F = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$

2) Simplifier les écritures : $G = \ln(\frac{1}{e^2})$ $H = \ln(e^4) + \ln(2e^{-1})$.

1) $A = \ln(6) = \ln(2 \times 3) = \boxed{\ln(2) + \ln(3)}$.

$B = \ln(9) = \ln(3^2) = \boxed{2\ln(3)}$

$C = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{\ln(2) - \ln(3)}$

$D = \ln\left(\frac{1}{12}\right) = -\ln(12) = -\ln(3 \times 2^2) = -(\ln(3) + \ln(2^2))$

$D = -(\ln(3) + 2\ln(2)) = \boxed{-2\ln(2) + \ln(3)}$

$E = \ln(\sqrt{12}) = \frac{1}{2}\ln(12) = \frac{1}{2}(\ln(3 \times 2^2)) = \frac{1}{2}(\ln(3) + 2\ln(2))$

$E = \boxed{\frac{1}{2}\ln(3) + \ln(2)}$

$F = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1) = \ln((\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1))$

$F = \ln((\sqrt{3})^2 - 1^2) = \ln(3-2) = \boxed{\ln(2)}$

$m\ln(x)$

$\ln(x^m) = \gamma$

2) $G = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln(e) = -2\times 1 = \boxed{-2}$

$H = \ln(e^4) + \ln(2e^{-1})$

$H = 4\ln(e) + \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 4 + \ln(2) - 1\ln(e)$

$H = 4 + \ln(2) - 1 = \boxed{3 + \ln(2)}$

$\boxed{m\ln(x)}$

13 **a)** Démontrer que pour tout réel x,

$$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1).$$

b) Résoudre l'équation $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = 7$.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{4x} > 0$ dc $e^{4x} + 1 > 0$ dc $\ln(e^{4x}+1)$ existe

$\ln(e^{4x}+1) = \ln\left(e^{4x}\left(1 + \frac{1}{e^{4x}}\right)\right) = \ln(e^{4x}) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{4x}}\right)$

$\ln(e^{4x}+1) = 4x + \ln(1 + e^{-4x})$

ou

$4x + \ln(1+e^{-4x}) = \ln(e^{4x}) + \ln(1+e^{-4x})$

$= \ln(e^{4x}(1+e^{-4x})) = \ln(e^{4x} + e^0) = \boxed{\ln(e^{4x}+1)}$

b) $4x + \ln(1+e^{-4x}) = 7 \iff \ln(e^{4x}+1) = 7$ (a))

$\iff e^{\ln(e^{4x}+1)} = e^7$

$\iff e^{4x} + 1 = e^7$

$\iff e^{4x} = \underbrace{e^7 - 1}_{>0}$

$\iff \ln(e^{4x}) = \ln(e^7 - 1)$

$\iff 4x = \ln(e^7 - 1)$

$\iff x = \frac{\ln(e^7-1)}{4}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{\frac{\ln(e^7-1)}{4}\right\}$

$(2))$

14 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 0.$$

$x > 0$, dc $x^3 > 0$ et $\sqrt{x} > 0$ dc $\ln(x^3)$ et $\ln(\sqrt{x})$ existent.

$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 0$

donc $\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 3\ln(x) - 6 \times \frac{1}{2}\ln(x) = 0$

15 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(2x+3) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right).$$

$\ln(2x+3) = \ln\left(x\left(2+\frac{3}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(2+\frac{3}{x}\right)$

III – Sens de variation de la fonction ln et conséquences

Propriété

1) ***ln*** est définie et continue sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) ***ln*** est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout réel $x > 0$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

3) La fonction ***ln*** est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Preuve : 2)

$x > 0$ donc $e^{\ln(x)} = x$ → donc aussi $e^{u(x)} = x$. posons $u(x) = \ln(x)$

en admettant que $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$u'(x) = ?$

$u'(x) \times e^{u(x)} = 1$ donc $u'(x) = \frac{1}{e^{u(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \boxed{\frac{1}{x}}$

3) $x > 0$ donc $\frac{1}{x} > 0$ donc

$(\ln)'(x) > 0$ donc $\ln$ strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Conséquences : Etude du signe de $\ln(x)$, pour $x > 0$:

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

- **Pour tous réels x et y strictement positifs :** $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$
  $\ln(x) \geq \ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$

On retiendra donc que sur $]0\ ;\ 1[$, la fonction ***ln*** est à valeurs négatives, et que sur $]1\ ;\ +\infty[$, la fonction ***ln*** est à valeurs strictement positives

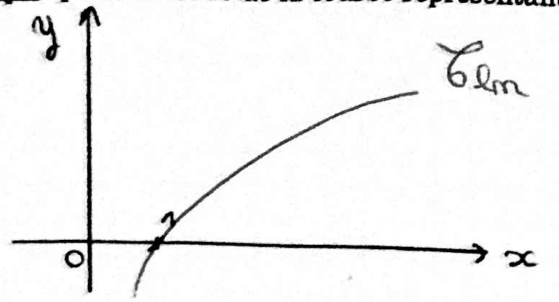
Preuve : tout découle de la stricte croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$

car $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$

↓

car $\ln$ déf sur $]0, +\infty[$

Illustration graphique : premier tracé de la courbe représentant la fonction ln.



Exercice 3

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = ln(4-2x)$.

2a) Etudier le signe de $u(x) = ln(x) - 2$ sur $]0\,;+\infty[$.

2b) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par : $g(x) = x\,ln(x) - 3x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $ln(x+3) + ln(x-2) \leq ln(6)$

1) ln est déf sur $]0;+\infty[$ dc $f(x)$ existe ssi $4-2x > 0$
$\iff x < 2$

dc $\mathcal{D}f =]-\infty; 2[$

2a) $x>0$, $u(x) = ln(x) - 2$
résolvons par ex : $ln(x) - 2 \geq 0$ $(u(x) \geq 0)$.
$\iff ln(x) \geq 2$
$\iff e^{ln(x)} \geq e^2$
$\iff x \geq e^2$

dc

x	0		e^2		$+\infty$
signe de $u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2b) $g(x) = x\,ln(x) - 3x$ et $x>0$ $\quad g(x) = \tilde{u}(x)v(x) - 3x$

$g'(x) = ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 3$ $\quad g'(x) = \tilde{u}'v + \tilde{u}v' - 3$

$g'(x) = ln(x) - 2 = u(x)$

grâce à 2a) on a le signe de $g'(x)$ qui est celui de $u(x)$.

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x) = u(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	

$g(e^2) = e^2 ln(e^2) - 3e^2 = e^2 \times 2ln(e) - 3e^2$

$g(e^2) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$

3) a) $\ln(x+3) + \ln(x-2) \leq \ln(6)$.

Conditi° d'existences : $\ln(x+3)$ existe ssi $x+3>0 \iff x>-3$
$\ln(x-2)$ " " ssi $x-2>0 \iff x>2$

Par suite $\ln(x+3)+\ln(x-2)$ ssi $\begin{cases} x>-3 \\ x>2 \end{cases}$ cad $x>2$.

on résout cette inéquation sur $]2,+\infty[$.

$\ln(x+3)+\ln(x-2) \leq \ln(6)$

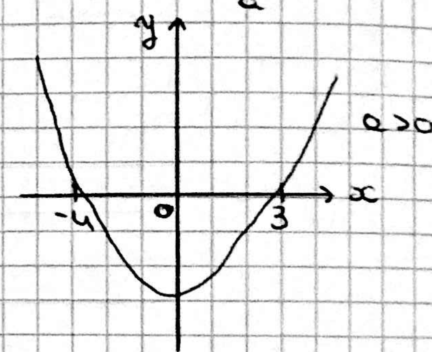
$\iff \begin{cases} \ln((x+3)(x-2)) \leq \ln(6) \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+3)(x-2) \leq 6 \\ x>2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2+x-6 \leq 6 \\ x>2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-12 \leq 0 \\ x>2 \end{cases}$

racine évidente : $x_1 = 3$ et ap avec $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

donc $x_2 = \frac{-12}{1} \times \frac{1}{x_1} = -12 \times \frac{1}{3} = \boxed{-4}$

ou avec Δ.



sur $\mathbb{R}$: $x^2+x-12 \leq 0 \iff -4 \leq x \leq 3$

or ici $x>2$ donc $\iff 2<x\leq 3$

de $S = \{]2;3]\}$

Exercice 4 ***(Fondamental XXL, bac)***

a) **Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $0{,}95^n \leq 10^{-8}$; $2^n > 10^6$.**

b) **n est un entier naturel non nul. On lance n fois d'affilée un dé cubique non truqué.**

Exprimer, en fonction de n, la probabilité, notée p_n, de l'événement suivant noté A_n :
A_n : "Obtenir au moins une fois six lors des n lancers".

b') **Déterminer, algébriquement, le nombre minimal de lancers à effectuer, pour que p_n soit supérieure à 0,99.**

a) Résolvons $0{,}95^n \leq 10^{-8} \iff \ln(0{,}95^n) \leq \ln(10^{-8})$

$\iff n\ln(0{,}95) \leq -8\ln(10)$

$\iff n \geq \frac{-8\ln(10)}{\ln(0{,}95)}$ car $\underbrace{\ln(0{,}95)}_{-0{,}05}<0$

avec $\frac{-8\ln(10)}{\ln(0{,}95)} \approx 359{,}12$ à 10^{-2} près

le + petit entier $\overset{\text{nat}}{}$ n tel que $0{,}95^n \leq 10^{-8}$ est de $n = 360$.

$2^n > 0$
$6 > 0$

- $2^n > 10^6 \iff \ln(2^n) > \ln(10^6)$ car $\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$\iff n\ln(2) > 6\ln(10)$

$\iff n > \dfrac{6\ln(10)}{\ln(2)}$ car $\ln(2) > 0$

or $\dfrac{6\ln(10)}{\ln(2)} \approx 19,93$ dc $n \geqslant 20$. (le plus petit entier cherché).

b) $\overline{A_n}$: " n'obtenir aucun 6 lors des n lancers".

Soit X la v.a égale au nb de 6 obtenus lors des n lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{6}$.

$P(\overline{A_n}) = P(X=0) = \binom{n}{0} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^0 \times \left(1 - \dfrac{1}{6}\right)^{n-0} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$

dc $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

$P_n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ car $P_n = P(A_n)$.

b') $P_n \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \geqslant 0,99$

$P_n \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,99 \geqslant \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$P_n \geqslant 0,99 \iff \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,01$

$P_n \geqslant 0,99 \iff \ln\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant \ln(0,01)$ car $\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$

$P_n \geqslant 0,99 \iff n\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0,01)$

$\ln(x) \leqslant 0$ si $x \in]0;1]$

$P_n \geqslant 0,99 \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$ car $\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < 0$

$\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) \approx -0,18$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 25,26$

Donc comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geqslant 26$.
Il faut lancer au minimum 26 fois le dé pr que la proba d'avoir au moins un 6 soit supérieure à 0,99.

IV – Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln (ln déf sur $]0\,;+\infty[$)

Propriété ♥♥♥ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ ♥♥♥

Preuve: Soit A un réel positif, arbitrairement fixé (aussi grand soit-il).

1) • $\ln(x) \geq A \iff e^{\ln(x)} \geq e^A$

$\iff x \geq e^A$

Ceci étant vrai pr ∀ réel A positif, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{A\to+\infty} e^A = +\infty$ (th de comparaison).

2) • astuce belge : $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ pr $x > 0$

et $\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

et d'ap 1) $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ par compo $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

par op : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $-\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x)$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$

rem : l'axe des ordonnées (éq : $x=0$) est ASV à $\mathcal{C}_{\ln}$.

Application

Donner le tableau de variation complet de la fonction ln, et tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan sa courbe représentative.
On donnera les équations des tangente à C_{ln} aux points $A(1\ ;\ 0)$ et $B(e\ ;\ 1)$.
Justifier que C_{ln} est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur $]0\ ;+\infty[$.

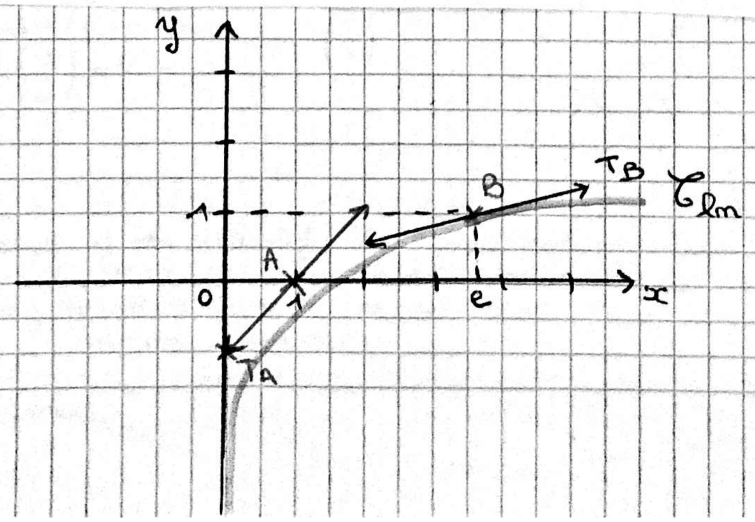
x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	0	1	↗ $+\infty$

$A(1;0) \in \mathcal{C}_{\ln}$

la tangente en A a pr éq réduite :
$y = (\ln)'(1) \times (x-1) + \ln(1) = x - 1$

et la tangente en $B(e;1) \in \mathcal{C}_{\ln}$ a pr éq :
$y = (\ln)'(e)(x-e) + \ln(e)$
$y = \dfrac{1}{e}(x-e) + 1 = \boxed{\dfrac{x}{e}}$

pas d'ordonnée à l'origine donc passe par l'origine.



Rem $f(x) = \ln(x)$ avec $x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ $\quad -1 < 0$ et $x^2 > 0$ dc $\frac{-1}{x^2} < 0$

$f''(x) < 0$

dc $f = \ln$ est concave sur $]0, +\infty[$.

Propriété ***(croissances comparées)***

①

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = ..0...$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = ..0..$

En d'autres termes, la fonction *ln* est négligeable devant l'identité au voisinage de $+\infty$.

②

- ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,ln(x) = ..0^-...$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n\,ln(x) = ..0..$

fct° auxiliaire

Preuve : ① Soit f la fct° déf sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$

étude du signe de $f'(x)$ sur $[1 ; +\infty[$

$x \geq 1$ dc $x > 0$ et $x \geq 1$ dc $\sqrt{x} \geq \sqrt{1}$ par ↗ de fct° $\sqrt{\ }$ sur $[0, +\infty[$

$\sqrt{x} \geq 1$

$1 - \sqrt{x} \leq 0$

dc $f'(x) \leq 0$, f ↘ sur $[1 ; +\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	-2 ↘	

$f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = -2$

dc $\forall x \geq 1$, $f(x) \leq -2 < 0$

dc pr $x \geq 1$, $\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$

pr $x \geq 1$, $\quad 0 \leq \ln(x) < 2\sqrt{x}$

dc $x \geq 1$ $\quad \frac{0}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$ car $x \geq 1 > 0$

$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

d'ap le Th des Gendarmes

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

② astuce belge : $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ dc $x \ln(x) = x \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$x \ln(x) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et 1) : $\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{\ln(X)}{X}\right) = 0$

dc par compo $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$ par prdt $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 0$

dc on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0^-$

---

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

Exercice 5

1) Déterminer les limites suivantes : *a)* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x))$; *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(x))$; *c)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x\ln(x)}$

2) Pout tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) Déterminer, en revenant à la définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ldots\ldots$

o) $\frac{\ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}$

par c.c $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

dc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par prdt : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0$

1) a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0^+$

par somme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x)) = +\infty$

b) $x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (c.c)

par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ par lp $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(x)) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ par lp $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\ln(x)) = +\infty$

par lq : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x\ln(x)}\right) = 0$

d) $x > 0$ et $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$

$f(x) = \ln(e^x + 3x) - x = \ln\left(e^x\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)\right) - x$

$f(x) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) - x = \cancel{x} + \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) - \cancel{x}$

$f(x) = \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par c.c $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\right)$

dc par lp et ls $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) = 1$

$\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln en 1.

par compo $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

dc l'axe des abscisses $(y = 0)$ est A.S.H à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3) $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{\ln(1+h) - 1}{h}\right)$

posons $f(x) = \ln(x)$ pr $h \neq 0$

$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{f(1+h)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

or ln est dérivable en 1 dc : $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right) = f'(1)$.

or $f(x) = \ln(x)$

dc $f'(x) = \frac{1}{x}$ dc $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ dc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

V- Fonctions composées et logarithme népérien

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = \ln(u(x))$.

Alors g est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a : ♥♥ $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ♥♥.

Preuve : $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ donc $\ln(u(x))$ existe

$g(x) = \ln(u(x)) = f(u(x))$ avec $\begin{cases} f(X) = \ln(X) \\ f'(X) = \frac{1}{X} \end{cases}$

Par dérivat° de fct° composées : $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$
$g'(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice 6

1) Calculer la dérivée de : $f(x) = ln(2x^2 + 1)$. Préciser l'intervalle de dérivabilité de f.

2) Même question avec : $g(x) = ln(4+2e^x)$.

3) Même question avec : $h(x) = ln(e^{-x} + 1)$.

1) $f(x) = ln(2x^2+1) = ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x^2+1$ et $u'(x) = 4x$.
u est strictement positive (strictement) sur $\mathbb{R}$ car
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ dc $2x^2 \geq 0$ dc $2x^2+1 \geq 1 > 0$

dc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x}{2x^2+1}$

2) $g(x) = ln(4+2e^x) = ln(u(x))$ où $u(x) = 4+2e^x$ et $u'(x) = 2e^x$
$u(x) > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $2e^x > 0$, $4+2e^x > 0$
$2 > 0$

$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^x}{4+2e^x}$

3) $h(x) = ln(e^{-x}+1) = ln(u(x))$ avec $\begin{cases} u(x) = e^{-x}+1 \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, dc $e^{-x}+1 > 1 > 0$

$h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$

VI – Logarithme décimal (celui utilisé en Physique, Chimie, SI)

Définition : On appelle fonction logarithme décimal (ou logarithme à base 10), la fonction notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par : $log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$

Remarque : $log(x)$ est donc égale au produit d'une constante multiplicative et de $ln(x)$.

Calculer :

$log(1) = \frac{ln(1)}{ln(10)} = \frac{0}{ln(10)}$

$log(10) = \frac{ln(10)}{ln(10)} = 1$

$log(100) = \frac{ln(100)}{ln(10)} = \frac{ln(10^2)}{ln(10)} = \frac{2\,ln(10)}{ln(10)} = 2$

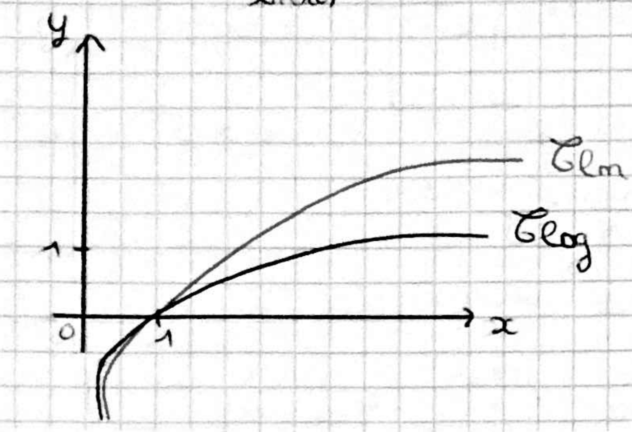
$log(10^n) = n$ où n est un entier naturel. $\frac{ln(10^n)}{ln(10)} = \frac{n\,\cancel{ln(10)}}{\cancel{ln(10)}} = n$

La fonction log a les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln, elle a aussi même sens de variation et mêmes limites aux bornes de l'ensemble de définition que la fonction ln. Montrons par exemple quelques-unes de ses propriétés :

$log(ab) = log(a) + log(b)$

$log(ab) = \frac{ln(ab)}{ln(10)} = \frac{ln(a)+ln(b)}{ln(10)} = \frac{ln(a)}{ln(10)} + \frac{ln(b)}{ln(10)} = log(a) + log(b)$

pr $x>0$ $(\log)'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \times \frac{1}{x} > 0$ log strictement ↗ sur $]0,+\infty[$



$10 > e$
$\ln(10) > \ln(e)$
$\ln(10) > 1$
$\frac{1}{\ln(10)} < \frac{1}{1}$

La fonction *log* est par exemple utilisée en Chimie : *pH* = - *log*[H_3O^+].

Par exemple, si on dilue 10 fois une solution de monoacide fort, que fait le *pH* de la solution initiale ?

$pH' = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{10}\right) = -\left(\log([H_3O^+]) - \log(10)\right) = \underbrace{-\log([H_3O^+])}_{= pH} + \underbrace{\log(10)}_{1}$

La fonction *log* est aussi utilisée dans de nombreux domaines tels l'acoustique.

Une utilité de la fonction *log* en arithmétique : elle permet de déterminer le nombre de chiffres d'un entier écrit dans le système décimal. dc $\log(10^m) \leq \log(A) < \log(10^{m+1})$ car log ↗ $]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow m \leq \log(A) < m+1$

***Rappel* : Soit *A* entier naturel. Il existe un unique entier naturel *n*, tel que :** $10^m \leq A < 10^{m+1}$

dc $Ent(\log(A)) = m$

***Remarque* : l'écriture décimale de *A* est donc composée de** $m+1$ **chiffres au total.**

A se compose de $m+1$ chiffres or $m \leq \log(A) < m+1$

On a de plus : dc $m+1 = Ent(\log(A)) + 1$ A est composé de $\underbrace{Ent}_{= \text{partie entière}}(A) + 1$ chiffre

Donc, le nombre total de chiffre de l'écriture décimale de *A* est égal à : $Ent(\log(A)) + 1$

***Application* : Combien de chiffre comporte l'écriture décimale de $A = 2^{2023}$?** $c = Ent(\log(2^{2023})) + 1$

$c = Ent\underbrace{(2023\log(2))}_{608,98} + 1 = 608 + 1 = 609$ dc 2^{2023} est composé de 609 chiffres.

Exercice complémentaire

Complément* : *Fonctions puissances.

Pour tout réel $x > 0$, on définit, pour tout réel a, x^a par : x^a = $e^{a\ln(x)}$

Etudier suivant les valeurs du réel *a*, le sens de variation de la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par :

$f(x) = x^a$.

$$\left(\begin{array}{ll} x^a = e^{a\ln(x)} & \\ a = 2 \quad e^{2\ln(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^2 = x^2 & \end{array}\right)$$

$f_a(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$ $\quad x > 0 \quad = e^{u(x)} \qquad u'(x) = \frac{a}{x}$

$f'_a(x) = \frac{a}{x} e^{a\ln(x)}$

or $x > 0$ et $e^{a\ln(x)} > 0$ dc $f'(x)$ a le m̂ signe que a

dc si $a > 0$ alors f croît strictement ↗ sur $]0 ; +\infty[$
si $a < 0$ " décroît " "
si $a = 0$ " constante " ".

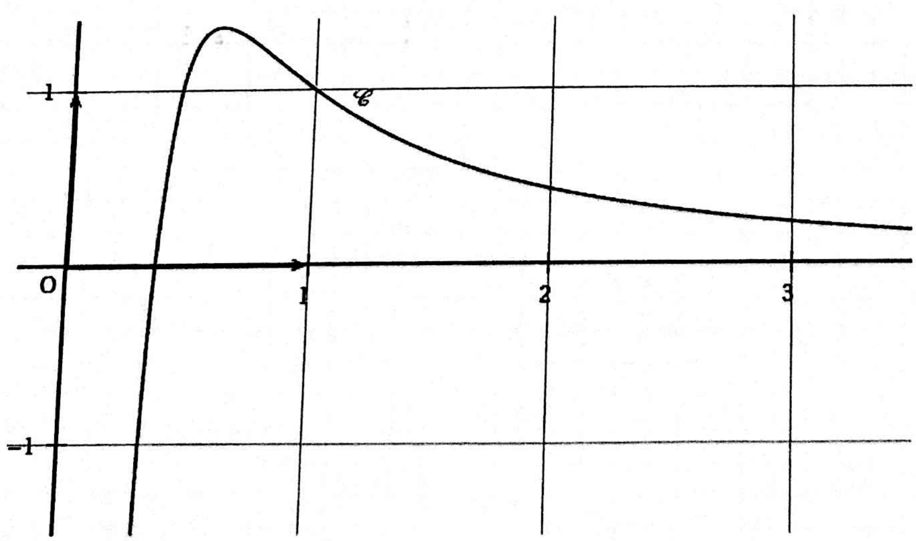
VII – Quelques exercices de type bac

Exercice I

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.
   b. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

b. **Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.**
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. **Dresser le tableau des variations de la fonction f.**

3. a. **Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.**

b. **En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.**

$x>0$

1)a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ dc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln(x)) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ par lp $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

b) Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

$f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$

par lr: $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

par lp et ls $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c) l'axe des abs $(y=0)$ est ASH à C_f en $+\infty$.
l'axe des ordonnées $(x=0)$ est ASV à C_f.

2a) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1+\ln(x)$ $u'(x) = \dfrac{1}{x}$
$v(x) = x^2$ $v'(x) = 2x$

$f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2} = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - (1+\ln(x))\times 2x}{x^4} = \dfrac{x-2x(1+\ln(x))}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{x-2x-2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{-x-2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(-1-2\ln(x))}{x^4}$

$f'(x) = \boxed{\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}}$

2b) $-1-2\ln(x) > 0$
$-2\ln(x) > 1$
$\ln(x) < \dfrac{1}{-2}$ car $-2<0$
$e^{\ln(x)} < e^{-\frac{1}{2}}$
$x < e^{-\frac{1}{2}}$

donc $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ $S =]0\,; e^{-\frac{1}{2}}[$

Ici: $x>0$ dc $x^3>0$ par suite $f'(x)$ a le m̂ signe que $-1-2\ln(x)$.

Donc $f'(x)>0 \iff 0<x<e^{-\frac{1}{2}}$

b) et c) de

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

- $f(e^{-\frac{1}{2}}) = \dfrac{1+\ln(e^{-\frac{1}{2}})}{(e^{-\frac{1}{2}})^2} = \dfrac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{e^{-\frac{2}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{e}{1} = \boxed{\dfrac{e}{2}}$

3) a) Résolvons $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff \dfrac{1+\ln(x)}{x^2} = 0 \iff 1+\ln(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff e^{\ln(x)} = e^{-1} \iff x = \dfrac{1}{e}$ $\quad S = \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$

donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en le pt A $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.

3) b)

x	0		$\frac{1}{e}$		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	
signe $f(x)$	‖	$-$	0		$+$		

Exercice II

Vrai ou Faux : justifier comme il se doit :

1)

Affirmation 1 : $\ln(\sqrt{e^7}) + \dfrac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \dfrac{e^{\ln(2)+\ln(3)}}{e^{\ln(3)-\ln(4)}}$

2)

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

et $\mathcal{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Affirmation 2 : $\mathcal{C}_n$ admet une unique tangente horizontale en un unique point nommé S_n dont l'ordonnée est égale à n^2.

Affirmation 3 : l'équation : $\overbrace{\ln(x-1) - \ln(x+2)}^{\text{on trace la courbe}} = \overbrace{\ln(4)}^{\text{là aussi}}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

et on regarde les pt d'intersect°.

✓

A1 $\ln(\sqrt{e^7}) + \dfrac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \dfrac{1}{2}\times 7 + \dfrac{9}{2} = \dfrac{16}{2} = \boxed{8}$

$$\frac{e^{\ln(2)+\ln(3)}}{e^{\ln(3)-\ln(4)}} = \frac{e^{\ln(2)}\times e^{\ln(3)}}{\frac{e^{\ln(3)}}{e^{(4)}}} = \frac{2\times 3}{\frac{3}{4}} = 6\times\frac{4}{3} = \frac{24}{3} = \boxed{8}$$

$\Rightarrow$ Affirmat° vraie

A2 Résolvons : $f_m'(x)=0$ pr savoir si C_m admet des tangentes horizontales.

$f_m'(x) = 2me^{x} - 2e^{2x}$

dc ~~annuler~~ $f_m'(x) = 0 \iff 2me^x - 2e^{2x} = 0 \iff 2me^x = 2e^{2x}$

$\iff me^x = e^{2x}$

$\iff m = \dfrac{e^{2x}}{e^x}$

$\iff e^x = m$

$\iff \ln(e^x) = \ln(m)$

$\iff \boxed{x = \ln(m)}$

$S = \{\ln(m)\}$

$S_m(\ln(m) ; y_{S_m})$ avec $y_{S_m} = f_m(\ln(m))$ car $S_m \in C_m$

$f_m(\ln(m)) = 2m\, e^{\ln(m)} - e^{2\ln(m)}$

$f_m(\ln(m)) = 2m\times m - (e^{\ln(m)})^2 = \boxed{m^2}$ $\Rightarrow$ A2 vraie

A3 Cond d'existence :

$\ln(x-1)$ existe ssi $x-1>0 \iff x>1$

$\ln(x+2)$ " " ssi $x+2>0 \iff x>-2$

$\underbrace{\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(4)}$

$\iff \ln\left(\dfrac{(x-1)}{x+2}\right) = \ln(4) \iff \dfrac{x-1}{x+2} = 4$ et $x>1$

$\iff x-1 = 4(x+2)$ et $x>1$

$\iff x-1 = 4x+8$ et $x>1 \iff 3x = -9 \iff \underbrace{x=-3 \text{ or } x>1}_{\text{incompatible}}$.

$S = \emptyset$. A3 fausse.

Exercice III

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.