Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x-1)}{x}\right) = x\left(1 - \frac{\ln(x-1)}{(x-1)} \times \ldots\right)$

$\downarrow +\infty \quad \downarrow 1 \quad 0$

$+\infty \times 1$

2. a. Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

   b. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, complété par les limites.

   c. Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

Partie I :

$U_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

(U_n) semble $\searrow$ et converger vers l. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Partie II

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x = 1$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+$

or $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \ln(X) = -\infty$ par compo $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln(x-1) = -\infty$

par lp et ls $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x - \ln(x-1)) = +\infty$

2a) $f(x) = x - \ln(u(x))$

$$f'(x) = 1 - \frac{u'}{u} = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

b) étude du signe de $f'(x)$ sur $]1, +\infty[$
$x > 1$ dc $x - 1 > 0$ dc $f'(x)$ a la m̂ signe que $x - 2$.
dc $f'(x) \geq 0 \iff x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$.

dc

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

$f(2) = 2 - \ln(2-1) = 2 - \ln(1) = 2$

c) f croît sur $[2; +\infty[$ et $f(2) = 2$ dc $\forall$ réel $x \geq 2$,
$f(x) \geq f(2)$ dc $f(x) \geq 2$.

Partie 3 :

1) $u_0 = 10$ $u_{n+1} = f(u_n)$
Soit $P(n)$ la prop : $u_n \geq 2$.

initialisat° : pr $n = 0$
$u_0 = 10$ or $10 \geq 2$, dc $u_0 \geq 2$ $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un entier arbitrairement fixé pr lequel $P(n)$ est vraie
On suppose que $u_n \geq 2$. Montrons alors sous cette hypothèse que
$P(n+1)$ est vraie, cad : $u_{n+1} \geq 2$.

par Hr : $u_n \geq 2$

$\underbrace{f(u_n)}$ $\geq f(2)$ car f est croissante sur $[2; +\infty[$

$u_{n+1} \geq 2$ $P(n+1)$ est vraie.

Conclu : $P(0)$ est vraie et pr $\forall$ ent nat n, $P(n)$ héréditaire.
D'ap le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$

2) étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$ où $n \in \mathbb{N}$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n = -\ln(u_n - 1)$
or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 2$
$u_n - 1 \geq 2 - 1$
$u_n - 1 \geq 1$ dc $\ln(u_n - 1) \geq \ln(1)$ car $\ln \nearrow$ sur $[0, +\infty]$
dc $\ln(u_n - 1) \geq 0$
dc $-\ln(u_n - 1) \leq 0$ car $-1 < 0$

dc $u_{n+1} - u_n < 0$
$u_{n+1} < u_n$ et (u_n) est décroissante.

3) (u_n) décroît et est minorée par 2 car $u_n \geq 2$.
d'ap le th de convergence des suites monotones, (u_n) est convergente. Soit $\ell = \lim_{\ell \to +\infty} u_n$

4) $u_{n+1} = f(u_n)$

$\downarrow x \to +\infty$

$\ell = f(\ell)$

$\Longleftrightarrow \ell = \ell - \ln(\ell - 1) \Longleftrightarrow -\ln(\ell-1) = 0 \Longleftrightarrow \ln(\ell - 1) = 0$

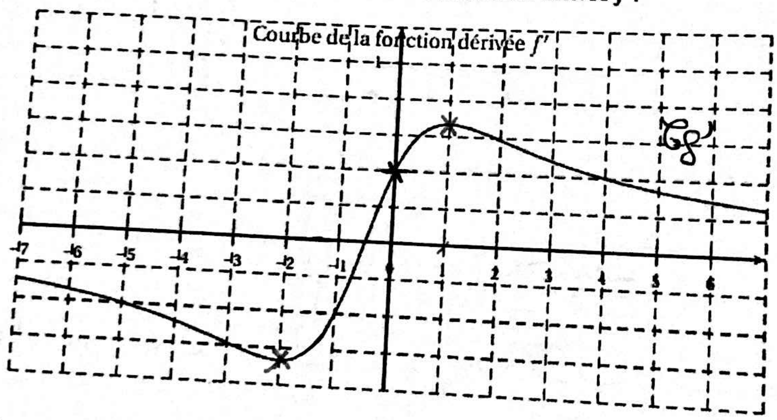
$\Longleftrightarrow e^{\ln(\ell-1)} = e^0 \Longleftrightarrow \ell - 1 = 1 \Longleftrightarrow \boxed{\ell = 2}$ $\quad S = \{2\}$

dc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

Exercice IV

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur R.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. a. Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   b. En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

1) $f'(0) = 2$ → lecture graphique
$f'(0)$ = coef directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

2) a)

x	-7		-2		1		7
$f'(x)$	-1,5	↘	-3,2	↗	3,3	↘	1,4

f décroît sur $[-7;-2]$ et $[1;7]$.
f croît sur $[-2;1]$.

b) Si $f' \nearrow$ sur I alors f est convexe sur I.
sur $[-2;1]$ f est convexe (aussi sur $[0;1]$ ou tt intervalle inclu dn $[-2;1]$).

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. a. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

1) $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times \frac{5}{2} = 1 - 10 = -9 < 0$

$x^2 + x + \frac{5}{2} = 0$ n'a pas de solution et $a > 0$

dc $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ $\ln(X)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

par lr et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$

par lr $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ par compo $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + x + 5) = +\infty$

FI en $-\infty$ dc $\ln(x^2 + x + \frac{5}{2}) = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{5}{2}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

par lp et ls $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{5}{2}\right) = +\infty$

par lr $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ par composé $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$ $\quad u'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$

3) étude du signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: cond d'existence

f est définie sur $\mathbb{R}$, dc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$

dc $f'(x)$ a le m̂ signe que $2x + 1$

$f'(x) \geq 0 \iff 2x + 1 \geq 0 \iff 2x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \ln\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right)$

4 a) f est continue sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ car dérivable.

f est strictement ↗ sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$. (q 3)

$\ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0,81$; $2 \in \left[\ln\left(\frac{9}{4}\right), +\infty\right[$.

$\Rightarrow$ dc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'éq $f(x) = 2$ admet une unique soluto sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, on la note α, où $f(\alpha) = 2$.

4 b) Méthode des balayages

pas = à 1

x	$f(x)$
1	1,5041
2	2,1401

$1 < \alpha < 2$ à l'unité près

pas à 0,1

x	$f(x)$
1,7	1,9587
1,8	2,0202

$1,7 < \alpha < 1,8$ à 10^{-1} près

pas à 0,01

x	$f(x)$
1,76	1,9957
1,77	2,0019

$1,76 < \alpha < 1,77$ à 10^{-2} près.

si α est av 1,75 $\alpha \approx 1,7$ à 10^{-1}

si α est ap ou = 1,75 $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1}

ici $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1} près dc $\alpha > 1,75$, α plus proche de 1,8 que de 1,7.

5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$

étude du signe de $f''(x)$: il y a pt d'inflexion lorsque $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2 > 0$ car $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$ vu que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Par suite, $f''(x)$ a le même signe que $-2x^2 - 2x + 4$.

$f''(x) \geq 0 \iff -2x^2 - 2x + 4 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times (-2) \times 4 = \boxed{36} > 0$

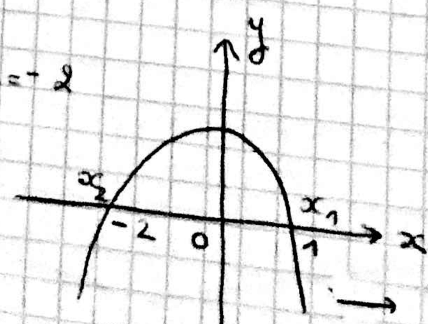
ici $\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

dc $f''(x) = 0$ admet 2 racines

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 6}{-4} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + 6}{-4} = -2$

or $a < 0$ donc



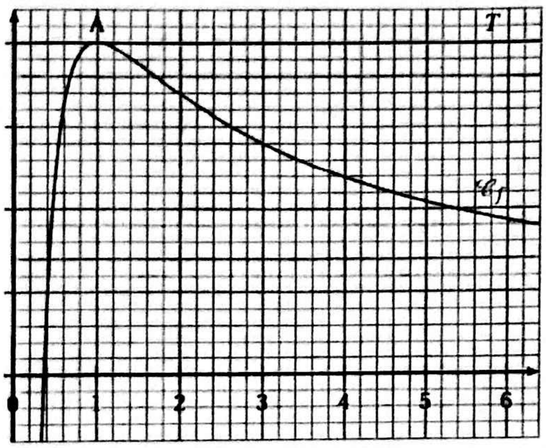
$\rightarrow -2x^2 - 2x + 4$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
convexité de f		concave		convexe		concave	

$\Rightarrow$ il y a 2 pts d'inflexion : les pts de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives -2 et 1.

Exercice V

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a+b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4+4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

1) $f(1) = 4$
$f'(1)$ est le coef directeur de la Tangente à $\mathcal{C}_f$ au pt d'abs 1 donc de T. Hors T est horizontale dc $f'(1) = 0$.

2) $f(x) = \frac{u}{v}$ $\quad u'(x) = b \times \frac{1}{x}$
$\quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - a - b\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}$$

3) $f(1) = 4 \iff \frac{a + b \times \ln(1)}{1} = 4 \iff a + b \times 0 = 4 \iff \boxed{a = 4}$

$f(x) = \frac{4 + b\ln(x)}{x}$

or $f'(1) = 0 \iff \frac{b - a - b\ln(1)}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$

dc $a = b = 4$ et $\boxed{f(x) = \frac{4 + 4\ln(x)}{x}}$

4) par la $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ par prdt et somme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (4 + 4\ln(x)) = -\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ par quotient : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{4 + 4\ln(x)}{x}\right) = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty}$ F.I en $+\infty$ dc :

$f(x) = \frac{4}{x} + 4 \times \frac{\ln(x)}{x}$

par c.c $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

par prdt et somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x} + 4 \times \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$ dc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

$\Rightarrow$ la droite d'eq $y = 0$ (axe abscisse) est ASH à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
$\Rightarrow$ l'axe des ordonnées est ASV à $\mathcal{C}_f$.

5) Grâce à q. 2 et $a = b = 4$

$f'(x) = \frac{4 - 4 - 4\ln(x)}{x^2} = \frac{-4\ln(x)}{x^2}$

étude du signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$

$x > 0$ dc $x^2 > 0$ dc $f'(x)$ a le m̂ signe que $-4\ln(x)$.

$f'(x) \geq 0 \iff -4\ln(x) \geq 0$
$\ln(x) \leq 0$ car $-4 < 0$
$e^{\ln(x)} \leq e^0$
$f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1$ et $x > 0$ dc $0 < x \leq 1$.

dc

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{4+4\ln(1)}{1}$

$f(1) = 4$

6) $\underset{x>0}{f'(x)} = \dfrac{-4\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ où $\alpha'(x) = -4 \times \frac{1}{x} = \frac{-4}{x}$

$\beta(x) = 2x$

$f''(x) = (f')'(x) = \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\beta^2} = \dfrac{\frac{-4}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln(x))}{(x^2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-4x + 8x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{\cancel{x}(-4+8\ln(x))}{\cancel{x} \times x^3} = \boxed{\dfrac{-4+8\ln(x)}{x^3}}$

7) étudions le signe de $f''(x)$ avec $x>0$:

$x>0$ dc $x^3>0$ dc $f''(x)$ a le m̂ signe que $-4+8\ln(x)$.

$f''(x) \geq 0 \iff -4+8\ln(x) \geq 0$

$\iff 8\ln(x) \geq 4$

$\ln(x) \geq \frac{4}{8}$ car $8>0$

$f''(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq \frac{1}{2} \iff e^{\ln(x)} \geq e^{\frac{1}{2}} \iff x \geq e^{\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule une fois sur $]0;+\infty[$ en changeant de signe :

dc $\mathcal{C}_f$ admet un seul pt d'inflexion d'abscisse $x = e^{\frac{1}{2}}$

$f(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{4+4\ln(e^{\frac{1}{2}})}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{e}}$

$I\left(\sqrt{e} ; \dfrac{6}{\sqrt{e}}\right)$

xercice VI

ur chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
e réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte
n'enlève de point.
ur répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
cune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

$\to 1 \times \ln(x) + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 1$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	**b.** $\frac{1}{x} - 1$	**c.** $\ln(x) - 2$	**d.** $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.

Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte?

a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

1) $f'(x) = 1\times\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1$

$f'(x) = \ln(x)$

2) FI : $0 \times (+\infty)$

$g(x) = x^2 - x^2\ln(x)$

par cc $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$

dc par pdt $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^2\ln(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^2 = 0$ par somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} g(x) = 0$

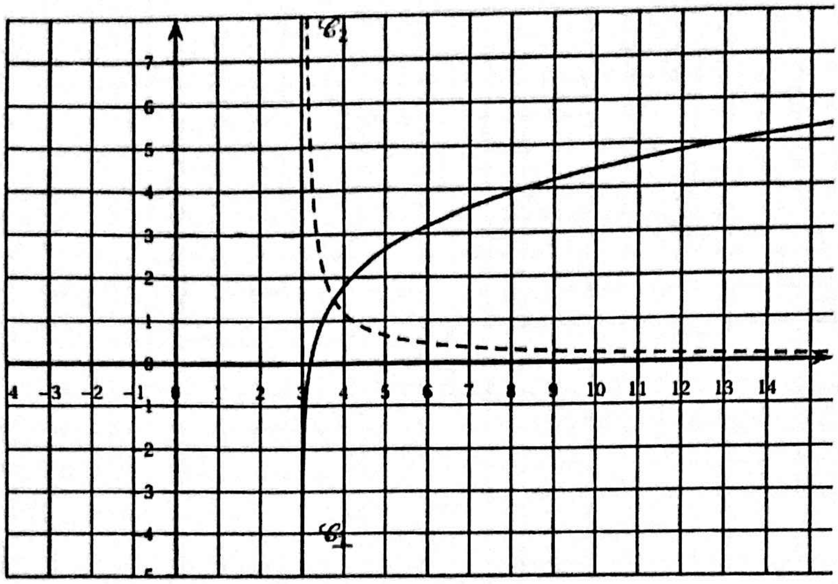
5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à

a. $\dfrac{2}{3}$; b. $+\infty$; c. $-\infty$; d. 0.

$f(x) = \dfrac{x\left(2\,\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x(3x+1)}$

Exercice VII

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\,;\,+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. a. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5\,;\,6[$.
   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. a. Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

PARTIE A :

1) $\mathscr{C}_2$ correspond à une fct° à valeurs strictement positive sur $]3, +\infty[= I$.

Si $\mathscr{C}_2$ était la courbe de f, alors f serait décroissante sur I. dc f' serait négative sur I, ce qui n'est pas le cas de $\mathscr{C}_2$.

dc $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_g$

2) Par lecture graphique : $f(x) = 3$ lorsque $x \approx 5{,}6$.

3) f est concave sur $]3, +\infty[$ car f' décroît sur $]3; +\infty[$.

PARTIE B :

1) $\ln(F)$ existe ssi $F > 0$

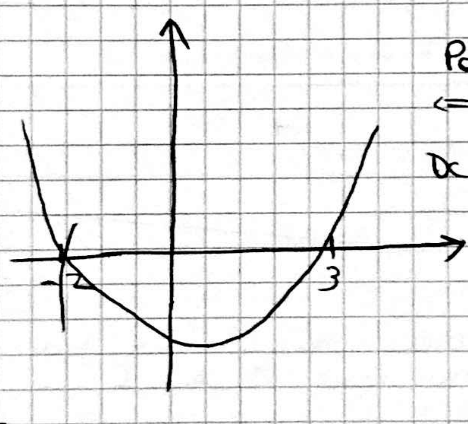
$\ln(x^2 - x - 6)$ est bien déf ssi : $x^2 - x - 6 > 0$, résolvons dc cette inéquat°.

$x^2 - x - 6 \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \times (1) \times (-6) = 25 > 0$

dc le trinôme ~~a le mê signe que a~~ admet 2 racines :

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$.

or $a > 0$ dc



Par suite $x^2 - x - 6 > 0$
$\Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 3$.

Dc si $x > 3$ on a bien : $x^2 - x - 6 > 0$ dc $\ln(x^2 - x - 6)$ existe.

2) $I =]3, +\infty[$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$ or $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} x^2 - x - 6 = 0^+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(X) = -\infty$ dc par compo $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 0}} \ln(x^2 - x - 6) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ FI pr $(x^2 - x - 6)$.

Or $x^2 - x - 6 = x(x-1) - 6$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$ dc par pdt et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - x - 6) = +\infty$

or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ par compo $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$ dc la droite d'eq $x = 3$ est A.S.V à C_f

3) a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 - x - 6$

$u'(x) = 2x - 1$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \boxed{\dfrac{2x-1}{x^2 - x - 6}}$

b) étude du signe de $f'(x)$ sur $I =]3 ; +\infty[$:

d'ap la quest° 1 : si $x > 3$, $x^2 - x - 6 > 0$ dc $f'(x)$ a le mê signe que $2x - 1$.

dc $f'(x) \geq 0 \iff 2x - 1 \geq 0 \iff \boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) f est continue sur I car f dérivable sur I

f est strictement $\nearrow$ sur I à valeurs ds $]-\infty, +\infty[$.

$3 \in]-\infty, +\infty[$

Dc d'ap le C. TVI, $f(x) = 3$ a une unique sol sur I, on la note α.

4b) $5{,}63 < \alpha < 5{,}64$ à 10^{-2} près

5a) $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x - 6} = \dfrac{w(x)}{v(x)}$ $w'(x) = 2$, $v'(x) = 2x - 1$

$f''(x) = \dfrac{w'v - wv'}{v^2} = \dfrac{2(x^2 - x - 6) - (2x-1)(2x-1)}{(x^2 - x - 6)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x - 6)^2} = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$

b) étude du signe de $f''(x)$

$(x^2 - x - 6)^2 > 0$ car $x > 3 > 0$

dc $f''(x)$ a le m̂ signe que $-2x^2 + 2x - 13$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times (-13) = -100 < 0$

$\Delta < 0$ dc le trinôme a le m̂ signe que a

or $a < 0$ dc $-2x^2 - 2x - 13 < 0$ sur I.

dc $f''(x) < 0$ sur I dc f est concave sur I.

Exercice VIII

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2[1 - 2\ln(x)].$$

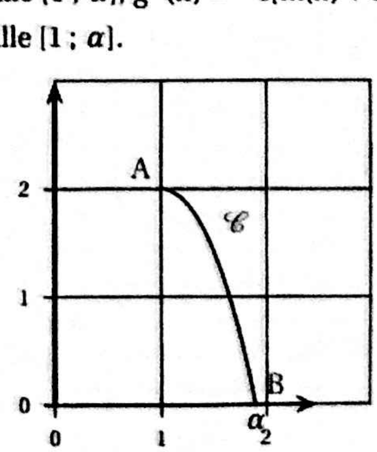
La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
3. a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

PARTIE B

1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g''(x) = -4[\ln(x) + 1]$.
   Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$.
2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.
   a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, $g(x) \geqslant \dfrac{-2}{\alpha - 1}x + \dfrac{2\alpha}{\alpha - 1}$.



PARTIE A :

1) $g(e) = 1 + e^2(1 - 2\ln(e)) = 1 + e^2(1-2) = 1 - e^2$

avec $1 - e^2 \approx -6,4$ dc $\boxed{g(e) < 0}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ par prdt et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2\ln(x)) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ par prdt et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

3)a) $x > 0$ $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x)) = 1 + u \times v$

$u' = 2x$ $\quad g'(x) = 2x(1 - 2\ln(x)) + \cancel{x^2} \times \frac{-2}{\cancel{x}}$

$v' = \frac{-2}{x}$

$\cancel{g'(x) = 2x(1 - 2\ln(x) - 1)}$

$g'(x) = 2x - 4\ln(x) - 2x = \boxed{-4\ln(x)}$

3b) $x > 0$ et $-4 < 0$

$-4x < 0$.

$\ln(x) \geq 0 \iff x \geq e^0 \iff x \geq 1$.

dc

x	0		1		$+\infty$
signe $-4x$	0	$-$		$-$	
signe $\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 + 1^2(1 - 2\ln(1)) = 2$

$g(x) = 1 + \underbrace{x^2}_{0} - \underbrace{2x^2\ln(x)}_{0}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1 \text{ en } 0^+}$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1$

3c) f cont sur $[1;+\infty[$ car dérivable.
f strictement $\searrow$ sur $[1,+\infty[$
$0 \in]-\infty;2]$.

D'ap le cor du TVI, l'eq $g(x) = 0$ a une unique sol α avec $\alpha \in [1;+\infty[$

d) $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$ à 10^{-2} près

4)

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe $g(x)$		$+$	0	$-$	

PARTIE B

1) $x \in [1,\alpha]$, $g''(x) = -4(\ln(x)+1)$

Montrons que $\forall x \in [1;\alpha]$, $g''(x) \leq 0$

or $x \in [1;\alpha]$ dc $1 \leq x \leq \alpha$

$$\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(\alpha) \text{ car } \ln \nearrow \text{ sur } [1;+\infty[$$

$$0 \leq \ln(x) \leq \ln(\alpha)$$

$$1 \leq \ln(x)+1 \leq \ln(\alpha)+1$$

$$-4 \geq \underbrace{-4(\ln(x)+1)}_{g''(x)} \geq -4(\ln(\alpha)+1) \text{ car } -4<0$$

en perte d'info $-4 \geq g''(x)$ dc $g''(x) < 0$ dc g est concave sur $[1;\alpha[$.

2) a) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{\alpha-1} = \dfrac{-2}{\alpha-1}$

$A(1; g(1))$ avec $g(1)=2$
$B(\alpha; g(\alpha))$ $B(\alpha;0)$ $\qquad y = mx+p$

Dc (AB) $y = \dfrac{-2}{\alpha-1}x + p$

or $B(\alpha;0) \in (AB)$ dc $0 = \dfrac{-2}{\alpha-1} \times \alpha + p$

$$\frac{2\alpha}{\alpha-1} = p$$

dc (AB) a pour équat° $y = \dfrac{-2}{\alpha-1} \times x + \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$

b) f est convexe sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses cordes
↳ segment reliant 2 pts de la courbe

f est concave sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses cordes

D'ap ⑧ 1), g est concave sur $[1;\alpha[$ dc $\mathcal{C}_g$ est alors au-dessus de chacune de ses cordes dc en particulier au-dessus de la corde $[AB]$. Par suite

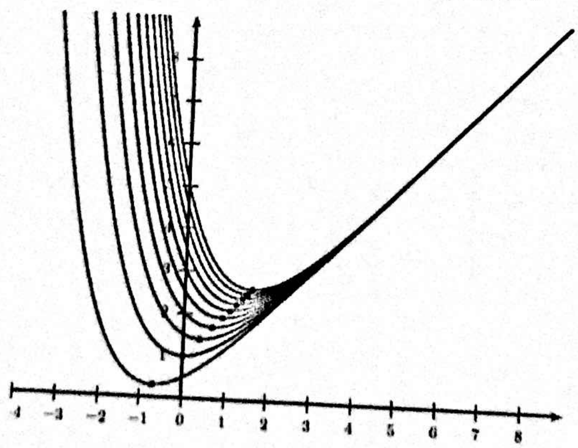
$$\forall x \in [1;\alpha],\ g(x) \geq \frac{-2}{\alpha-1}x + \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

Exercice supplémentaire au chapitre

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?

$f_k'(x) = 1 - ke^{-x}$ avec $k > 0$

étude du signe de $f_k'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$f_k'(x) \geq 0 \iff 1 - ke^{-x} \geq 0 \iff 1 \geq ke^{-x} \iff e^{-x} \leq \frac{1}{k}$ car $k > 0$.

$f_k'(x) \geq 0 \iff \ln(e^{-x}) \leq \ln\left(\frac{1}{k}\right) \iff -x \leq -\ln(k) \iff x \geq \ln(k)$.

x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_k(x)$		↘		↗	

Grâce à cette étude, f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en l'abscisse $x = \ln(k)$.

Soit A_k le pt de $\mathcal{C}_k$: $A_k(\ln(k) ; f_k(\ln(k)))$.

avec $f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)}$

$= \ln(k) + k \times \frac{1}{e^{\ln(k)}} = \ln(k) + k \times \frac{1}{k} = \ln(k) + 1$.

$A_k(\underbrace{\ln(k)}_{x_{A_k}} ; \underbrace{\ln(k)+1}_{y_{A_k}})$ or $y_{A_k} = \ln(k) + 1 = x_{A_k} + 1$

dc le pt A_k appartient à la droite d'eq $y = x + 1$.

0.

(k).