

Exercice III

On considère la fonction f définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

- Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
- Étudier les variations de la fonction g sur $] -1,5 ; +\infty[$.
- Démontrer que, dans l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$.

- Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- En déduire que la suite (u_n) converge.

$x > -1,5$, f est définie sur $] -1,5 ; +\infty[$

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1$$

PARTIE A : Ici $g(x) = f(x) - x$

$$g(x) = \ln(2x+3) - 1 - x$$

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow -1,5 \\ x > -1,5}} (2x+3) = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

$$\text{Donc par comparaison : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1,5 \\ x > -1,5}} \ln(2x+3) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -1,5^+} (-1-x) = 0,5$$

$$\text{Par somme } \lim_{\substack{x \rightarrow -1,5 \\ x > -1,5}} g(x) = -\infty$$

$$2) \quad g(x) = \ln(2x+3) - 1 - x$$

$$g(x) = \ln(u(x)) - 1 - x$$

$$\text{ou } \begin{cases} u(x) = 2x+3 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \frac{2}{2x+3} - 1 = \frac{2}{2x+3} - \frac{2x+3}{2x+3} = \frac{2 - (2x+3)}{2x+3}$$

$$= \frac{2-2x-3}{2x+3} = \frac{-2x-1}{2x+3}$$

Étudions le signe de $g'(x)$ sur $]-1,5; +\infty[$:

$$x > -1,5 \text{ donc } 2x > -3 \text{ donc } 2x+3 > 0$$

Donc $g'(x)$ a le même signe que $-2x-1$

$$\text{d'où : } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

Donc

x	$-1,5$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0
$g(x)$			

$$g(-0,5) = \ln(2 \times (-0,5) + 3) - 1 + 0,5$$

$$g(-0,5) = \ln(2) - 0,5$$

3) a) * g est dérivable car continue sur $I =]-0,5; +\infty[$

** g est strictement décroissante sur I

$$\text{*** } \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0,3, \text{ donc } 0 \in]-\infty; \ln(2) - \frac{1}{2}]$$

D'après le CTVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur I : on la note α
 $g(\alpha) = 0$

$$b) \quad 0,25 < 0 < 0,26 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

PARTIE B: $x > -1,5$ et $f(x) = \ln(2x+3) - 1$

a) Si $x \in [-1; \alpha]$ soit si $-1 \leq x \leq \alpha$

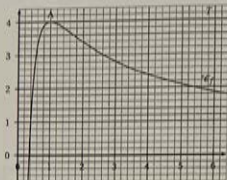
alors par croissance de f sur $[-1; \alpha]$ on a $f(-1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$

$$\rightarrow \boxed{f(-1)} = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(-2+3) - 1 = \frac{\ln(1)}{0} - 1 = \boxed{-1}$$

$$\rightarrow f(\alpha) = \ln(2\alpha+3) - 1$$

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. La courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale T au point $A(1; 4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b .

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}$$

7. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

1) $f(1) = 4$

$f'(1) = \text{coeff. directeur de } T = 0 \text{ car } T \text{ est horizontale}$ } BAC

2) $x > 0$ et $f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

ou $\begin{cases} u(x) = a + b \ln(x) \\ u'(x) = 0 + b \times \frac{1}{x} = \frac{b}{x} \end{cases}$

Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$\begin{cases} v(x) = x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln(x)) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{b + a - b \ln(x)}{x^2}$$

$$3) f(x) = 4 \iff \frac{a + b \ln(x)}{1} = 4$$

$$\iff \boxed{a = 4}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \iff \frac{b - 4 - b \ln(x)}{x^2} = 0$$

$$\iff b - 4 = 0 \iff b = 4$$

alors : $\boxed{f(x) = \frac{4 + 4 \ln(x)}{x}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par produit et somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4 + 4 \ln(x)) = -\infty$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$

} Donc par quotient :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc F.I. du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln(x)}{x} = \frac{4}{x} + 4 \frac{\ln(x)}{x}$$

Par examens comparés : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$

Donc par somme et produit : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$

5) $f(x) = \frac{4 + 4 \ln(x)}{x}$ et d'après 4.2) et 3) : $f'(x) = \frac{4 - 4 - 4 \ln(x)}{x^2} = \frac{-4 \ln(x)}{x^2}$
 $-4 < 0, x > 0$ donc $x^2 > 0$ donc $\frac{-4}{x^2} > 0$

Donc $f'(x)$ a le signe contraire de $\ln(x)$

$$f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 0 \iff 0 < x \leq e$$

$$\boxed{f'(x) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 1}$$

Donc

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	4	0

$$6) f'(x) = \frac{-4 \ln(x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{4}{x} \times x^4 - (-4 \ln(x)) \times 2x}{x^8}$$

$$f''(x) = \frac{-4x + 8 \ln(x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{x(-4 + 8 \ln(x))}{x \times x^3} = \frac{4 + 8 \ln(x)}{x^3}$$

$$7) f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4 + 8 \ln(x) \geq 0 \quad \text{car } x^3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 8 \ln(x) \geq 4 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$$

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
f'(x)		-	+

f'' s'annule et change de signe en \sqrt{e}

f' a un unique pt d'extremum

admettant à B : $B(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$

$$\text{avec } f(\sqrt{e}) = \frac{4 + 4 \ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^4} = \frac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{e} = \frac{6}{e}$$

$$B(\sqrt{e}, \frac{6}{e})$$

Exercice 1

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x - x + 1) \xrightarrow{\text{positivité } (x^2 - x + 1)} f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 = \ln(x) + 1$$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	b. $\frac{1}{x} - 1$	c. $\ln(x) - 2$	d. $\ln(x) - 1$
-------------	----------------------	-----------------	-----------------

2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 |1 - \ln(x)| = x^2 - x^2 \ln(x) = x^2 - x \times x \ln(x)$

a. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$	b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$	c. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$	d. La fonction g n'admet pas de limite en 0.
--	--	--------------------------------------	--

c. c.
↳ 0
∞ > 0

3.

On considère la f

La fonction g est

a. \times (quatre)

c. $| -2 \times \infty |$

4. On considère la

On note '6' la co

On note '7' la ta

Une équation c

a. $y = (3 - e)$

c. $y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)$

5. La limite en $+\infty$

a. $\frac{2}{3}$

4) $h(x)$

I_f dans

I_f a p

$h'(c)$

$y =$

$y =$

$y =$

5) $f(x)$

$f(x)$

3.

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$. = on cherche toutes les valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $g(x)$
 La fonction g est définie sur :

- a. ~~X~~ (quoique x ne peut pas être 0)
 c. $]-2; +\infty[$

- b. $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$
 d. $]-2; 1[$

↳ TABLEAU

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$2x+4$	-	0	+	+
$\frac{x-1}{2x+4}$	+		-	0

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$k(x) = 3 \ln(x) - x.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse $x = e$.Une équation de T est :

a. $y = (3-e)x$

b. $y = \left(\frac{3-e}{e}\right)x$

c. $y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x + 1$

d. $y = (e-1)x + 1$

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1}$ est égale à

a. $\frac{2}{3}$;

b. $+\infty$;

c. $-\infty$;

d. 0.

4) $k(x) = 3 \ln(x) - x \rightarrow k'(x) = \frac{3}{x} - 1$

T_e tangente à \mathcal{C} au pt d'abscisse $x = e$ T a pour équation $y = k'(e)(x-e) + k(e)$

$$k'(e) = \frac{3}{e} - 1 \quad \text{et} \quad \begin{aligned} k(e) &= 3 \ln(e) - e \\ k(e) &= 3 - e \end{aligned}$$

$$y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)(x-e) + 3 - e$$

$$y = \left(\frac{3}{e} - 1\right)x - \frac{3}{e}e + e + 3 - e$$

$$y = \left(\frac{3-e}{e}\right)x$$

5) $f(x) = \frac{2 \ln x}{3x^2 + 1}$

$$f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 \ln(x)}{x^2} \times \frac{1}{3 + \frac{1}{x^2}}$$

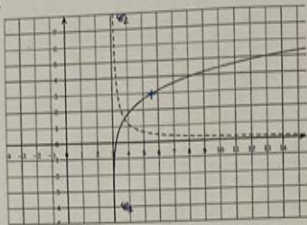
\downarrow
 $\infty \cdot \infty$
 $(\infty \cdot \infty)$
 0

\downarrow
 $\frac{1}{3}$
 0

RL

Exercice 11

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f' , toutes deux définies sur $]3; +\infty[$.

- Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
- Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
- Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f .

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \mathcal{C}_1 \rightarrow \text{courbe } f \\ \quad \mathcal{C}_2 \rightarrow \text{courbe } f' \end{array} \right\} \text{ leur seule coupe de } f' \text{ et solutions de } f$$

$$2) \quad f(x) = 3 \text{ a pour solution } x \approx 5,5$$

$$3) \quad f \text{ est concave sur }]3; +\infty[\text{ car } f' \text{ décroît sur }]3; +\infty[$$

Partie B

- Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3; +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
- On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I . Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I .
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I .
- Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I .
 - Étudier le sens de variation de la fonction f sur I .
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I .
- Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5; 6[$.
 - Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
- Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.
 - Étudier la convexité de la fonction f sur I .

PARTIE B:

1) $\ln(x^2 - x - 6)$ existe sur $x^2 - x - 6 > 0$ car \ln est définie sur $]0; +\infty[$

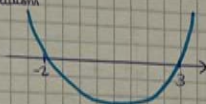
Résolvons l'inéquation : $x^2 - x - 6 > 0$

$$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 1 \times (-6) = \boxed{25}$$

$\Delta > 0$ donc deux solutions

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$



$$x \mapsto x^2 - x - 6$$

$$a = 1 \quad (a > 0)$$

donc : $x^2 - x - 6 > 0 \iff x < -2$ ou $x > 3$

$$\iff x \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$$

et finalement : $x^2 - x - 6$ est bien définie sur $I =]3; +\infty[$

2) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ et $x \in I$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x^2 - x - 6) = 0^+ \quad (\text{cf course})$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Par comparaison : $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$

En $+\infty$: $f(x) = (x(x-1)+6)$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)$$

Par produit et somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-1)+6 = +\infty$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc par comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) a) $f(x) = \ln(x^2 - x - 6) = \ln(u(x))$ où $u(x) = x^2 - x - 6$
 $u'(x) = 2x - 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$$

3) b) 2) après q) $x^2 - x - 6 > 0$ si $x \in I$

Donc $f'(x)$ a le même signe que $2x-1$

donc $f'(x) > 0 \iff 2x-1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$



4) a) i) f est continue sur I car dérivable sur I

ii) f est strictement croissante sur I

iii) $3 \in]0; +\infty[$ donc 3 est une valeur intermédiaire pour f .

Donc d'après le CTVI $f(x) = 3$ a une unique solution sur I

On trouve $f(5) = \ln(25 - 5 - 6) = \ln(14) \approx 2,63 (< 3)$

$f(6) = \ln(36 - 6 - 6) = \ln(24) \approx 3,18 (> 3)$

Donc $\alpha \in]5; 6[$

4) b) $5, < \alpha < 6$, à 10^{-2} près

5) $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-6}$

Donc $f''(x) = \frac{2x(x^2-x-6) - (2x-1)(2x+1)}{(x^2-x-6)^2}$

$f''(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 12 - (4x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - x - 6)^2}$

$f''(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - 12 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$

b) Étudions le signe de $f''(x)$ sur $I =]3; +\infty[$

$\forall x \in I, (x^2 - x - 6)^2 > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que le trinôme

$-2x^3 + 2x - 13$

$a = -2, b = 2, c = -13$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-2)(-13) = 4 - 104 = -100$

$\Delta < 0$ donc le trinôme a le même signe que $a = -2$

donc $\forall x \in I, -2x^3 + 2x - 13 < 0$

donc $\forall x \in I, f''(x) < 0$

Donc f est concave sur I

Exercice 111

Soit g la fonction définie

La fonction g est dérivable
On appelle C la courbe

PARTIE A

- Justifier que $g(e)$ est
- Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- Montrer que g est
 - Étudier le sens de variation de g
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1; +\infty[$.
 - Donner un encadrement de cette solution.
- Déduire de ce qui précède que g est

1) $g(e) = 1 + e^2(1 - 2e)$
 $g(e) = 1 + e^2(1 - 2e)$
 $g(e) = 1 - e^2(2e - 1)$

Donc $g(e) < 0$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2 \ln(x)) = -\infty$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Rq $g(x) = 1 + e^{2x}(1 - 2x)$

$g'(x) = 2e^{2x}(1 - 2x) + e^{2x}(-2)$

...

3) a) $g(x) = 1 + e^{2x}(1 - 2x)$

$g'(x) = 0 + 2e^{2x}(1 - 2x) + e^{2x}(-2)$

$g'(x) = 2e^{2x}(1 - 2x - 1)$

$g'(x) = -4xe^{2x}$

$g''(x) = -4e^{2x} - 8xe^{2x}$

Exercice VII

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x)).$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(e)$ est strictement négatif.
2. Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
3. a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $g'(x) = -4x \ln(x)$.
b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Dédurre de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

1) $g(e) = 1 + e^2(1 - 2 \ln(e))$
 $g(e) = 1 + e^2(1 - 2 \times 1) = 1 + e^2 \times (-1)$
 $g(e) = 1 - e^2 \quad (\approx -6, 39)$

Donc $g(e) < 0$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par produit et somme.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2 \ln(x)) = -\infty \\ \text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit et somme} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$$

Rq: $g(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x))$

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x) \quad \xrightarrow{\text{C.C.}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$$

... $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$

3) a) $g(x) = 1 + x^2(1 - 2 \ln(x)) = 1 + u(x)v(x)$ où $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 1 - 2 \ln(x) \\ v'(x) = -\frac{2}{x} \end{cases}$

$$g'(x) = 0 + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$g'(x) = 2x \times (1 - 2 \ln(x)) + x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right)$$

$$g'(x) = 2x - 4x \ln(x) - 2x$$

$$g'(x) = -4x \ln(x)$$

3) b) $x \in]0, +\infty[$, donc $x > 0$

$$-4 < 0 \text{ donc } -4x < 0$$

Or sur $]0, 1[$, $\ln(x) < 0$

Donc si $x \in]0, 1[$, alors $f'(x) > 0$

Si $x \in]1, +\infty[$, alors $\ln(x) > 0$

Donc $f'(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		2	

$$g(1) = 2$$

3) c) * g est continue sur I car dérivable sur $I =]1, +\infty[$

** g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

*** $0 \in]-\infty, 2]$

Donc d'après le CTVI, $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]1, +\infty[$

3) d) Calculatrice

cherche l'équation :

$$1,89 < \alpha < 1,90 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

$$\alpha \approx 1,895025$$

4) g décroît sur $[1, \alpha]$ et $g(\alpha) = 0$

→ Donc $\forall x \in [1, \alpha]$; $g(x) > 0$

De même si $x > \alpha$; $g(x) < 0$

Ex I : $h > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f_h(x) = x + ke^{-x}$$

$$f_h'(x) = 1 - ke^{-x}$$

$$f_h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - ke^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq ke^{-x}$$

$$f_h'(x) > 0 \Leftrightarrow ke^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \ln(e^{-x}) < \ln\left(\frac{1}{k}\right)$$

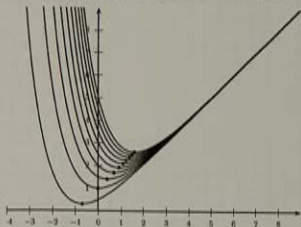
$$f_h''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln(k) \Leftrightarrow -x \leq -\ln(k)$$

Exercices supplémentaires au chapitre

L: Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé. On a représenté ci-dessous quelques courbes \mathcal{C}_k pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe \mathcal{C}_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas ?

x	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
$f_k'(x)$	-	0	+
$f_k(x)$	↘ ↗ $\ln(k)+1$		

D'après ce tableau : f_k admet un minimum sur \mathbb{R} atteint lorsque $x = \ln(k)$

Et minimum est égal à : $f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)} = \ln(k) + k \times \frac{1}{\frac{e^{\ln(k)}}{k}} = \ln(k) + 1$

Donc $A_k (\ln(k); \ln(k)+1)$

$$y_{A_k} = \ln(k) + 1 = x_{A_k} + 1$$

Donc $A_k \in (\Delta)$ où (Δ) est la droite d'éq : $y = x + 1$

II: On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$$

On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.
3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

6. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.
- b. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation :

$$e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation $f(x) = x$.
- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$$1) f(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right) = \ln(u(x)) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x) = e^{\frac{x}{2}} + 2 \\ u'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} > 0; \frac{1}{2} > 0 \\ \text{Donc } e^{\frac{x}{2}} + 2 > 2 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } f'(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$2) f(2\ln(2)) = \ln\left(e^{\frac{2\ln(2)}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\ln(2)} + 2\right)$$

$$\boxed{f(2\ln(2))} = \ln(2+2) = \ln(4) = 2\ln(2)$$

$$3) u_0 = \ln(9) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \ln\left(e^{\frac{u_n}{2}} + 2\right)$$

$$\text{Donc } u_1 = \ln\left(e^{\frac{u_0}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\frac{\ln(9)}{2}} + 2\right) \quad \text{or } e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$

$$u_1 = \ln\left(\sqrt{e^{\ln(9)}} + 2\right) = \ln(\sqrt{9} + 2) = \ln(3+2) = \ln(5)$$

$$4) n \in \mathbb{N}, \text{ soit } P(n) \text{ la propriété } 2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$\text{Initialisation } \begin{array}{l} u_0 = \ln(9) \\ u_1 = \ln(5) \end{array}$$

$$\text{On a } \ln(4) = \ln(u) \text{ et comme } 4 < 5 < 9$$

Par strict croissante de \ln sur $]0, +\infty[$

$$\ln(4) < \ln(5) < \ln(9)$$

$$2 \ln(2) < u_{n+1} < u_n$$

Hérédité Soit n un entier fixé tel que $P(n)$ est vraie. On suppose que: $2 \ln(2) < u_{n+1} < u_n$

Donc par croissance de f sur \mathbb{R}

$$f(2 \ln(2)) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$
$$2 \ln(2) \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion: $P(0)$ vraie et $P(n)$ est héréditaire

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, 2 \ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n$$

5) D'après 4) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) décroît, $u_n \geq 2 \ln(2)$ donc (u_n) minoré par $2 \ln(2)$

\Rightarrow Donc (u_n) converge (car décroissante et minorée)

6) a) $x^2 - x - 2 = 0$
 $a=1, b=-1, c=-2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\Delta > 0 \text{ donc 2 solutions: } \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \end{cases} \quad \mathcal{Y} = \{-1; 2\}$$

6) b) $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$ (##)

$$\exists \text{ pose } X = e^{\frac{x}{2}} \text{ donc } X^2 = (e^{\frac{x}{2}})^2 = e^x = a^x$$

de sorte (##) s'écrit: $X^2 - X - 2 = 0$ donc d'après 6a) $X = -1$ ou $X = 2$

$$\text{Donc } e^{\frac{x}{2}} = 1 \text{ Par la sol. } \left| \begin{array}{l} e^{\frac{x}{2}} = 2 \\ \text{car } e^{\frac{x}{2}} > 0 \end{array} \right. \text{ Donc } \ln(e^{\frac{x}{2}}) = \ln(2)$$
$$\frac{x}{2} = \ln(2)$$
$$x = 2 \ln(2)$$

$$\mathcal{Y} = \{2 \ln(2)\}$$

c) $f(x) = x \Leftrightarrow \ln(e^{\frac{x}{2}} + 2) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln(e^{\frac{x}{2}} + 2) = \ln(e^x)$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} + 2 = e^x$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$$

$$\text{Donc } \mathcal{Y} = \{2 \ln(2)\}$$

d) D'après 5) (u_n) converge vers un réel noté l

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$

$l = f(l)$ par continuité de f sur \mathbb{R} .

Donc l est sol de $f(x) = x$ donc d'après 5) c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \ln(2)$$