Chapitre IX :

« En mathématiques, évident est le mot le plus dangereux. » Eric Temple Bell

Chapitre IX — Fonction logarithme népérien

I – Généralités

On sait que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$ a	$+\infty$

Donc, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet ..une..unique..solution : on note $\ln(a)$
Car la fc^t exp est continue, strict. croissante sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$; donc $a \in]0 ; +\infty[$; donc a est une V.I pour exp. D'après le C.T.V.I ; $e^x = a$ admet une unique solution réelle.

Définition

Soit ***a un réel strictement positif.***
♥On appelle logarithme népérien de a, noté $\ln(a)$, ***l'unique réel solution de l'équation :***
$e^x = a$, d'inconnue x. ♥

Conséquences

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $\underbrace{]0 ; +\infty[}_{⚠}$, et à tout réel x strictement positif, elle associe le réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle vaut x.

$\ln :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto \ln(x)$ avec par définition : $\boxed{e^{\ln(x)} = x}$. $(*)$

Important :	On a donc : ♥♥ $\boxed{x>0 \text{ et } y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y}$ ♥♥ $(**)$

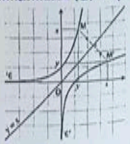
On a donc immédiatement : ♥♥♥

- Pour tout réel x ***strictement positif***, $e^{\ln(x)} = x$. $(*)$
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = .x..$ $(**)$
- $\ln(1) = ...0...$ car $\ln(1)$ est l'unique solution de $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\ln(e) = .1..$ car $\ln(e)$ // ; $e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$

Remarque : Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan, les courbes représentatives de la fonction exponentielle et celle de la fonction $\ln$ sont donc ....symétriques..par..rapport..à..la $\overbrace{\text{droite } (\Delta) \text{ d'éq : } y = x}^{1^{\text{ère}} \text{ bissectrice}}$

Illustration et justification :

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions exp et ln. Pour tous réels $x > 0$ et y, dire que $M'(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y = \ln(x)$, c'est-à-dire $x = e^y$, ce qui équivaut à dire que $M(y ; x)$ appartient à $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Si $M(a ; b)$ et que M' est le symétrique de M p/R à : $y = x$ alors $M'(b ; a)$
(sera établie au chap de géométrie suivant)

Soit $x>0$ et M le pt d'abscisse x de $\mathcal{C}_{exp}$: $M(x\,;e^x)$

Le symétrique de M p/r à $y=x$ (appelons-le M') a donc pour coordonnées :

$M'(\underbrace{e^x}_{x_{M'}}\,;\underbrace{x}_{y_{M'}})$

Comme $\ln(e^x)=x$, $y_{M'}=\ln(x_{M'})$

$\boxed{\text{Donc } M'\in\mathcal{C}_{\ln}}$

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a l'équivalence : ♥♥ $\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$ ♥♥

$a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$

Si $\ln(a)=\ln(b)$
alors $\underbrace{e^{\ln(a)}}_{a}=\underbrace{e^{\ln(b)}}_{b}$
$a=b$

Exercice 1

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\ln(x)=-3$ b) $\ln(x)=4$ c) $e^x=2$ d) $\ln(x+5)=\ln(4x-8)$ e) $3e^{2x}-5=0$

a) $\ln(x)=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ e^{\ln(x)}=e^{-3}\end{cases} \Leftrightarrow x=e^{-3}\ (>0)$

$\mathcal{S}=\{e^{-3}\}$

M2 : $\ln(x)=(-3) \Leftrightarrow \ln(x)=\ln(e^{-3}) \Leftrightarrow x=e^{-3}$

$(\forall x\in\mathbb{R},\ \ln(e^x)=x)$

b) $\ln(x)=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ e^{\ln(x)}=e^{4}\end{cases} \Leftrightarrow x=e^4\ (>0)$

$\mathcal{S}=\{e^4\}$

c) $e^x=2 \Leftrightarrow \ln(e^x)=\ln(2) \Leftrightarrow x=\ln(2)$

$\mathcal{S}=\{\ln(2)\}$

d) $\ln(x+5)=\ln(4x-8)$

⚠ ln est défini sur $]0\,;+\infty[$

Conditions d'existence :

$\begin{cases} \ln(x+5) \text{ existe } (= \text{est calculable}) \text{ ssi } x+5>0 \text{ ; ssi } x>-5 \\ \ln(4x-8) \text{ existe ssi } 4x+8>0 \text{ ssi } x>2 \end{cases}$

Ainsi on résoud l'équation sur $I=]2\,;+\infty[$

$\ln(x+5) = \ln(4x-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x+5 = 4x-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 3x = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = \frac{13}{3} \end{cases}$; $\frac{13}{2} > 2$

$\Rightarrow$ Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{13}{2} \right\}}$

- $\ln(x^2 + 2x + 3) = \ln(2x+7)$

$x^2 + 2x + 3 = 2x + 7$

$x^2 = 4$ $\qquad \mathcal{S} = \{-2 ; 2\}$

$x = 2$ ou $x = -2$

2) $3e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} = 5$

$3e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{5}{3}$

$3e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\ln(e^{2x})}_{=} = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$3e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

$3e^{2x} - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ $\qquad \mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right) \right\}$

II – Propriétés algébriques de la fonction ln

image (produit) = somme des images

Théorème (relation fonctionnelle de ln)

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : ♥♥♥♥ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ ♥♥♥♥

Remarque : La fonction ln transforme donc un produit en une somme

(Soit l'action "inverse = réciproque" de la fonction exponentielle).

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

Image (somme) = produit images

Preuve : $x > 0$ donc $\ln(x)$ existe

$y > 0$ donc $\ln(y)$ existe

Donc $xy > 0$; donc (xy) existe

Soit $A = \ln(xy)$; $B = \ln(x)$; $C = \ln(y)$

Mq : $A = B + C$ en justifiant que $e^A = e^{B+C}$

Or $e^A = e^{\ln(xy)}$

$= xy$

$e^{B+C} = e^{\ln(x) + \ln(y)} = \underbrace{e^{\ln(x)}}_{=} \times \underbrace{e^{\ln(y)}}_{=}$

$e^{B+C} = e^{\ln(x) + \ln(y)} = x \times y$

Donc $e^{B+C} = e^A$, donc $A = B + C$

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

♥♥♥ Propriétés importantes de la fonction ln ♥♥♥

1) Pour tout réel $x>0$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

2) Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

3) Pour tout réel $x>0$ et pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$ ✱✱

4) Pour tout réel $x>0$, $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Preuve : $x>0$

① $\frac{1}{x} \times x = 1$ Donc $\underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\times x\right)}_{\text{(th fonda)}} = \underbrace{\ln(1)}$ Donc $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = 0$

② $x>0$; $y>0$, donc $\frac{x}{y}>0$ donc $\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ existe

Or $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$

Donc $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\times\frac{1}{y}\right) \overset{\text{(th F)}}{=} \ln(x) + \underbrace{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}_{①}$

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + (-\ln(y))$

$\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$

④ $x>0$; donc $\sqrt{x}>0$; donc $\ln(\sqrt{x})$ existe

Or ; $(\sqrt{x})^2 = x$

Donc : $\ln((\sqrt{x})^2) = \ln(x)$

$\underbrace{\ln(\sqrt{x}\times\sqrt{x})}_{\text{th F.}} = \ln(x)$

$\ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = \ln(x)$

$2\ln(\sqrt{x}) = \ln(x)$

$\boxed{\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)}$

③ $x>0$ / Étape n°1 : Supposons que $n\in\mathbb{N}$. $x^n>0$; donc $\ln(x^n)$ existe

On procède par récurrence sur l'entier n :

Soit $P(n)$ la propriété : $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Initialisation : Pour $n=0$; $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0\times\ln(x)$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose que $\underbrace{\ln(x^n) = n\ln(x)}_{H.R}$

Montrons alors que : $\underbrace{\ln(x^{n+1}) = (n+1)\ln(x)}_{BUT}$

- Or $x^{n+1} = x^n \times x$

Donc $\ln(x^{n+1}) = \underbrace{\ln(x^n \times x)}_{th\ F}$

$\ln(x^{n+1}) = \underbrace{\ln(x^n)}_{H.R} + \ln(x)$

$\ln(x^{n+1}) = n\ln(x) + \ln(x) = (n+1)\ln(x)$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : Initialisée et héréditaire à tout ordre $P(n)$ est vraie pour tout entier

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ \ln(x^n) = n\ln(x)}$$

Étape n°2 : Soit n un entier strictement négatif

alors $-n > 0$; donc $-n \in \mathbb{N}$: Or $x^n = x^{-(-n)} = \frac{1}{x^{-n}}$

Donc $\ln(x^n) = \ln\left(\frac{1}{x^{-n}}\right) = -\ln(x^{-n}) = -(-n)\ln(x)$

$$\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$$

Exercice 2

1) Exprimer en fonction de $ln(2)$ et $ln(3)$, chacune des expressions suivantes :

A = $ln(6)$; B = $ln(9)$; C = $ln(\frac{2}{3})$; D = $ln(\frac{1}{12})$; E = $ln(\sqrt{12})$; F = $ln(\sqrt{3}+1)+ln(\sqrt{3}-1)$

2) Simplifier les écritures : G = $ln(\frac{1}{e^2})$ H = $ln(e^4) + ln(2e^{-1})$.

13 a) Démontrer que pour tout réel x,

$$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1).$$

b) Résoudre l'équation $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = 7$.

14 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 0.$$

15 Démontrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\ln(2x + 3) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right).$$

1) $\bullet\ A = \ln(6) = \ln(2\times 3) = \ln(2) + \ln(3)$

$\bullet\ B = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$

$\bullet\ C = \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(2) - \ln(3)$

$\bullet\ D = \ln\left(\frac{1}{12}\right) = -\ln(12) = -\ln(2\times 2\times 3) = -(2\ln(2) + \ln(3)) = -2\ln(2) - \ln(3)$

$\bullet\ E = \ln(\sqrt{12}) = \frac{1}{2}\ln(12) = \frac{1}{2}\ln(2\times 2\times 3) = \frac{1}{2}(2\ln(2) + \ln(3))$

$E = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3)$

$\bullet\ F = \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1) = \ln((\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)) \overset{IR3}{=} \ln(\sqrt{3}^2 - 1^2)$

$F = \ln(3-1) = \ln(2)$

2) $G = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\underbrace{\ln(e)}_{1} = -2$

$H = \underbrace{\ln(e^4)} + \underbrace{\ln(2e^{-1})}$

$H = \underbrace{4\ln(e)} + \ln(2) + \ln(e^{-1})$

$H = 4 + \ln(2) - \ln(e) = 4 + \ln(2) - 1$

$H = 3 + \ln(2)$

$\boxed{13}$ a) $x \in \mathbb{R}$

M1 G→D $\quad 4x + \ln(1+e^{-4x}) = \ln(e^{4x}) + \ln(1+e^{-4x}) = \ln(e^{4x}\times(1+e^{-4x}))$

$= \ln(e^{4x} + \underbrace{e^{4x}\times e^{-4x}}_{e^0}) = \ln(e^{4x}+1) \quad (\text{car } e^0 = 1)$

M2 : D→G $\quad \ln(e^{4x}+1) = \ln\left(e^{4x}\left(1+\frac{1}{e^{4x}}\right)\right) = \underbrace{\ln(e^{4x})} + \ln(1+e^{-4x})$

$= 4x + \ln(1+e^{-4x})$

b) $\underbrace{4x + \ln(1+e^{-4x})}_{\text{q. précédente}} = 7$

$\ln(e^{4x}+1) = 7$

Donc $\underbrace{e^{\ln(e^{4x}+1)}} = e^7$

$e^{4x}+1 = e^7$

$e^{4x} = e^7 - 1\ (>0)$

Donc $\underbrace{\ln(e^{4x})} = \ln(e^7-1)$

$4x = \ln(e^7-1)$

$x = \frac{\ln(e^7-1)}{4}$

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\ln(e^7-1)}{4}\right\}$

14 $x>0$; donc $x^3>0$; $\sqrt{x}>0$

$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 3\ln(2) - 6\times\frac{1}{2}\ln(x) = \boxed{0}$

15 $x>0$ donc $2x>0$ donc $2x+3>3>0$

M_1 : $\ln(2x+3) = \ln\left(x\left(2+\frac{3}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(2+\frac{3}{x}\right)$

M_2 : $\ln(x) + \ln\left(2+\frac{3}{x}\right) = \ln\left(x\left(2+\frac{3}{x}\right)\right) = \ln(2x+3)$

III – Sens de variation de la fonction ln et conséquences

Propriété

1) ♥♥♥ ln est définie et continue sur $]0\ ;\ +\infty[$. ♥♥♥

2) ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout réel $x>0$, ♥♥♥ $(ln)'(x) = \frac{1}{x}$ ♥♥♥

3) La fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Preuve :

② Posons $u(x) = \ln(x)$ et $f(x) = e^{\ln(x)} = e^{u(x)} = x$

Admettons que u est dérivable sur $]0;+\infty[$: $f'(x) = \underbrace{u'(x)\,e^{u(x)}} = 1$ on dérive

$u'(x) = \frac{1}{e^{u(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

Donc $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

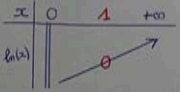
Conséquences : Etude du signe de $ln(x)$, pour $x>0$:

- $ln(1) = 0$
- $ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

- Pour tous réels x et y strictement positifs : $ln(x) < ln(y) \Leftrightarrow 0 < x < y$
  $ln(x) \geq ln(y) \Leftrightarrow x \geq y$

♥♥♥On retiendra donc que sur $]0;1[$, la fonction ln est à valeurs NÉGATIVES, et que sur $]1;+\infty[$ la fonction ln est à valeurs strictement POSITIVES ♥♥♥

Preuve :



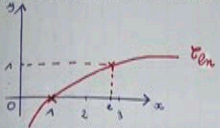
• Si $x>1$; alors par strict ↗ de ln sur $]0;+\infty[$

$\ln(x) > \ln(1)$

$\ln(x) > 0$

Récip : Si $\ln(x) > 0$; alors $\underbrace{e^{\ln(x)}}_{x>1} > e^0$ car exp. strict. ↗ sur $\mathbb{R}$

Illustration graphique : premier tracé de la courbe représentant la fonction ln.



Exercice 3

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = ln(4-2x)$.

2a) Etudier le signe de $u(x) = ln(x) - 2$ sur $]0\,;+\infty[$.

2b) Etudier le sens de variation de la fonction g définie par : $g(x) = x\,ln(x) - 3x$ sur $]0\,;+\infty[$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$ln(x+3) + ln(x-2) \leq ln(6)$

1) $f(x) = \ln(4-2x)$

→ ln est définie sur $]0;+\infty[$; donc $\ln(4-2x)$ existe ssi $4-2x>0$
ssi $4>2x$
ssi $\frac{4}{2}>x$ ssi $x<2$

$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty\,;2[}$

2a) $u(x) = \ln(x) - 2$ où $x>0$

$u(x)>0 \iff \ln(x)-2>0 \iff \ln(x)>2$

$u(x)>0 \iff e^{\ln(x)} > e^2$ (car ln strict ↗ sur $]0;+\infty[$)

$u(x)>0 \iff x>e^2$

→ Donc (négation) : $u(x) \leq 0 \iff 0<x\leq e^2$

D'où :

x	0		e^2		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2b) $g(x) = \underbrace{x\ln(x)}_{\text{produit}} - 3x$; $x>0$ où : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

⚠ on dérive

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 3$

$g'(x) = \ln(x) + \underbrace{x \times \frac{1}{x}}_{=1} - 3$

$g'(x) = \ln(x) - 2 = u(x)$

g' a le m̂ signe que u.

D'après q 2a)

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$-e^2$	↗	

$g(e^2) = e^2 \ln(e^2) - 3e^2$

$g(e^2) = e^2 \times \underbrace{2\ln(e)}_{=1} - 3e^2 = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$

3) $\ln(x+3) + \ln(x-2) \leqslant \ln(6)$

$\ln(x+3)$ existe si $x+3>0$ si $x>-3$
$\ln(x-2)$ — si $x-2>0$ si $x>2$ } Donc on résout l'inéquation sur $I =]2;+\infty[$

$\underbrace{\ln(x+3) + \ln(x-2)}\leqslant \ln(6)$

$\ln((x+3)(x-2)) \leqslant \ln(6) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) \leqslant 6 \\ x>2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3x - 6 \leqslant 6 \\ x>2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 \leqslant 0 \\ x>2 \end{cases}$

$x^2 + x - 12 \leqslant 0$

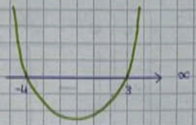
$a = 1$; $b = 1$; $c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-12) = 49$

$\Delta > 0$ donc 2 solutions

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \boxed{-4}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \boxed{3}$



Donc $x^2 + x - 12 \leqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant 3$

Ainsi (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ -4 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3$ $\quad S =]2;3]$

Exercice 4 ***(Fondamental XXL, bac)*** ⚠

a) Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que : $0{,}95^n \leq 10^{-8}$; $2^n > 10^6$.

b) *n* est un entier naturel non nul. On lance *n* fois d'affilée un dé cubique non truqué.

Exprimer, en fonction de *n*, la probabilité, notée p_n, de l'événement suivant noté A_n :
A_n : "Obtenir au moins une fois six lors des *n* lancers".

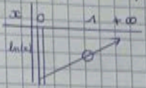
b') Déterminer, algébriquement, le nombre minimal de lancers à effectuer, pour que p_n soit supérieure à 0,99.

a) $0,95^n \leqslant 10^{-8} \iff \ln(0,95^n) \leqslant \ln(10^{-8})$

↑ 2 nbs > 0, et leurs ln sont rangés m̂ ordre

$0,95^n \leqslant 10^{-8} \iff n\ln(0,95) \leqslant -8\ln(10)$

$0,95^n \leqslant 10^{-8} \iff n \geqslant \dfrac{-8\ln(10)}{\ln(0,95)}$ car : $\ln(0,95) < 0$ car sur $]0;1[$, ln est négative



⇒ Grâce à une machine : $\dfrac{-8\ln(10)}{\ln(0,95)} \simeq 359,12$

Donc $0,95^n \leqslant 10^{-8} \iff n \geqslant 360$

car n est entier

- $2^n > 10^6 \iff \ln(2^n) > \ln(10^6)$

$2^n > 10^6 \iff n\ln(2) > 6\ln(10)$

$2^n > 10^6 \iff n > \dfrac{6\ln(10)}{\ln(2)}$ car $\ln(2) > 0$

Or $\dfrac{6\ln(10)}{\ln(2)} \approx 19,9$

Donc : $\boxed{2^n > 10^6 \iff n \geqslant 20}$

b) $P_n = P(A_n)$ où A_n = "obtenir au moins un 6 lors des n lancers"

$\overline{A_n}$ = "n'obtenir aucun six lors des n lancers"

Donc (indépendance des tirages) $P(\overline{A_n}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Donc $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

b') $P(n) > 0,99 \underset{b)}{\iff} 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n > 0,99 \iff 1 - 0,99 > \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

$P(n) > 0,99 \iff \left(\dfrac{5}{6}\right)^n < 0,01 \iff \ln\left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right) < \ln(0,01)$

$P(n) > 0,99 \iff n\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < \ln(0,01) \iff n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$ car : $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

Or : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 25,25$

Donc $P(n) > 0,99 \iff n \geqslant 26$

On doit effectuer au minimum 26 lancers.

IV – Limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction ln

Propriété ♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} ln(x) = -\infty$ ♥♥♥

Preuve :

→ Soit A un réel strictement positif, où arbitrairement fixé aussi grand soit

$\ln(x) > A \iff e^{\ln(x)} > e^{A}$ (exp strict ↗ sur $\mathbb{R}$)

$\ln(x) > A \iff x > e^{A}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$

→ Astuce belge : $x > 0$, $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$

Donc $\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\right)$

$= \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow$ Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

donc par composée de limite : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

Par suite, comme $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty}$

Application

Donner le tableau de variation complet de la fonction ln, et tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan sa courbe représentative.
On donnera les équations des tangente à C_{ln} aux points A(1 ; 0) et B(e ; 1).
Justifier que C_{ln} est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur $]0\ ;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$A(1;0) \in \mathscr{C}_{ln}$ car : $\ln(1) = 0$

∘ Soit T_A la tangente à $\mathscr{C}_{ln}$ en A :

T_A a pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

où : $f(x) = \ln(x)$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$y = \dfrac{1}{1}(x-1) + \underbrace{\ln(1)}_{0}$

$\boxed{y = x - 1}$

De même T_B = $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

$y = \frac{1}{e}(x-e) + \underbrace{\ln(e)}_{=1}$

$y = \frac{x}{e} - 1 + 1$

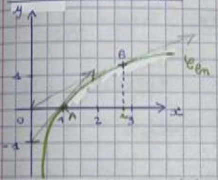
$\boxed{y = \frac{x}{e}}$

⚠ ln est concave sur $]0,+\infty[$ car : $f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc ln concave sur $]0,+\infty[$

Portrait Robot de $\mathcal{C}_{ln}$



Propriété (croissances comparées)

(1) • ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^{+}$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ (2)

En d'autres termes, la fonction ln est négligeable devant l'identité au voisinage de $+\infty$.

(3) • ♥♥♥♥♥ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0^{-}$ ♥♥♥♥♥ Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$ (4)

Preuve :

(1) Soit $x>0$ et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$

Étudions le sens de variation de f et son signe sur $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \boxed{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}$

$x = \sqrt{x}\times\sqrt{x}$

$x>0$ donc $f'(x) \geq 0 \iff 1-\sqrt{x} \geq 0$

$f'(x) \geq 0 \iff 1 \geq \sqrt{x} \iff 1^2 \geq \sqrt{x}^2$ car $x \mapsto x^2$ croît sur $]0,+\infty[$

$f'(x) \geq 0 \iff 1 \geq x$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

$f(1) = -2$

Le maximum de f sur $]0,+\infty[$ égal à -2 (<0)

Donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $\underbrace{f(x) < 0}$

$\ln(x) - 2\sqrt{x} < 0$

$\ln(x) < 2\sqrt{x}$

Si $x > 1$: $\ln(x) > 0$ donc on a

$0 < \ln(x) < 2\sqrt{x}$

Donc $\frac{0}{x} < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$ car $x > 0$

$$\boxed{0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$

(3) astuce Algé : $x\ln(x) = x\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} \times \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{= -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$

$\Rightarrow$ Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par c.c.

Donc par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0}$

(2) $n \geq 1$

$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (c.c) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = \begin{cases} 0 \text{ si } n > 1 \\ 1 \text{ si } n = 1 \end{cases}$

Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

Exercice 5

1) Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x))$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln(x))$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x\ln(x)}$

2) Pout tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \ln(1 + \frac{3x}{e^x})$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) Déterminer, en revenant à la définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \cdots$ ♥♥(post-bac).

1) a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -\ln(x) = +\infty$; donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x - \ln(x)) = +\infty}$

b) $f(x) = x - \ln(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc F.I du type " $+\infty - \infty$ "

On pour $x > 0$; $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ Par C.C

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1$ → Donc par produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

c) $g(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc par produit et quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$

2) $x > 0$, $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$

$f(x) = \ln(e^x + 3x) - \ln(e^x)$

$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 3x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3x}{e^x}\right)$

$\boxed{f(x) = \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)}$

Bis : $f(x) = \ln(e^x + 3x) - x$

$f(x) = \ln\left(e^x\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)\right) - x$

$f(x) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) - x$

$$\boxed{f(x) = \ln\left(1 + \frac{3x}{e^x}\right)}$$

Par CC de l'expo :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3x}{e^x}\right) = 0$

Or $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$

→ Donc par composée : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

La droite d'équation $y = 0$ (axe des ab.) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

3) $g(x) = \ln(x)$

Pour $h \neq 0$: $\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}}{h}$

Or ln est dérivable en 1 donc

$\lim\limits_{h \to 0} = \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = (\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

V- Fonctions composées et logarithme népérien

Propriété

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = ln(u(x))$.

Alors g est dérivable sur I, et pour tout réel x appartenant à I, on a : ♥♥♥ $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ♥♥♥.

Preuve : $g(x) = \ln(u(x)) = f(u(x))$ où f est la fonction ln : $f(X) = \ln(X)$ donc

$f'(X) = \frac{1}{X}$

Par le th. de dérivation des fct composées : $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$

$= \frac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice 6

1) Calculer la dérivée de : $f(x) = ln(2x^2 + 1)$. Préciser l'intervalle de dérivabilité de f.

2) Même question avec : $g(x) = ln(4+2e^x)$.

3) Même question avec : $h(x) = ln(e^{-x} + 1)$.

1) $f(x) = \ln(2x^2+1) = \ln(u(x))$ avec : $\begin{cases} u(x) = 2x^2+1 \\ u'(x) = 4x \end{cases}$

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \boxed{\frac{4x}{2x^2+1}}$ non simplifiable

2) $g(x) = \ln(4+2e^x) = \ln(u(x))$ avec $\begin{cases} u(x) = 4+2e^x \\ u'(x) = 2e^x \end{cases}$

$\boxed{g'(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^x}{4+2e^x} = \frac{2e^x}{2(e^x+2)} \boxed{= \frac{e^x}{e^x+2}}$

3) $h(x) = \ln(e^{-x}+1) = \ln(u(x))$ avec $\begin{cases} u(x) = e^{-x}+1 \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$

VI – Logarithme décimal (celui utilisé en Physique, Chimie, SVT, SI)

♥ *Définition* : On appelle fonction logarithme décimal (ou logarithme à base 10), la fonction notée log, définie sur $]0;+\infty[$ par : $log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ ♥ $\log(x)$ proportionnel $\ln(x)$

Remarque : $log(x)$ est donc égale au produit d'une constante multiplicative et de $ln(x)$.

Calculer :

$log(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(10)} = \boxed{0}$

$log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = \boxed{1}$

$log(100) = \frac{\ln(100)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^2)}{\ln(10)} = \frac{2\ln(10)}{\ln(10)} = \boxed{2}$

♥ $\boxed{log(10^n) = n}$ où n est un entier naturel.

La fonction log a les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln, elle a aussi même sens de variation et mêmes limites aux bornes de l'ensemble de définition que la fonction ln. Montrons par exemple une de ces propriétés :

$a>0$; $b>0$: $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

$n \in \mathbb{Z}$: $\log(a^n) = n\log(a)$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$ car $\frac{1}{\ln(10)} > 0$

La fonction log est par exemple utilisée en Chimie : $pH = -log[H_3O^+]$. ([ ] = concentration)

Par exemple, si on dilue 10 fois une solution de monoacide fort, que fait le pH de la solution initiale ?

On cherche $PH' = -\log\left(\frac{[H_3O^+]}{10}\right) = \underbrace{-\log([H_3O^+])}_{PH} + \log(10)$

$PH' = PH + 1$

La fonction log est aussi utilisée dans de nombreux domaines tels l'acoustique.

Une utilité de la fonction *log* en arithmétique : elle permet de déterminer le nombre de chiffres d'un entier écrit dans le système décimal.

Rappel : Soit A entier naturel non nul. Il existe un unique entier naturel n, tel que : $10^n \leq A < 10^{n+1}$

Remarque : l'écriture décimale de A est donc composée de $n+1$ chiffres au total. $\Rightarrow 10^2 \leq 634 < 10^3$ 3 chiffres

On a de plus : A est constitué de ⊛ $\lfloor \log(A) \rfloor + 1$ chiffres

Donc, le nombre total de chiffre de l'écriture décimale de A est égal à : $\lfloor \log(A) \rfloor + 1$

partie entière (= ⊖ grand entier <)

Application : Combien de chiffre comporte l'écriture décimale de $A = 2^{2026}$?

↳ ici : $\log(A) = \log(2^{2026}) \approx 609{,}8$

Donc A a 610 chiffres dans son écriture décimale

Exercice complémentaire

Complément : Fonctions puissances.

Pour tout réel $x > 0$, on définit, pour tout réel a, x^a par : $x^a = e^{a\ln(x)}$

$a = 2$: $e^{2\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^2 = x^2$

1) Etudier suivant les valeurs du réel a, le sens de variation et les limites de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^a$

⊛ $10^n \leq A < 10^{n+1}$

Donc $\underbrace{\log(10^n)}_{=n} \leq \log(A) < \log(10^{n+1})$

$n \leq \log(A) < n+1$ = nb de chiffres de A

Donc $n+1 = \underbrace{\lfloor \log(A) \rfloor}_{\text{partie entière de } \log(A)} + 1 = \lceil \log(A) \rceil$

↑ le plus petit entier supérieur à $\log(A)$

1) $x > 0$ et $f(x) = x^a = e^{a\ln(x)} = e^{u(x)}$ où $u(x) = a\ln(x)$, $u'(x) = \frac{a}{x}$

$f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$

$f'(x) = \frac{a}{x} \times e^{a\ln(x)}$

$f'(x) = \frac{a}{x} \times x^a = a x^{a-1}$

$f'(x) = a e^{(a-1)\ln(x)}$

Or $\forall x \in]0;+\infty[$; $e^{(a-1)\ln(x)} > 0$ donc $f'(x)$ à le même signe que a.

Ainsi : (*) Si $a > 0$: $f'(x) > 0$, donc f croît sur $]0;+\infty[$

**) Si $a < 0$; $f'(x) < 0$, donc f décroît sur $]0,+\infty[$

***) Si $a = 0$, $f'(x) = 0$, donc f est constante sur $]0,+\infty[$

Limites : $f(x) = e^{a\ln(x)}$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc si $a>0$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} a\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

Donc par composée de limites $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{a\ln(x)} = 0$

De même si $a<0$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{a\ln(x)} = +\infty$

• En $+\infty$: Si $a>0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

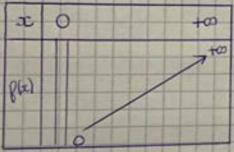
Par composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\ln(x)} = +\infty$

Idem : Si $a<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\ln(x)} = 0$

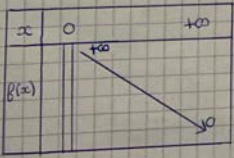
Si $a=0$ f est constante et égale à 1

Résumé :

Si $a>0$:



Si $a>0$:



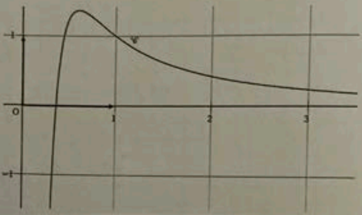
VII – Quelques exercices de type bac

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b.*Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.

   **) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$x \in]0\,;+\infty[$ et $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$

1) a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+\ln(x)) = -\infty$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^+$

Donc par limite du quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

1) b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées)

$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

1)b) bis $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x^2}$

Par C.C : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

1) c) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ (axe or) est ASV à $\mathcal{C}f$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ (ax ab) est ASH à $\mathcal{C}f$ en $+\infty$

2) a) $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{cases} u(x) = 1+\ln(x) \\ u'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x^2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$

Donc $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1+\ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4}$

$f'(x) = \frac{-x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln(x))}{x \times x^3}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}}$

2) b) $-1 - 2\ln(x) > 0$

$-2\ln(x) > 1$

$\ln(x) < \frac{1}{-2}$ car $-2 < 0$

$e^{\ln(x)} < e^{-\frac{1}{2}}$

$0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$

$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ Donc $\mathcal{S} = \left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$

**) $x>0$, donc $x^3>0$; donc $f'(x)$ a le même signe que $-1-2\ln(x)$

D'après ce qui vient avant : $f'(x) > 0 \iff x \in \left]0 ; \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$

Donc $f'(x) \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$

c)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{1-\ln(\sqrt{e})}{\frac{1}{e}} = e\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$$

3) a) Résolvons l'équation $f(x)=0$

$$\frac{1+\ln(x)}{x^2} = 0 \overset{x\neq 0}{\iff} 1+\ln(x)=0 \iff \ln(x) = -1$$

$$f(x)=0 \iff x = e^{-1} \qquad S=\{e^{-1}\}$$

Ainsi : C_f rencontre l'axe des abscisses en le point $P\left(\frac{1}{e} ; 0\right)$

3) b)

x	0		$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

$$\begin{cases} \text{Sur } \left]0 ; \frac{1}{e}\right[, \ f(x)<0 \\ \text{Sur } \left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[, \ f(x)>0 \\ f\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \end{cases}$$

Exercice II

Vrai ou Faux : justifier comme il se doit :

1)

Affirmation 1 : $\underbrace{\ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^7)}}_{G} = \underbrace{\frac{e^{\ln(2)+\ln(3)}}{e^{\ln(3)-\ln(4)}}}_{D}$

1) $G = \underbrace{\ln(\sqrt{e^7})} + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^7)}$

$G = \overbrace{\frac{1}{2} \ln(e^7)} + \frac{9}{7}$

$G = \frac{7}{2} + \frac{9}{7} = \frac{49}{14} + \frac{18}{14} = \frac{67}{14}$

$D = \frac{e^{\ln(2)+\ln(3)}}{e^{\ln(3)-\ln(4)}} = \frac{e^{\ln(6)}}{e^{\ln(\frac{3}{4})}} = \frac{6}{\frac{3}{4}}$

$D = \frac{6 \times 4}{3} = 8$

Ainsi $G \neq D$ car $\frac{67}{14} \neq 8$ **A1 : FAUSSE**

2)

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

__Affirmation 2__ : $\mathscr{C}_n$ admet une unique tangente horizontale en un unique point nommé S_n dont l'ordonnée est égale à n^2.

$f_n'(x) = 0 \rightarrow$ une unique sol. réelle ?

3) *__Affirmation 3__* : l'équation : $ln(x-1) - ln(x+2) = ln(4)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2) $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$

$\boxed{f_n'(x) = 2ne^x - 2e^{2x}}$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ne^x - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2ne^x = 2e^{2x}$ $\div 2$

$\Leftrightarrow ne^x = e^{2x}$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(ne^x) = \ln(e^{2x})$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(n) + \underbrace{\ln(e^x)} = 2x$

$\Leftrightarrow \ln(n) + x = 2x$

$\Leftrightarrow 2x - x = \ln(n)$

$\boxed{f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(n)}$

Il y a une seule tangente horizontale à $\mathscr{C}_n$ en son pt d'abscisse $\ln(n)$.

$S_m(\ln(m); y_m)$ avec $y = f_m(\ln(m))$

$$y_m = 2me^{\ln(m)} - e^{2\ln(m)}$$

$$y_m = 2m \times m - \left(e^{\ln(m)}\right)^2$$

$$y_m = 2m^2 - m^2 = m^2$$

Donc **A2 VRAIE**

3) $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(4)$

$x-1>0$ et $x-2>0$ assurent l'existence de $\ln(x-1)$ et $\ln(x-2)$

→ Donc $x>1$ et $x>-2$ donc $x>1$

$$\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(4)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x>1 \\ \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \frac{x-1}{x+2} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1 = 4(x+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1 = 4x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3x = -9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x = \frac{-9}{3} = \end{cases}$$

$$S = \emptyset$$

A3 FAUSSE

Exercice III

On considère la fon

Le but de cet exerci

Partie A : Étude d'

On considère la fo

1. Déterminer
   On admet q
2. Étudier les v
3. a. Démo
   uniqu
   b. Déter

Partie B : Étude de la s

On admet que la fonct

1. Soit x un nombr
2. a. Démontrer

b. En déduire

$x > -1,$

$f(x) =$

PARTIE A

1) $\lim$

et $\lim$

Par