Chapitre VIII :

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue ». John Von Neuman

Chapitre VIII — ***Vecteurs, droites et plans de l'espace***

I – Vecteurs de l'espace

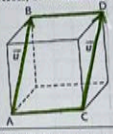
1.1 Définitions et règles de calcul

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

1. A tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ défini comme suit :

- Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
  - Pour direction celle de la droite (AB).
  - Pour sens celui de A vers B.
  - Pour longueur (synonyme préférable : la norme) la distance AB. On note : $\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}_{=\text{norme}} = AB$.
- Lorsque A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.

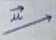
On dit que deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme. On note : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (voir figure ci-contre).



2. Lorsque quatre points A, B, C, D ne sont pas alignés on a :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

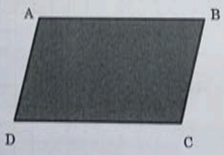
On appelle ***représentant d'un vecteur*** $\vec{u}$ donné ***tout vecteur égal à*** $\vec{u}$.



3. Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

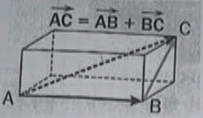
4. Les règles de calculs sur les vecteurs sont les mêmes qu'avec les vecteurs du plan.

☞ Toujours faire un croquis lorsqu'on parle de parallélogramme : attention à l'erreur classique :
→ "ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$" : c'est faux : regardez-ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas égaux mais opposés car pas le même sens. Au passage, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{CD}$ c'est $\overrightarrow{DC}$ avec pour notation : $\boxed{-\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}}$



La *relation de Chasles* dit que : pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Illustration :



Elle est applicable à plus de deux vecteurs. Par exemple : $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IL}$

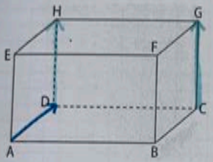
extrémité

origine

Notons que la relation de *Chasles* donne un moyen simple d'additionner deux vecteurs de l'espace. Dans le cas fréquent où l'extrémité du premier vecteur n'est pas identique à l'origine du second vecteur, on peut toujours, en utilisant un représentant d'un des vecteurs, se ramener à utiliser la relation de *Chasles*.

Exemple

A l'aide des points de la figure ci-dessous qui est un pavé droit (= parallélépipède rectangle), donner :



i) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$

ii) $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EC}$

i) un représentant du vecteur : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG}$

= à ...

ii) Le représentant d'origine E du vecteur $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}$

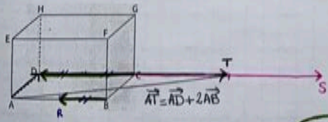
1.2 *Vecteurs colinéaires* ≠ égaux

Rappel

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;
- si $k > 0$, alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, sinon, ils sont de sens contraire ;
- $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

On rappelle que $|k| = \begin{cases} k \text{ si } k>0 \\ -k \text{ si } k<0 \end{cases}$

Illustration :



Construire ci-dessus les point R, S et T définis par $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CS} = -2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$.

Définition ♥

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont *colinéaires* équivaut à dire *qu'ils ont la même direction*, autrement dit :

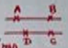
♥ *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$.* ♥

→ $\vec{v} = 3\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$

On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace.

Illustration :

♥ ♥♥ *Propriété phare* ♥♥ ♥



A, B, C et D sont quatre points distincts de l'espace.

1) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires

2) Les points A, B et C sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Attention, cette propriété sera d'un ***usage fréquent*** dans ce chapitre, surtout quand on disposera des coordonnées des points et des vecteurs.

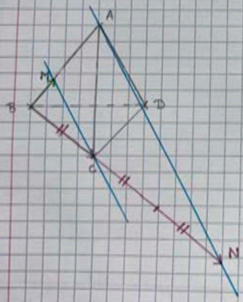
Point 2) : prenez le temps de bien le comprendre : les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires équivaut à dire que les droites (AB) et (AC) sont parallèles : or deux droites parallèles qui ont un point en commun, ici A, sont confondues : les trois points A, B et C sont sur la même droite et donc alignés !!!

Exercice 1

1) Construire un tétraèdre ABCD, puis construire les points M et N définis par :
$\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BA}$ et $\vec{CN} = 2\vec{BC}$.

2) Démontrer que les droites (MC) et (AN) sont parallèles.

1)



(Dénombrement $\binom{4}{2} = 6$ ar.)

2) $(MC) // (AN) \Leftrightarrow \underbrace{\vec{MC} \text{ et } \vec{AN} \text{ sont colinéaires}}_{\text{BUT :}}$

Mq : $\vec{AN} = k\vec{MC}$ où k est un réel.

On "Chasles" : $\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN}$

$\vec{AN} = -3\vec{BM} + \vec{BN}$

{ car $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BA} \Leftrightarrow 3\vec{BM} = \vec{BA} = -\vec{AB}$
Donc $\vec{AB} = -3\vec{BM}$ }

$\vec{AN} = -3\vec{BM} + \vec{BC} + \vec{CN}$

$\vec{AN} = -3\vec{BM} + \vec{BC} + 2\vec{BC}$

$\vec{AN} = -3\vec{BM} + 3\vec{BC}$

$\vec{AN} = 3\vec{MB} + 3\vec{BC}$

$\vec{AN} = 3(\underbrace{\vec{MB} + \vec{BC}}_{\text{Chasles}}) = 3\vec{MC}$: Donc (MC) // (AN)

1.3 Combinaison linéaire de vecteurs
(CBL)

Définition

Rq : CBL les ⊕ célèbres
- somme : $\vec{u}+\vec{v}$
- diff : $\vec{u}-\vec{v}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

♥♥Un vecteur $\vec{w}$ est appelé ***une combinaison linéaire des vecteurs*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe des réels a et b tels que : ♥ $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}$ ♥

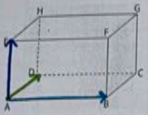
Exemple : la relation : $\underbrace{\overrightarrow{DR}}_{\vec{w}} = \frac{1}{4}\underbrace{\overrightarrow{DB}}_{\vec{u}} + \frac{3}{2}\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{\vec{v}}$ permet de dire que le vecteur $\overrightarrow{DR}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Bien évidemment, cette définition se généralise à une combinaison linéaire de 3 vecteurs ou plus.

Cette année, on utilisera fréquemment des combinaisons linéaires de trois vecteurs :

Reprenons le pavé droit ci-dessous :

Ecrire $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



$$\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}$$

Exercice 2

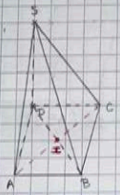
SABCD est une pyramide de sommet S et dont la base est un carré ABCD de centre I.

a) Faire une figure.

b) Exprimer $\overrightarrow{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$.

c) En déduire que $\overrightarrow{SD}$ est une combinaison linéaire (à préciser) des vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$.

a)



b) $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \underbrace{\overrightarrow{AI}}$ (ℰ)

$\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}(AS + SC)$

$\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}AS + \frac{1}{2}SC$

$\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}SC$

$\boxed{\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}}$

c) $\overrightarrow{SD} = \underbrace{\overrightarrow{SI}} + \underbrace{\overrightarrow{ID}}$

$\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \underbrace{\overrightarrow{BI}}$

$\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \underbrace{BS + SI}$

$\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$

$$\boxed{\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}}$$

II – Droites et plan de l'espace

Tout d'abord, intuitivement, un plan est une surface "plate" illimitée. Par exemple le plan formé par le tableau est un exemple de plan. Il se représente dans l'espace par un parallélogramme lorsqu'il est regardé non frontalement, et par un rectangle sinon.

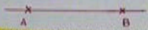
Exemples : Sur la figure précédente, le plan contenant le rectangle ABCD est représenté par un parallélogramme (car non vu non frontalement), tandis que le plan contenant le rectangle ABFE est représenté par un rectangle car vu frontalement.

1) Règles d'incidence

Quelques *axiomes* utiles (appelés règles d'incidence) et utilisés en permanence durant tout le chapitre...

1) Par deux points distincts de l'espace, il passe une unique droite.

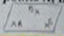
Illustration :



(AB) : Notation pour la droite passant par A et B.

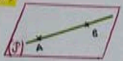
2) Trois points non alignés de l'espace définissent un unique plan.

Notation et illustration : *si A, B et C ne sont pas alignés, le plan passant par les points A, B et C est noté :* **(ABC).** ***Remarque :*** **(BCA)** *désigne le même plan que* **(ABC) !**



3) Si deux points A et B sont distincts et qu'ils appartiennent à un même plan ($\mathscr{P}$), alors la droite (AB) est incluse dans ce plan ($\mathscr{P}$).

Illustration :



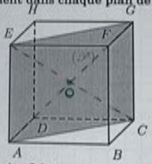
$\left.\begin{array}{l} A \in \mathscr{P} \\ B \in \mathscr{P} \\ A \neq B \end{array}\right\}$ DONC : $(AB) \subset (\mathscr{P})$

contenue dans

Les propriétés connues de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

Exemples

Dans le cube ABCDEFGH ci-contre :



a) Donner 4 noms différents du plan ($\mathscr{P}$) ci-contre.

b) Expliquer pourquoi la droite qui passe par A et par le point O intersection des droites (EC) et (AG) est contenue dans le plan ($\mathscr{P}$).

· (AO) (* A ∈ (EAC) = évidence)

c) Démontrer que (EG) et (AC) sont parallèles.

a) (P) s'appelle : (EGC) ou (EAC) ou (EGA) ou (ACG)

b) $A \in (\mathscr{P})$ (q. a)

$O \in (EC)$ car O est le milieu de [EC] et $(EC) \subset (\mathscr{P})$

Donc $O \in (\mathscr{P})$

→ Or O et A sont distincts

Donc d'après le 3e axiome d'incidence : (AO) est contenue dans ($\mathscr{P}$)

c) $\underbrace{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}}$ car $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$

Donc AEGC est un pgm (ici rectangle)

→ Or un pgm à ses côtés opposés 2 à 2 parallèles. Donc : (EG) // (AC)

2) Droites de l'espace

Propriété (caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace)

Soient A et B deux points distincts de l'espace noté $\mathcal{E}$.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Traduction mathématique de la phrase précédente : le $\exists$ signifie : il existe (au moins un).

$(AB) = \{M \in \mathcal{E} / \exists\, t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}\}$.

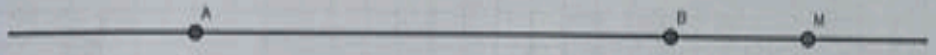
Cette caractérisation d'une droite nous servira pour en donner une représentation paramétrique des droites de l'espace.

$M \in (AB) \Leftrightarrow$ M, A, B sont alignés

$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB}}$ sont colinéaires

(existe au moins 1 réel) $\rightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

Preuve : Comprenez bien : où que soit placé le point M sur la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires !!!



$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires signifie, par définition même de deux vecteurs colinéaires, qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$!!

Remarques importantes

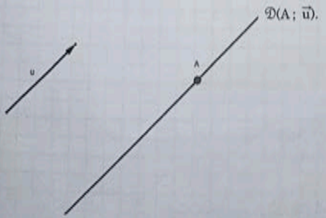
1. $\overrightarrow{AB}$ est appelé *un* vecteur directeur de la droite (AB). On dit encore que la droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ est un autre vecteur directeur de la droite (AB), tout comme $1{,}84\overrightarrow{AB}$, donc évitez de dire le vecteur directeur de la droite (AB), il y a une différence fondamentale entre un article indéfini (non-unicité) et un article défini (unicité) !!

Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs : si $\vec{u}$ désigne l'un d'eux, alors, pour tout réel k non nul, $k\vec{u}$ est également un autre vecteur directeur de cette droite !

2. On retiendra que comme dans le plan, une droite peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul, appelé vecteur directeur de la droite.

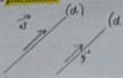
Illustration : La droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est parfois notée $\mathcal{D}(A\,;\,\vec{u})$.



3. Deux droites de l'espace sont **parallèles** si et seulement si elles ont **des vecteurs directeurs colinéaires.**

Capital pour les exercices.

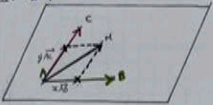
Illustration :



3 – Vecteurs et plans de l'espace

> **Théorème** *(caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace).*
>
> Soit A, B et C *trois points non alignés* de l'espace noté $\mathcal{E}$
>
> Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels.
>
> $(ABC) = \{M \in \mathcal{E} / \exists (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\}$.

Illustration : tel que



Preuve : conséquence directe du fait que A, B et C ne soient pas alignés, donc le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan, et d'après le cours de première, tout vecteur $\overrightarrow{AM}$ se décompose de façon unique suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Remarques fondamentales

Dans le cadre du théorème précédent, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ***des vecteurs directeurs du plan*** (ABC).

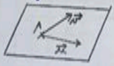
Un plan possède une infinité de couples de vecteurs directeurs. Pourquoi ?

Car si $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan, il en est de même pour le couple formé par : $(k\overrightarrow{AB}\,;\lambda\overrightarrow{AC})$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$

On peut définir un plan $\mathcal{P}$ par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

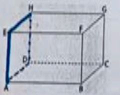
On notera : $\mathcal{P} = (A\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ un tel plan. **Un *couple de vecteurs non colinéaires* du plan $\mathcal{P}$ est appelé une base du plan $\mathcal{P}$.**

Illustration : $\mathcal{P}$



Exemple

Dans le pavé droit ci-dessous, définir le plan (EHD) par la donnée d'un point et d'un couple de vecteurs non colinéaires. Citer trois points appartenant au plan $(G\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD})$.



$(EHD) = (E\,;\underbrace{\overrightarrow{EH}\,;\overrightarrow{ED}}_{\text{2 vecteurs non colinéaires du plan (EHD)}})$

$E \in (EHD)$

Rq : $(EHD) = (A\,;\overrightarrow{HE}\,;\overrightarrow{HD})$

• Soit $\mathcal{P} = (\underbrace{G ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}}_{\text{plan contenant } G \text{ et dirigé par } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AD}})$

→ Remarque : $\mathcal{P} = (EFG)$

Donc $E \in \mathcal{P}$; $F \in \mathcal{P}$; $G \in \mathcal{P}$

Définition (points coplanaires)

Des points de l'espace sont dits coplanaires s'il existe un plan qui contient tous ces points.

Dans l'exemple précédent, les points A, B, C et D sont coplanaires car contenus dans le plan (ABC).

Trois points de l'espace sont toujours coplanaires.

S'il n'existe aucun plan contenant 4 points donnés (ou plus), on dit que ces points ne sont pas coplanaires !

C'est par exemple le cas lorsqu'on a un tétraèdre ABCD : les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires !

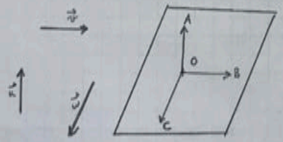
Enfin, comme nous le verrons au paragraphe position relative de droites et de plans, deux droites de l'espace parallèles sont toujours coplanaires.

Définition (vecteurs coplanaires)

Dire que ***trois vecteurs de l'espace*** sont ***coplanaires*** signifie que lorsqu'on choisit un point O quelconque de l'espace, les ***extrémités des représentants*** de ces vecteurs d'origine O sont ***coplanaires*** avec O.

Donc, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire que les quatre points O, A, B et C sont coplanaires, où O est un point quelconque de l'espace, et A, B et C étant les points définis par : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

Illustration :



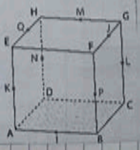
Attention à ne pas confondre vecteurs coplanaires et vecteurs colinéaires : ça n'a rien à voir !!!

Exemple : Dans le cube ci-contre :

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs coplanaires.

Par contre, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires !

cube non aplatir



Théorème ***(permet de démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires, utile pour les exercices)***

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des nombres réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Preuve : Fixons un point O de l'espace. Soit A, B et C les points définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Vu que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et définissent donc le plan (OAB).

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si O, A, B et C sont coplanaires, ce qui équivaut à dire que le point C appartient au plan (OAB).

D'après le théorème précédent de caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace, C appartient au plan (OAB) équivaut donc à dire qu'il existe des réels x et y tels que : $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$.

Ainsi, $\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels } x \text{ et } y \text{ tels que : } \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}}$.

Conséquence importante

♥♥ Dire que quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. ♥♥

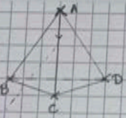
Utile en exercice, *cf.* ci-après.

Exercice 3

Soit ABCD un tétraèdre, et M le point tel que : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que les points A, B, C et M sont coplanaires.



1) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ (Chasles)

$\overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{AM}$

$-3\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \underbrace{4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM}}$

$3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$

Donc :

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

2) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABCD est un tétraèdre

→ Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; donc $\overrightarrow{AM}$ est une CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

• Par suite ; $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires donc A, M, B et C sont coplanaires.

III- Repères de l'espace

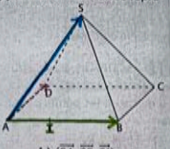
Définition

On appelle **base de l'espace** tout **triplet de vecteurs non coplanaires.**

Dire que $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est une base de l'espace signifie donc que les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

Exemple

SABCD est la pyramide à base carrée représentée ci-contre.
I est un point de [AB] distinct des points A et B.
Dire dans chaque cas si le triplet de vecteurs est une base de l'espace.



a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ **b)** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ est une base car : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires vu que les pts S, A, B et D ne sont pas coplanaires car SABCD est une pyramide carré de sommet S.

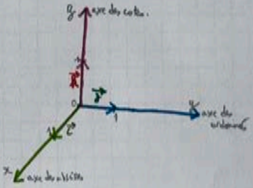
b) $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$ n'est pas une base car : $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ car $I \in (AB)$
Donc $\overrightarrow{SI}$ est une CBL de $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{AB}$

Définition

On appelle **repère de l'espace,** la donnée d'un point O (appelé l'origine du repère) et d'une base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ de l'espace.

On note $(\underset{pt}{O}\ ;\ \underbrace{\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}}_{\text{vecteurs}})$ un tel repère de l'espace.

Illustration :



L'axe $(O, \vec{i})$, c'est-à-dire la droite passant par le point O et dirigée par le vecteur $\vec{i}$, est appelé l'axe des abscisses du repère.

L'axe $(O, \vec{j})$ est appelé l'axe de ordonnées.

L'axe $(O, \vec{k})$ est appelé l'axe des cotes.

Attention, l'ordre des vecteurs de la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est fondamental ! Changer l'ordre de ces vecteurs revient à changer de repère !!

Bien évidemment, on peut prolonger chaque axe de part et d'autre de O, on ne le fait pas pour ne pas trop surcharger la représentation spatiale.

La propriété suivante généralise celle que vous utilisez dans le plan en géométrie repérée :

Propriété

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace.

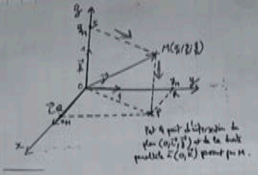
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(\underset{pt}{O}\ ;\ \underbrace{\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}}_{\text{vecteurs}})$.

x est appelée l'abscisse du point M, y l'ordonnée du point M et z la cote du point M.

On notera : $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées du point M dans ce repère.

Illustration fondamentale :



Pour lire graphiquement les coordonnées d'un point M de l'espace dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on procède comme suit :

On trace la parallèle à $(O ; \vec{k})$ passant par le point M : cette dernière traverse le plan $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ en le point nommé P.

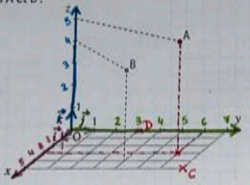
Depuis P on trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées qui coupe l'axe des abscisses en le point Q dont l'abscisse est x_M.

On trace la parallèle à l'axe des abscisses qui coupe l'axe des ordonnées en le point R qui a pour ordonnée y_M.

Enfin, la parallèle à (OP) passant par le point M coupe l'axe des ordonnées en le point S de cote z_M.

Exemple

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B :



A(3;6;5)

B(4;4;4)

C(5;7;0)

D(0;3;0)

Lire graphiquement les coordonnées des points A et B.

Un ***point de l'espace est donc repéré*** dans un repère de l'espace ***par trois nombres.*** (Cela justifie la terminologie *"espace de dimension 3"*).

Exercice 4

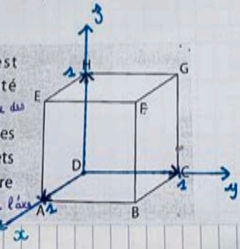
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Donner les coordonnées de chacun des sommets du cube dans le repère $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

// de l'axe des y

// de l'axe des z

origine

vecteur unitaire qui dirige l'axe des x



A(1;0;0) H(0;0;1)

B(1;1;0) G(0;1;1)

C(0;1;0)

D(0;0;0)

E(1;0;1)

F(1;1;1)

On sait que pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que $\vec{OM} = \vec{u}$.

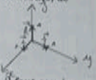
On définit les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ comme celles du point M dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels $(x ; y ; z)$ tel que $\boxed{\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$.

Cela traduit le fait que tout vecteur de l'espace peut se décomposer en une combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

On notera $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

La ***notation en colonne*** des ***coordonnées d'un vecteur*** est rigoureuse, et permet lorsqu'on débute, de distinguer les coordonnées d'un vecteur de celles d'un point. ***Penses-y*** !



Point crucial : Si le repère s'appelle $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, alors on a : $\boxed{\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$, il faut savoir instantanément donner les coordonnées des vecteurs unitaires formant la base de votre repère.

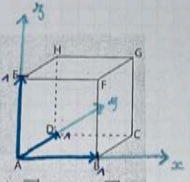
Définition

Décomposer un vecteur $\vec{u}$ dans une base $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ c'est écrire le vecteur $\vec{u}$ sous la forme :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, où x, y et z sont des réels respectivement appelés : première coordonnée (ou abscisse), seconde coordonnée (ou ordonnée), troisième coordonnée (ou cote) du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Exercice 5

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.
Dans chaque cas, donner la décomposition du vecteur dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



a) $\vec{AC}$ b) $\vec{AG}$ c) $\vec{GB}$ d) $\vec{DF}$

a) $\vec{AC} = 1\vec{AB} + 1\vec{AD} + 0\vec{AE}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FG}$

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD}$

$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

$\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{GB} = \underbrace{\vec{GC}} + \underbrace{\vec{CB}}$

$\vec{GB} = \vec{EA} + \vec{DA}$

$\vec{GB} = -\vec{AE} + (-\vec{AD})$

$\vec{GB} = 0\vec{AB} + (-1)\vec{AD} + (-1)\vec{AE}$

$\vec{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

d) $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BF}$

$\vec{DF} = -\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{AE}$

$\vec{DF} = \vec{AB} - \vec{AD} + \vec{AE}$

$\vec{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

♥♥♥♥***Formulaire récapitulatif relatif aux coordonnées*** ♥♥♥♥

Tous les résultats de la géométrie plane connus concernant les coordonnées s'étendent à l'espace en ajoutant une troisième coordonnée.

Elles sont d'un usage fréquent dans tous les exercices de bac, alors mémorisez-les une fois pour toutes !!!!!

1. Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère de l'espace, et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans ce repère.

Alors : $\boxed{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}}$ et pour tout réel k, $\boxed{k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}}$.

Pour additionner deux vecteurs, on additionne donc respectivement les coordonnées de même nom entre elles, et multiplier un vecteur par un réel k revient à multiplier par k chacune de ses coordonnées.

2. ♥♥*Deux vecteurs* sont *égaux* si et seulement si : ***ils ont les mêmes coordonnées.*** ♥

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$

$\vec{v}=k\vec{u} \rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$

3. ♥Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si et seulement si *leurs coordonnées sont proportionnelles*. ♥

4. Soit A et B deux points de l'espace.

Si dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, on a : $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$, alors :

*) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ ♥♥♥ *(dans tous les exercices de bac).*

extrémité

origine

$\underbrace{\|\overrightarrow{AB}\|}_{\text{norme}} = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$= \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2+(z_{\overrightarrow{AB}})^2}$

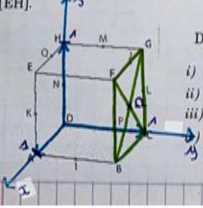
☞Extrémité moins origine comme dit maladroitement le dog, en rappelant que l'origine du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point A et son extrémité le point B !!!

**) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées : ♥♥ $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ ♥♥

Essayez de ne pas confondre coordonnées du milieu et coordonnées d'un vecteur. Chaque année, c'est une erreur fréquente qui montre une grosse capacité de mémorisation....

Exemple

I, J, K, L, M, N, P et Q sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [FG], [AE], [CG], [HG], [HD], [BF] et [EH].



Dans le repère de l'espace $(D\ ;\ \overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DH})$ déterminer :

i) Les coordonnées des points I et Q.

ii) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DG}$.

iii) Les coordonnées du centre Ω de la face BCGF.

iv) Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{BH} - 3\overrightarrow{GD}$ ♥

i) I = milieu de $[AB]$

$A(1;0;0)$ $B(1;1;0)$

Donc $I\left(\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2};\frac{0+0}{2}\right)$

$\boxed{I(1;0{,}5;0)}$

Q = milieu de $[EH]$

$E(1;0;1)$ $H(0;0;1)$

$\boxed{Q(0{,}5;0;1)}$

ii) $A(1;0;0)$ $C(0;1;0)$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$D(0;0;0)$ $G(0;1;1)$

$\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

iii) - $BCGF$ est un carré ; donc Ω est le pt d'intersection des diagonales $[BG]$ et $[CF]$ de ce carré.

- Donc Ω est le milieu de $[BG]$.

$B(1;1;0)$ $G(0;1;1)$

$\Omega\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$

$\boxed{\Omega(0{,}5;1;0{,}5)}$

iv) $B(1;1;0)$; $H(0;0;1)$; $G(0;1;1)$; $D(0;0;0)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ donc } 2\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ donc } -3\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}\end{array}\right\}$ Donc $\underbrace{2\overrightarrow{BH}-3\overrightarrow{GD}}_{\vec{u}}\begin{pmatrix}-2+0\\-2+3\\2+3\end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}}$

♥♥ ***Exercices de base fondamentaux (à maîtriser)*** ♥♥

On se place dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}, \vec{k})$ *de l'espace.*

Exercice α *(Déterminer si trois points sont alignés ou pas).*

Les points A(5 ; 2 ; 3), B(-1 ; 3 ; 2) et C(-7 ; 4 ; 1) sont-ils alignés ? Même question avec les points A, B et D où D(1 ; 2 ; 3).

: cherchons si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ou pas :

Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires alors A, B, C sont alignés

Sinon A, B, C ne sont pas alignés

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-5=-6\\ 3-2=1\\ 2-3=-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-12\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$

Ici : $\vec{AC} = 2\vec{AB}$

Donc $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

→ Donc A, B, C sont alignés

• $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

↳ $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires, car $\forall k \in \mathbb{R}$, $k \times 0 = 0 \neq 1$

Donc A, B, D ne sont pas alignés.

SOLUTION ALTERNATIVE

$\dfrac{x_{\vec{AD}}}{x_{\vec{AB}}} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{2}{3}$ $\dfrac{y_{\vec{AD}}}{y_{\vec{AB}}} = \dfrac{0}{1} = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{2}{3} \neq 0$; donc $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ n'ont pas des coordonnées proportionnelles, donc non-colinéaires

Donc A, B, D non alignés.

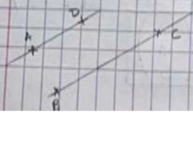
Exercice β *(Prouver que deux droites sont parallèles ; prouver que deux droites sont sécantes).*

Soit A(2 ; 1 ; 5), B(4 ; 2 ; 4), C(3 ; 3 ; 5) et D(0 ; 3 ; 7).

(i) Montrer que (AD) et (BC) sont parallèles.

(ii) Montrer que (AB) et (CD) sont sécantes.

i)



: (AD)//(BC) $\Longleftrightarrow$ $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

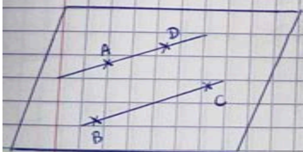
Donc : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$: donc (AD) et (BC) sont parallèles

ii) <u>Piège mortel :</u>

→ Dans l'espace si deux droites ne sont pas parallèles elles ne sont pas nécessairement sécantes.

• Penser aux droites non coplanaires : ni sécantes, ni parallèles.

(AD) // (BC) donc les pts A, B, C, D sont COPLANAIRES



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non colinéaires ...

Donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

⟹ Or (AB) et (CD) sont coplanaires.

Donc (AB) et (CD) sont sécantes.

$\Longrightarrow$ ... (AB) et (CD) sont coplanaires.

Donc (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 7 *(Prouver que trois points forment un plan, montrer que 4 points sont coplanaires ou non coplanaires).*

Soit A(0 ; 1 ; -1), B(2 ; 1 ; 0), C(-3 ; -1 ; 1), D(7 ; 3 ; -1) et E(6 ; 1 ; 2).

(i) *Démontrer que les points A, B et C forment un plan. (C'est une question très fréquente au bac...).*

(ii) Déterminer les coordonnées du vecteur : $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Qu'en déduit-on concernant les points A, B, C et D ?

(iii) Soit F(18 ; 9 ; -6). Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.

(iv) Soit G(2 ; 7 ; 4). En raisonnant par l'absurde, montrer que les points A, B, C et G ne sont pas coplanaires.

i) A, B, C forment un plan ; si A, B, C ne sont pas alignés

<u>Axiome d'incidence</u> : 3 pts non alignés forment un unique plan.

A, B, C alignés $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

A, B, C non alignés $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 2-0 = 2 \\ y_B - y_A = 1-1 = 0 \\ z_B - z_A = 0-(-1) = 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{0}{-2} = 0$

$-\dfrac{2}{3} \neq 0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles,

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

→ Donc A, B et C ne sont pas alignés

Donc A, B et C forment un plan.

ii) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{-\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-7\\-2\\0\end{pmatrix}}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{-\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}}$

Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}4+3-7=0\\0+2+(-2)=0\\2+(-2)+0=0\end{pmatrix}$ Donc $\vec{u} = \vec{0}$

Donc : $\boxed{2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}}$

Donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

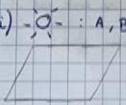
$\overrightarrow{AD}$ est donc une CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Or d'après i) ; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

↳ Donc $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc $D \in (ABC)$.

$\boxed{\text{A, B, C et D sont coplanaires.}}$

iii) : A, B, C, F sont coplanaires équivaut à dire que : $\overrightarrow{AF}$ est une CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires)



Je dois trouver 2 réels a et b tel que : $\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}18\\3\\-5\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $a\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2a\\0\\a\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$ donc $b\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3b\\-2b\\2b\end{pmatrix}$

→ Donc $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2a-3b\\0-2b\\a+2b\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 18 = 2a - 3b \\ 8 = -2b \\ -5 = a + 2b \end{cases} \iff \begin{cases} 18 = 2a - 3b \\ b = -4 \\ -5 = a + 2b \end{cases}$$

↳ Donc $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$

$$\iff \begin{cases} b = -4 \\ 18 = 2a - 3\times(-4) \\ -5 = a + 2\times(-4) \end{cases}$$

Donc comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires et d'A commun donc A, B, C, F sont coplanaires

$$\iff \begin{cases} b = -4 \\ a = \frac{18-12}{2} = 3 \\ a = -5 + 8 = 3 \end{cases}$$

iv) <u>Raisonnons par l'absurde en spq :</u>

A, B, C et G sont coplanaires

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires on aurait : $\overrightarrow{AG}$ serait une CBL des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Donc il existerait des réels a et b tels que $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}$

<u>Donc on aurait</u> $\begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix}$

<u>Donc $\hat{m}$ coordonnées :</u>
$$\begin{cases} 2 = 2a - 3b & (\hat{m}\text{ abs}) \\ 6 = a\times 0 - 2b & (\hat{m}\text{ ord}) \\ 5 = a + 2b & (\hat{m}\text{ côte}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a - 3b = 2 \\ -2b = 6 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -3 \\ a = \frac{2-9}{2} = \boxed{\frac{-7}{2}} \\ a = \boxed{11} \end{cases}$$

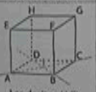
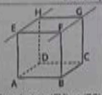
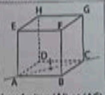
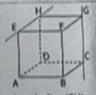
$$\underbrace{-\frac{7}{2} = 11}_{\text{absurde !}}$$

→ Par suite A, B, C et G ne sont pas coplanaires.

IV- Position relative de deux droites de l'espace

Deux droites de l'espace sont *soit coplanaires*, c'est-à-dire qu'elles sont contenues dans un même plan, *soit non coplanaires*.

***Si elles sont coplanaires*, alors elles sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.**

Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
 Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	 Les droites (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	 Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	 Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

Déterminer la position relative de deux droites de l'espace signifie déterminer dans lequel des cas de figures précédents on se trouve.

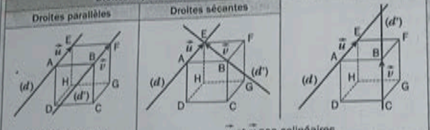
Si on définit chacune des droites par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur, on a :

$d(A, \vec{u})$ et $d'(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace.

Méthode

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors (d) et (d') sont **parallèles**.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors (d) et (d') sont **sécantes** lorsqu'elles ont un point en commun, **non coplanaires** sinon.

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites parallèles	Droites sécantes	



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

__Remarques__

Deux droites de l'espace sont confondues si et seulement si elles ont un point en commun __et__ qu'elles sont parallèles.

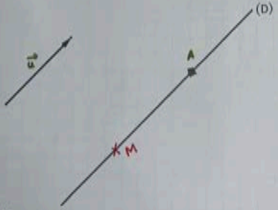
__*Attention*__ : Dans l'espace, deux droites qui n'ont aucun point en commun ne sont pas nécessairement parallèles : elles peuvent être non coplanaires !!!

__*V – Représentations paramétriques de droites de l'espace*__

__Attention__ : on entre là dans le plus important du chapitre : vous verrez dans les exercices le nombre fréquent de questions où l'on parle de représentation paramétrique de droites !!!!

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.



→ Où que soit situé le point M sur la droite $\mathcal{D}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : traduisons cela :

$x_M = x$, $y_M = y$, $z_M = z$

il existe un réel t …

$M(x ; y ; z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}} = t\, x_{\vec{u}} = a & (\hat{m} \text{ ab}) \\ y_{\overrightarrow{AM}} = t\, y_{\vec{u}} = b & (\hat{m} \text{ ord}) \\ z_{\overrightarrow{AM}} = t\, z_{\vec{u}} = c & (\hat{m} \text{ cote}) \end{cases}$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_{\vec{u}} \\ \leftarrow y_{\vec{u}} \\ \leftarrow z_{\vec{u}} \end{matrix}$

En effet :

En réécrivant : $\begin{cases} x_M - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$ sous la forme : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$. On obtient ce qu'on appellera une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Définition et propriété

♥♥ Le système (S) : $\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}}$ est appelé **<u>une</u> représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$**, et le réel t est appelé **le paramètre** de cette représentation. On aurait pu utiliser pour le paramètre n'importe quelle lettre : t, t', s, u et v sont les plus fréquemment utilisées.

♥♥La droite $(\mathcal{D})$ <u>passant</u> par $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et dont <u>un vecteur directeur</u> est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $(a\ ;b\ ;c) \neq (0\ ;0\ ;0)$ est l'ensemble des points $M(x\ ;y\ ;z)$ tels que : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. ♥♥

Ce *système* est appelé ***une représentation paramétrique*** (notée R.P.) ***de la droite*** $(\mathcal{D})$.

Il faut bien comprendre qu'à chaque valeur de t, on associe un point $M(x_A + at\ ;y_A + bt\ ;z_A + ct)$ et un seul, et que réciproquement, à chaque point M de $(\mathcal{D})$ correspond un unique réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

<u>Conséquence</u> : toute droite admet une infinité de représentations paramétriques, pourquoi ?

car $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dirige (d) donc, $\forall k \in \mathbb{R}^*$; $\vec{v}\begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$ dirige aussi (d), donc une autre R.P de (d) est $\begin{cases} x = x_A + kat \\ y = y_A + kbt \\ z = z_A + kct \end{cases}$) $t \in \mathbb{R}$

<u>Remarque</u> : contrairement au plan, une seule équation ne suffit pas pour définir une droite de l'espace.

♥♥ Lorsqu'on a une représentation paramétrique d'une droite $(\mathcal{D})$ écrite sous la forme d'un système $\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}}$, on peut affirmer, par <u>*simple lecture des coefficients du système*</u>, que $(\mathcal{D})$ passe par le point $A(x_A\ ;y_A\ ;z_A)$ et que $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est <u>un</u> vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.♥♥

<u>Exemple 1</u>

On donne la représentation paramétrique d'une droite $(\mathcal{D})$ de l'espace : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Donnée de deux pts distincts

ou Donnée d'un pt et d'un vecteur directeur de la droite

a) Définir la droite $(\mathcal{D})$ de deux manières différentes.

b) Déterminer les coordonnées du point de paramètre -2 de $(\mathcal{D})$. Le point C(-10 ; -4 ; -16) appartient-il à $(\mathcal{D})$?

$(\mathcal{D})$ a pour R.P $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

a) <u>Définissons $(\mathcal{D})$ par la donnée de deux pts $(\neq)$</u>

Pour $t=0$: $\begin{cases} x = 2\times 0 = 0 \\ y = 1+0 = 1 \\ z = -1+3\times 0 = -1 \end{cases}$; donc $A(0;1;-1) \in (\mathcal{D})$

Pour $t=1$: $\begin{cases} x = 2\times 1 = 2 \\ y = 1+1 = 2 \\ z = -1+3\times 1 = 2 \end{cases}$; donc $B(2;2;2) \in (\mathcal{D})$

Donc $(\mathcal{D}) = (AB)$

⇨ Seconde façon de définir $(\mathcal{D})$:

. Par simple lecture de la R.P, j'affirme que $(\mathcal{D})$ passe par $A(0;1;-1)$ et elle est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -1+3t \end{cases}$ $\quad E(6;4;8)$ Point de $(\mathcal{D})$ de paramètre $t=3$

b) si $t=-2$: $\begin{cases} x = 2\times(-2) = -4 \\ y = 1+(-2) = -1 \\ z = -1+3\times(-2) = -7 \end{cases}$; $Z(-4;-1;-7)$ est le pt de $(\mathcal{D})$ de paramètre $t=-2$.

. $C(-10;-4;-16) \in (\mathcal{D}) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} -10 = 2t \\ -4 = 1+t \\ -16 = -1+3\times t \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = -4-1 = -5 \\ t = \frac{-16+1}{3} = -5 \end{cases}$ système compatible

→ C'est donc le pt de paramètre : $t=-5$: $C \in (\mathcal{D})$

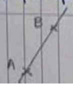
Exemple 2 ⚠EXO classique BAC ⚠ = à MAITRISER ♡

1) Donner deux représentations paramétriques de la droite ($\mathcal{D}$), passant par A(1 ; 0 ; -2) et par B(2 ; 1 ; -1).

2) Soit (Δ) la droite admettant pour R.P. : $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-2t \\ z = 3-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ ') passant par A et parallèle à (Δ).

1) $(\mathcal{D})$ passe par $A(1;0;2)$ et $B(2;1;-1)$



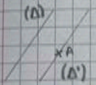
$\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige $(\mathcal{D})$

Donc une R.P. est : $\begin{cases} x = 1 + t \times 1 \\ y = 0 + t \times 1 \\ z = -2 + t \times 1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t - 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Seconde R.P de (AB) : $\begin{cases} x = 2 + 20t \\ y = 1 + 20t \\ z = -1 + 20t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) (Δ) a pour R.P : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$



• Par lecture de la RP donnée : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige (Δ)

• Or (Δ) // (Δ') ; donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige aussi (Δ')

(Δ') passe par A (1 ; 0 ; -2) donc une R.P de (Δ') est : $\begin{cases} x = 1 + 1t' \\ y = 0 + (-2)t' \\ z = -2 + (-1)t' \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -2t' \\ z = -2 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit la droite (𝒟), dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a) Soient B(1 ; 6 ; 0) et C(3 ; 0 ; -2). (𝒟) et (BC) sont-elles parallèles ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC).

c) Soit E(2 ; -3 ; 1) et F(0 ; 3 ; 3). Démontrer que (𝒟) et (EF) sont *strictement* parallèles.

a) Par lecture de la R.P donnée : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (𝒟)

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ dirige (BC)

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires

Donc : $\boxed{\overrightarrow{BC} = -2\vec{u}}$

Donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

→ Donc (𝒟) et (BC) sont parallèles

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$ dirige $(\overrightarrow{BC})$; donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ dirige également (BC)

<u>Donc une R.P. de (BC) est</u> : $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 6 + 3t' \\ z = \underbrace{0 + t'}_{t'} \end{cases}$; $t' \in \mathbb{R}$

(On peut aussi prendre les coordonnées de C(3 ; 0 ; -2))

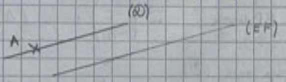
c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ dirige (D)

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\6\\2\end{pmatrix}$ dirige (EF)

Donc $\overrightarrow{EF} = 2\vec{u}$, donc $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

⟹ Donc (D) et (EF) sont parallèles.

(D) passe par A (1 ; 1 ; 1)



$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\6\\2\end{pmatrix}$

<u>Rq</u> : $A \notin (EF)$

<u>Une R.P. de (EF) est</u> : $\begin{cases} x = 0 + (-2)\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$A(1,1,1) \in (EF) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x_A = -2\lambda \\ y_A = 3 + 6\lambda \\ z_A = 3 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2\lambda \\ 1 = 3 + 6\lambda \\ 1 = 3 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{2} \\ \lambda = \frac{1-3}{6} = \frac{1}{3} \\ \times \end{cases}$

↳ système incompatible (pas de solution) car $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

→ Donc $A \notin (EF)$ et par suite, (D) et (EF) sont strictement parallèles.

Exercice 7

1) Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un repère de l'espace.

delta minuscule

(d) et (δ) les droites ayant pour représentation paramétrique respective :

(d) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et (δ) : $\begin{cases} x = s \\ y = -3 - 3s \\ z = 1 - s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Etudier avec soin la position relative de (d) et (δ).

2) Même question pour les droites (D) et (Δ) sachant que (D) passe par le point A(2 ; -1 ; 1) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et que (Δ) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = -s + 2 \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ dirige (d) et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige (δ)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car 2 coordonnées identiques mais pas la 3^e)

Donc (d) et (δ) ne sont ni parallèles, ni confondues

→ Reste à déterminer si (d) et (δ) sont sécantes ou bien non coplanaires.

Pour ce faire étudions l'intersection des droites (d) et (δ)

$M(x ; y ; z) \in (d) \cap (\delta) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}$ tel que :

inconnues

$\begin{cases} x = 1 + t = s \\ y = 2 - 3t = -3 - 3s \\ z = 3 - 3t = 1 - s \end{cases}$

Donc on cherche des réels t et s vérifiant :

① $\begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - 3t = -3 - 3s \\ 3 - 3t = 1 - s \end{cases} \iff$ ② $\begin{cases} s = 1 + t \\ 2 - 3t = -3 - 3(1 + t) \\ 3 - 3t = 1 - (1 + t) \end{cases}$

$\iff$ ③ $\begin{cases} s = 1 + t \\ 2 - 3t = -6 - 3t \\ 3 - 3t = -t \end{cases} \iff$ ④ $\begin{cases} s = 1 + t \\ 2 = -6 \quad \text{absurde} \\ \times \end{cases}$

• Ce système n'a pas de solution, donc (d) et (δ) n'ont aucun pt en commun

→ Or (d) et (δ) ne sont pas parallèles.

$\boxed{\text{Donc (d) et (δ) sont non coplanaires}}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (D)

• Par lecture de la R.P. : $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige (Δ)

Or $\dfrac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \dfrac{3}{1} = 3$ et $\dfrac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \dfrac{-1}{2}$ $\Big\}$ $3 \neq \dfrac{-1}{2}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

Donc (D) et (Δ) ne sont pas parallèles ni confondues.

Donnons une R.P. de (D) : $\begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$ $\mu \in \mathbb{R}$

$M(x ; y ; z) \in (D) \cap (\Delta) \iff \exists \mu \in \mathbb{R} ; \exists s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2+3\mu = s+1 \\ y = -1-\mu = 2s-3 \\ z = 1+\mu = -s+2 \end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases} 2+3\mu = s+1 \\ -1-\mu = 2s+3 \\ 1+\mu = -s+2 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 3\mu+1 \\ -1-\mu = 2(3\mu+1) \\ 1+\mu = (-3\mu+1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} s = 3\mu+1 \\ -1-\mu = 6\mu-1 \\ 1+\mu = -3\mu+1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Donc (D) et (Δ) sont sécantes en :

$\underbrace{M(2 ; -1 ; 1)}_{\mu = 0 \text{ dans R.P de } (D)!}$

$\iff \begin{cases} s = 3\mu+1 \\ \mu = 0 \\ 4\mu = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} s = 3\mu+1 \\ \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} s = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$

Exercice 8

Déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse :

Les droites (d) et (d') ont pour représentation paramétrique respective :

(d) : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+3t \\ z = 3-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, et (d') : $\begin{cases} x = -7t'-6 \\ y = -21t'-25 \\ z = 14t'+19 \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Affirmation : (d) et (d') sont $\underbrace{\text{distinctes.}}_{\text{non confondues}}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ dirige (d) ; $\vec{u'}\begin{pmatrix}-7\\-21\\14\end{pmatrix}$ dirige (d')

Donc $\vec{u'} = -7\vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires

Donc (d) et (d') sont parallèles ou confondues

$\boxed{M_1}$ $A(2;-1;3) \in d$

A appartient-il à d' ?

$$A(2;-1;3) \in (d') \iff \exists t \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x_A = -7t'-6 \\ y_A = -21t'-25 \\ z_A = 14t'+19 \end{cases}$$

$$\underset{(t' \text{ cherché})}{\iff} \begin{cases} -7t'-6 = 2 \\ -21t'-25 = -1 \\ 14t'+19 = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = \frac{-8}{7} \\ t' = \frac{-24}{21} = \frac{-8}{7} \\ t' = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7} \end{cases}$$

Donc $A \in (d')$: A est le pt de paramètre $t' = \frac{-8}{7}$

Ainsi (d) et (d') sont confondues

L'AFFIRMATION EST FAUSSE !

$\boxed{M_2}$ Même début : $(d) // (d')$

Etudions l'intersection de (d) et (d')

$$M(x;y;z) \in (d) \cap (d') \iff \exists t \in \mathbb{R} ; \exists t' \in \mathbb{R} , \begin{cases} x = 2+t = -7t'-6 \\ y = -1+3t = -21t'-25 \\ z = 3-2t = 14t'+19 \end{cases}$$

On cherche des réels t et t' tels que

$$\begin{cases} 2+t = -7t'-6 \\ -1+3t = -21t'-25 \\ 3-2t = 14t'+19 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -7t'-8 \\ -1+3(-7t'-8) = -21t'-25 \\ 3-2(-7t'-8) = 14t'+19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -7t'-8 \\ -21t'-25 = -21t-25 \\ 14t'+19 = 14t'+19 \end{cases}$$: Vrai pour tout réel t IDEM.

VF :

1) $\alpha \in \mathbb{R}$: $A(1,1,0)$; $B(2;1;0)$, $C(\alpha;3;\alpha)$

A_2 : " Pour tout réel α ; A, B et C définissent un unique plan "

A_3 : (Δ) a pour RP : $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -1 \\ z = 2-6t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

(Δ) et chacun des axes du repère sont des droites non coplanaires.

A_2 se reformule en : Pour tout réel α ; A, B et C non alignés

Or $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$

$y_{\vec{AB}} = 0$ et $y_{\vec{AC}} = 2$: Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ étaient colinéaires alors $y_{\vec{AC}} = k \times y_{\vec{AB}}$

$2 = k \times 0$

$\Rightarrow$ Pour tout réel α : $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires

$2 = 0$ absurde

Donc A, B et C forment un unique plan.

A_2 VRAIE

A_3 : cherchons si (Δ) et l'axe des abscisses sont coplanaires ou pas

Une R.P de l'axe des abscisses : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ((Ox) est dirigé par $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Soi $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ dirige (Δ)

Donc $\vec{v}$ et $\vec{i}$ non colinéaires

$\rightarrow$ $\boxed{(\Delta) \text{ et } (Ox) \text{ non parallèles}}$ (*)

Etudions l'intersection de (Δ) et (Ox)

$M(x;y;z) \in (\Delta) \cap (Ox) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3-2t = \lambda \\ y = \underbrace{-1 = 0}_{\text{absurde}} \\ x \end{cases}$

$\boxed{\text{Donc } (\Delta) \cap (Ox) = \emptyset \quad (**)}$

(*) et (**) font que (Δ) et (Ox) sont non coplanaires

De m̂ :

(Oy) a pour R.P, $\begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige (Oy) et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ dirige (Δ)

Donc $\vec{j}$ et $\vec{v}$ non colinéaires donc (Oy) et (Δ) non parallèles.

$M(x;y;z) \in (Oy)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x=0=3-2t \\ y=\alpha=-1 \\ z=0=2-6t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} \alpha=-1 \\ t=\frac{3}{2} \\ t=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{cases}\right\}$ Donc $\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$: absurde

→ Soit incompatible : $(\Delta)\cap(Oy)=\emptyset$

De m̂ (Oy) et (Δ) <u>non coplanaires</u>

<u>Enfin avec l'axe (Oz)</u>

$\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dirige (Oz) et une RP de l'axe est $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\beta \end{cases}$, $\beta \in \mathbb{R}$

$M(x;y;z) \in (Oz)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x=0=3-2t \\ y=\underbrace{0=-1}_{\text{absurde}} \end{cases}$

Donc $(Oz)\cap(\Delta)=\emptyset$

Par suite (Oz) et (Δ) <u>non coplanaires</u>

A_3 est VRAIE