Exercice 1 :

1) $E(0;0;8)$ car $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AE} = 8\vec{k}$ et $A(0;0;0)$

De même $F(4;0;4)$

I est le milieu de $[EF]$, donc : $I\left(\frac{0+4}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{8+4}{2}\right)$

Donc $\boxed{I(2;0;6)}$

→ J est le milieu de $[AE]$ donc : $J\left(\frac{0+0}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{0+8}{2}\right)$

Donc $\boxed{J(0;0;4)}$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; $I(2;0;6)$ et $G(4;4;4)$

a) $\vec{IG}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{IJ}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$

- $\vec{n}\cdot\vec{IG} = -1\times 2 + 1\times 4 + 1\times(-2) = -2+4-2 = \boxed{0}$ Donc $\boxed{\vec{n} \perp \vec{IG}}$
- $\vec{n}\cdot\vec{IJ} = -1\times(-2) + 1\times 0 + 1\times(-2) = 2-2 = \boxed{0}$ Donc $\boxed{\vec{n} \perp \vec{IJ}}$

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ)

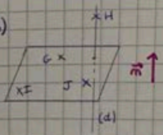
b) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (IGJ), donc une EC de (IGJ) est : $-x+y+z+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$

$J(0;0;4) \in (IGJ) \iff -0+0+4+d=0$

$\iff d=-4$

$\boxed{-x+y+z-4=0 \text{ est une EC de } (IJG)}$

3)

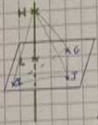


(d) est orthogonale à (IGJ) et $\vec{n}$ est normal à (IGJ), donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d)

(d) passe par $H(0;4;8)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d) donc une R.P de (d) est :

$$\begin{cases} x = 0-t \\ y = t+4 \\ z = t+8 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4) L : projeté orthogonal de H sur (IGJ)



$L(x\,;y\,;z)$

Par déf de L on a : $L \in (d) \cap (IJG) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = -t \\ y = t+4 \\ z = t+8 \\ -x+y+z-4 = 0 \end{cases}$

• Par substitution : $-(-t)+t+4+t+8-4 = 0$

$t+t\cancel{+4}+t+8\cancel{-4} = 0$

$3t+8 = 0$

$t = \frac{-8}{3}$

Par suite $\begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{-8}{3}+4 = \frac{4}{3} \\ z = \frac{-8}{3}+8 = \frac{4}{3} \end{cases}$

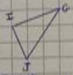
Donc $L\left(\frac{8}{3}\,;\frac{4}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$

5) La distance de H au plan (IGJ) est HL car L est le p.o de H (IGJ)

$\overrightarrow{HL}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HL} = \frac{8}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$HL = \|\overrightarrow{HL}\| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{3} \times \frac{8}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ u.l.

6)



$\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4+4 = 0$

→ Donc $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux

→ Donc (IG) et (IJ) sont perpendiculaires

$\boxed{\text{Donc IGJ est rectangle en I}}$

7) cf demin q.5)

$V = \frac{1}{3} \underbrace{\mathcal{A}(IGJ)}_{\text{Tg rect en I}} \times HL$ Par déf du Po de H sur (IGJ)

$V = \frac{1}{3} \times \frac{IG \times IJ}{2} \times HL$ avec $\|\overrightarrow{IG}\| = IG = \sqrt{2^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{24}$

$\|\overrightarrow{IJ}\| = IJ = \sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$

$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{24} \times \sqrt{8}}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$V = \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{4\sqrt{3}} \times \sqrt{8} \times 8 \times \cancel{4\sqrt{3}}}{2 \times 3} = \frac{64}{6} = \boxed{\frac{32}{3}\ \text{u.v.}}$

Exercice II (métropole 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2+2t \end{cases}$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

   b. Montrer que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x-y+2z-3=0$.

   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.

   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\times\mathscr{B}\times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1) a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}$ (par lecture de R.P)

1) b) $B(-1;3;0) \in (\mathscr{D}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_B = 1+2t \\ y_B = 2-t \\ z_B = 2+2t \end{cases}$

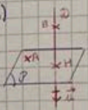
On cherche si il existe un réel t tel que : $\begin{cases} -1 = 1+2t \\ 3 = 2-t \\ 0 = 2+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$ syst. compatible

$\boxed{B \in (\mathscr{D}) : \text{c'est le pt de paramètre } t=-1}$

1)c) $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\vec{AB}.\vec{u}} = xx' + yy' + zz' = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = \boxed{-8}$

2)



• $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux

Donc $\vec{u}$ est normal à $\mathcal{P}$

Une E.C de $\mathcal{P}$ est : $2x - y + 2z + d = 0$

$A(-1\,;1\,;3) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 2\times(-1) - 1 + 2\times 3 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -3$

$\boxed{\text{• Une E.C de } \mathcal{P} \text{ est : } 2x - y + 2z - 3 = 0}$

2)b) $H(x\,;y\,;z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 2+2t \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$

Ainsi : $2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0$

$2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0$

$9t + 1 = 0$

$t = -\frac{1}{9}$

Par suite : $\begin{cases} x = 1 + 2\times\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9} \\ y = 2 - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2\times\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} \end{cases}$ $\quad H\left(\frac{7}{9}\,;\frac{19}{9}\,;\frac{16}{9}\right)$

2)c) $A(-1\,;1\,;3)$ $\quad H\left(\frac{7}{9}\,;\frac{19}{9}\,;\frac{16}{9}\right)$

$\vec{AH}\begin{pmatrix}\frac{7}{9}-(-1) = \frac{16}{9}\\ \frac{19}{9} - 1 = \frac{10}{9}\\ \frac{16}{9} - 3 = \frac{-11}{9}\end{pmatrix}$ $\quad$ Donc $AH = \|\vec{AH}\| = \sqrt{\left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{-11}{9}\right)^2}$

$AH = \sqrt{\frac{16^2 + 10^2 + (-11)^2}{9^2}}$

$AH = \frac{\sqrt{256+100+121}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{477}}{9} = \frac{\sqrt{9\times 53}}{9}$

$\boxed{AH = \frac{3\sqrt{53}}{9} = \frac{\sqrt{53}}{3} \text{ u.l}}$

3)

a) $\left.\begin{matrix} H \in \mathcal{D} \\ B \in \mathcal{D} \\ H \neq B \end{matrix}\right\}$ donc $\vec{HB}$ dirige $\mathcal{D}$ $\rightarrow$ $\vec{HB}$ et $\vec{u}$

Or $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$ $\nearrow$

sont deux vecteurs d'une m̂ droite

Donc $\vec{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\quad \boxed{\text{• } \exists k \in \mathbb{R}, \vec{HB} = k\vec{u}}$

3) b) $\underbrace{\vec{HB}}_{\text{Chasles}} = k\vec{u}$

$\vec{HA}+\vec{AB} = k\vec{u}$

$(\vec{HA}+\vec{AB}).\vec{u} = \underbrace{k\vec{u}.\vec{u}}_{\|\vec{u}\|^2}$

$\underbrace{\vec{HA}.\vec{u}}_{=0} + \vec{AB}.\vec{u} = k \times \|\vec{u}\|^2$

car $\vec{HA} \perp \vec{u}$ par déf du P.O

Donc : $\vec{AB}.\vec{u} = k \times \|\vec{u}\|^2$

Or $\vec{u} \neq 0$; donc $\|\vec{u}\|^2 \neq 0$ donc $\boxed{k = \dfrac{\vec{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}}$

3) c) $k = \dfrac{\vec{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ avec $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

D'après q.1)c) : $\vec{AB}.\vec{u} = -8$

$\|\vec{u}\|^2 = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}^{\,2} = 2^2+(-1)^2+2^2 = 9$

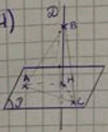
$$\boxed{k = \frac{-8}{9}}$$

4.a) $\vec{HB} = k\vec{u}$ donc $\vec{HB} = -\frac{8}{9}\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_B - x_H = \frac{-16}{9} \\ y_B - y_H = \frac{8}{9} \\ z_B - z_H = -\frac{16}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 - x_H = -\frac{16}{9} \\ 3 - y_H = \frac{8}{9} \\ 0 - z_H = -\frac{16}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_H = -1 + \frac{16}{9} = \frac{7}{9} \\ y_H = 3 - \frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z_H = \frac{16}{9} \end{cases}$$

$H\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$

4)



$\mathcal{V}(ABCH) = \frac{8}{9}$ et $\mathcal{V}(ABCH) = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ACH) \times HB$ ← déf p.o

Donc $\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ACH) \times \|\vec{HB}\|$

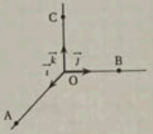
$\Rightarrow$ donc $\|\vec{HB}\| = \left(-\frac{8}{9}\right) \times \|\vec{u}\| = \frac{8}{9} \times \sqrt{9} = \frac{8 \times 3}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

$\frac{8}{9} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ACH) \times \frac{8}{3}$

$$\boxed{\mathcal{A}(ACH) = 1 \text{ u.a.}}$$

Exercice III

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC ».

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 3 ; 3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
   Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3} B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

$\boxed{\text{PARTIE 1 :}}$

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-3)+3\times2+3\times0 = -6+6 = \boxed{0} \text{ ; donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-3)+3\times0+3\times2 = -6+6 = \boxed{0} \text{ ; donc } \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC)

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ est normal à (ABC) ; donc une E.C de (ABC) est : $2x+3y+3z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.

$A(3;0;0)\in(ABC) \iff 3\times2+3\times0+3\times0+d=0$
$\iff d=-6$

$\boxed{\text{Une E.C de (ABC) est : } 2x+3y+3z-6=0}$

3) $O(0;0;0) \in \mathcal{D}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ dirige $\mathcal{D}$; donc une R.P de $\mathcal{D}$ est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

4) $H(x;y;z) \in \mathcal{D} \cap (ABC) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \\ 2x+3y+3z-6=0 \end{cases}$

Donc : $2\times 2t + 3\times 3t + 3\times 3t - 6 = 0$

$$22t - 6 = 0$$

$$t = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

Donc : $\begin{cases} x = \frac{6}{11} \\ y = \frac{9}{11} \\ z = \frac{9}{11} \end{cases}$ Donc $H\left(\frac{6}{11} ; \frac{9}{11} ; \frac{9}{11}\right)$

5) La distance du pt O au plan (ABC) est OH car $\mathcal{D}$ est orthogonale à (ABC) et $H \in \mathcal{D} \cap (ABC)$

$\Rightarrow$ Donc H est le p.o de O sur (ABC)

Or $OH = \|\vec{OH}\| = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2}$

$$OH = \frac{\sqrt{6^2+9^2+9^2}}{11} = \frac{\sqrt{36+81+81}}{11}$$

$$\boxed{OH} = \frac{\sqrt{198}}{11} = \frac{\sqrt{9\times 22}}{11} \boxed{= \frac{3\sqrt{22}}{11} \text{ u.l}}$$

PARTIE 2 :

1) $\mathcal{V}(OACB) = \frac{\mathcal{A}(AOC)\times OB}{3}$

avec AOC triangle rectangle en O et $(OB)\perp(OA)$ car $A \in (Ox)$, $B \in (Oy)$, $C \in (Oz)$ et R.O.N

$\mathcal{A}(AOC) = \frac{OA \times OC}{2}$

$\begin{cases} OA = 3 \\ OC = 2 \\ OB = 2 \end{cases}$ $\boxed{\mathcal{V}(OACB)} = \frac{\frac{3\times 2}{\cancel{2}}\times \cancel{2}}{3} \boxed{= 2 \text{ u.v}}$

2) $\mathcal{V}(OABC) = \frac{\mathcal{A}(ABC)\times h}{3}$ où $h = OH$ (q.5)

q.1) $\downarrow$

$$2 = \frac{\mathcal{A}(ABC)\times \frac{3\sqrt{22}}{11}}{3}$$

$$2 = \mathcal{A}(ABC)\times \frac{\sqrt{22}}{11}$$

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{2\times 11}{\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{22}\times\sqrt{22}}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$ u.a

3) $(\mathcal{A}(ABC))^2 = \sqrt{22}^2 = 22$

$$\mathcal{A}(OAC)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2 + \mathcal{A}(OAB)^2 = \left(\frac{OA\times OC}{2}\right)^2 + \left(\frac{OB\times OC}{2}\right)^2 + \left(\frac{OA\times OB}{2}\right)^2$$

triangles rect en O.

$$\Sigma = \left(\frac{3\times 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\times 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\times 2}{2}\right)^2$$

$\boxed{\Sigma = 9+4+9 = 22}$ Donc $(\mathcal{A}(ABC))^2 = \Sigma$

Définition

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = r$.

Illustration :

• sphère de centre Ω et de rayon R
$\forall M \in \mathcal{S} ; \Omega M = R$

***Propriété** (à la frontière du programme)*

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif. $\Omega(a ; b ; c)$

La sphère de centre Ω et de rayon r a pour équation réduite : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ⊛

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1 ; 2 ; -1)$ et de rayon $r = 3$.

Le point $M(2 ; 0 ; -1)$ appartient-il à $\mathcal{S}$?

Trouver les coordonnées du point diamétralement opposé sur $\mathcal{S}$ au point $K(1 ; 2 ; -4)$. On commencera par vérifier que K appartient à $\mathcal{S}$.

⊛ Soit $M(x ; y ; z)$

$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

Or $\Omega M^2 = \overrightarrow{\Omega M}^2$ avec $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{\Omega M}^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

$\boxed{M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2}$

Exemple : $\mathcal{S}$ a pour centre $\Omega(1 ; 2 ; -1)$ et pour rayon $r = 3$

Donc une équation de $\mathcal{S}$ est : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-(-1))^2 = 3^2$

$\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 9}$ eq réduite de $\mathcal{S}$.

Rq : en dvp : $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+2z+1 = 9$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0}_{\text{eq cartésienne}}$$

b) $M(-2;0;-1)$ donc $(x_M-1)^2+(y_M-2)^2+(z_M+1)^2 = (2-1)^2+(0-2)^2+(-1+1)^2$

$= 1^2+(-2)^2+0^2 = 5$

Or $5 \neq 9$ donc $M \notin \mathcal{S}$.

Méthode bis : $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ donc $\Omega M = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5} \, (\neq 3)$

Donc $M \notin \mathcal{S}$.

K et K' sont diamétralement opposé sur $\mathcal{S}$.

$\Updownarrow$

Ω = milieu de $[KK']$

$x_\Omega = \frac{x_K + x_{K'}}{2} \Leftrightarrow x_{K'} = 2x_\Omega - x_K$

$x_{K'} = 2\times 1 - 1 = 1$

De même $y_{K'} = 2y_\Omega - y_K = -2-(-4) = 2$

$K'(1;2;2)$

Exercice IV

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points $A(5;0;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$.

1. a. Soit R le milieu du segment [AB].
   Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$ et que $EA = EB$.

2. On considère le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

   b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z & = & t \end{array}\right.$$

3. On considère le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
   Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathcal{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. a. Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

   b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

1)a) R est le milieu de [AB] donc :

- $R\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A-z_B}{2}\right)$

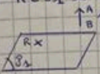
$R\left(\frac{5+1}{2} ; \frac{0+4}{2} ; \frac{-1+(-1)}{2}\right)$

$\boxed{R(3;2;-1)}$

- $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$

b) $R \in \mathcal{P}_1$ et $\vec{AB}$ est normal à $\mathcal{P}_1$



$\vec{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ car $\vec{n} = \frac{1}{4}\vec{AB}$

Donc une E.C de $\mathcal{P}_1$ est : $-x+y+0z+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$

$R(3;2;-1) \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow -3+2+d=0 \Leftrightarrow d=1$

$-x+y+1=0$ est une E.C de $\mathcal{P}_1$

Donc $\boxed{x-y-1=0 \text{ est une autre E.C de } \mathcal{P}_1}$

c) $E(10;9;8)$

$x_E - y_E - 1 = 10-9-1 = 0$ Donc $\boxed{E \in \mathcal{P}_1}$

$\vec{EA}\begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $EA = \|\vec{EA}\| = \sqrt{(-5)^2+(-9)^2+(-9)^2} = \sqrt{187}$

$\vec{EB}\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $EB = \|\vec{EB}\| = \sqrt{(-9)^2+(-5)^2+(-9)^2} = \sqrt{187}$

Donc $\boxed{EA = EB}$ $(=\sqrt{187})$

2)a) $\mathcal{P}_2 : x - z - 2 = 0$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_1$

$\vec{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{P}_2$

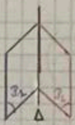
$\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants $\Leftrightarrow \vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires

$\vec{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires (évidence)

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ sécants}}$

2) b)



M_1 $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est une RP de droite

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(2+t; 1+t; t)$: Mq $M \in P_1 \cap P_2$

Or $x_M - y_M - 1 = 2+t-(1+t)-1 = 2+t-1-t-1 = 0$

$M \in P_1$

De $\hat{m}$: $x_M - z_M - 2 = 2+t-(t)-2 = 2+t-t-2 = 0$

Donc $M \in P_2$

Donc $M \in P_1 \cap P_2$

$\Rightarrow$ Donc $D \subset P_1 \cap P_2$

Or $P_1 \cap P_2$ est une droite

Donc $D = P_1 \cap P_2$, On met Δ à la place de D.

M_2 Prendre 2 points $\neq$ sur la droite donnée et vérifier qu'ils appartiennent à P_1 et P_2

M_3 Si on ne donne pas de R.P de Δ que faire ?

$M(x;y;z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$

Posons $z = t$:

$M(x;y;z) \in P_1 \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x-z-2=0 \\ z=t \end{cases}$

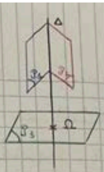
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z+2 \\ y = x-1 \\ z = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t+2 \\ y = t+2-1 \\ z = t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t+2 \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Donc on a une RP de Δ où $\Delta = P_1 \cap P_2$

3) $\mathcal{P}_3$ a pour équation : $y+z-3=0$



$\Omega(x;y;z) \in \Delta \cap \mathcal{P}_3 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \\ y+z-3=0 \end{cases}$

<u>Donc</u> : $1+t+t-3=0$

$2t-2=0$

$t=1$ et $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$; $\boxed{\Omega(3;2;1)}$

4) a) $\Omega \in \Delta$ et $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Donc $\Omega \in \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1$ = plan médiateur de [AB]

Donc $\boxed{\Omega A = \Omega B}$

<u>De même</u> $\Omega \in \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_2$ = méd de [AC]

Donc $\boxed{\Omega A = \Omega C}$

$\Omega \in \mathcal{P}_3$ (q3) et $\mathcal{P}_3$ = méd [AD]

Donc $\boxed{\Omega A = \Omega D}$

4) b) $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

Donc A, B, C et D sont à la m̂ distance de Ω. ils appartiennent donc à la sphère de centre $\Omega(3;2;1)$

et de rayon $r = \Omega A$

Or $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\Omega A = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{12} = \boxed{2\sqrt{3} \text{ u.l.}}$

Exercice 1 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère :

- le point $A(1;-1;-1)$;
- le plan $\mathcal{P}_1$, d'équation : $5x+2y+4z=17$;
- le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation : $10x+14y+3z=19$;
- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 3-2t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

1) $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_1$

$\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}_2$

dq $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires

$\frac{x_{\overrightarrow{n_1}}}{x_{\overrightarrow{n_2}}} = \frac{5}{10} = 0,5$ et $\frac{y_{\overrightarrow{n_1}}}{y_{\overrightarrow{n_2}}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \left(\neq \frac{1}{2}\right)$

- Donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Donc } \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{P}_2 \text{ non parallèles}}$
- Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$.

2) Soit $M(1+2t\,;-t\,;3-2t)$ où $t \in \mathbb{R}$.

Mq : $M \in \mathcal{P}_1$ et $M \in \mathcal{P}_2$

On : $\forall t \in \mathbb{R}$, $5(1+2t)-2t+4(3-2t) = 5+10t-2t+12-8t = 17$

Donc $\boxed{M \in \mathcal{P}_1}$

De même : $10(1+2t)-14t+3(3-2t) = 10+20t-14t+9-6t = 19$

Donc $\boxed{M \in \mathcal{P}_2}$

Ainsi $M \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

Or $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite : donc $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

3) a) $5x_A + 2y_A + 4z_A = 5\times 1 + 2\times(-1) + 4\times(-1) = 5-2-4 = -1$

Or $-1 \neq 17$

Donc $\boxed{A \notin \mathcal{P}_1}$

3) b) Si $A \in \mathcal{D}$, alors comme $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

on aurait $A \in \mathcal{P}_1$: contraire à 3) a) Donc $\boxed{A \notin \mathcal{D}}$

4) a) $M(1+2t\,;-t\,;3-2t)$

$f(t) = AM^2$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 2t \\ -t+1 \\ 4-2t \end{pmatrix}$

Donc $f(t) = (2t)^2 + (-t+1)^2 + (4-2t)^2$

$f(t) = 4t^2 + (-t)^2 + 2\times(-t)\times 1 + 1 + 16 - 16t + 4t^2$

$\boxed{f(t) = 9t^2 - 18t + 17}$

4) b) $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$: trinôme avec $a = 9\ (>0)$

Donc f admet un minimum en $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{18}{18} = 1$

Donc lorsque $M(1+2t\,;-t\,;3-2t)$

$M(3\,;-1\,,1)$; AM^2 est minimale donc AM minimale

Méthode Bertiale :

$f(t) = 9t^2 - 18t + 17$

$f'(t) = 18t - 18$

$f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 18t - 18 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 1$

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- f est minimale si $t = 1$; càd lorsque $M(3;-1;1)$

5) $H(3;-1;1)$ $\quad \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ dirige $\mathscr{D}$

$A(1;-1;-1)$

Donc $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 2\times 2 + 0\times(-1) + 2\times(-2) = 4 - 4 = 0$ $\quad$ Donc $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

(AH) et $\mathscr{D}$ sont orthogonales

$\Rightarrow$ Or $H \in \mathscr{D}$ (q.4)b) et $H \in (AH)$

Donc $H \in (AH) \cap \mathscr{D}$: (AH) et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires en H.

3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.

b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.

4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.
On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = AM^2$.

a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$.

b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.

5. On note H le point de coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

(Métropole 2011)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathscr{P})$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

distance M_0 au plan

$$d(M_0, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad \text{BUT}$$

1. Justifier que $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4\,;1\,;5)$, $(-3\,;2\,;0)$, $(1\,;3\,;6)$, $(-7\,;0\,;4)$.

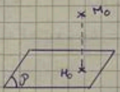
1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$. $\longrightarrow$ éq. de plan.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

PARTIE A :

$\mathscr{P}$ a pour E.C : $ax+by+cz+d=0$

$M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$



$H_0 =$ p.o de M_0 sur $\mathscr{P}$

$\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est normal à $\mathscr{P}$

càd : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

1) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = \|\vec{n}\| \times \|\overrightarrow{M_0H}\| \times \cos(\vec{n}\,;\overrightarrow{M_0H}) \quad (\#)$

$\Rightarrow$ Or $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; donc $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; $\|\overrightarrow{M_0H}\| = M_0H$

Enfin ; $(\vec{n}\,;\overrightarrow{M_0H}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{M_0H} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ \pi \text{ sinon} \end{cases}$

Or $\cos(0) = 1$

$\cos(\pi) = -1$

Donc $|\cos(0)| = 1$

$|\cos(\pi)| = |-1| = 1$

$\varepsilon = 1$ si angle $= 0$

$\varepsilon = -1$ si angle $= \pi$

$(\#)$ s'écrit : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} \times \varepsilon$ où $\varepsilon \in \{-1\,;1\}$

$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = |\underbrace{M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{\geqslant 0} \times \varepsilon| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} \times \underbrace{|\varepsilon|}_{=1}$

$|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2) $H(x_H\,;y_H\,;z_H)$ $\quad \overrightarrow{M_0H}\begin{pmatrix}x_H-x_0\\y_H-y_0\\z_H-z_0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = ax_H - ax_0 + by_H - by_0 + cz_H - cz_0$

$\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = ax_H + by_H + cz_H - ax_0 - by_0 - cz_0$

Or $H \in \mathcal{P}$; donc $ax + bx + cz + d = 0$

$ax + bx + cz = -d$

Donc $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$

3) D'après 1)

$|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}| = M_0H \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Donc $\overrightarrow{M_0H} = \dfrac{|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ division licite car $(a;b;c) \neq (0;0;0)$

D'après q.2) $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = ax_0 - by_0 - cz_0 - d$

donc : $|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}| = |-ax_0 - by_0 - cz_0 - d|$

$|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}| = |-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

Or deux nb opposés ont m̂ valeur absolue

Donc $|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

Ainsi $M_0H = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

PARTIE B :

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\1\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$

$\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{7}{3} \neq \dfrac{1}{2}$

- Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires

$\Rightarrow$ Donc A, B, C ne sont pas alignés : ils forment un unique plan noté $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P} = (ABC)$

- $x_A + 2y_A - z_A - 1 = 4 + 2\times 1 - 5 - 1 = 6 - 6 = \boxed{0}$, donc $A \in \Pi$ où Π est le plan qui a pour E.C : $x + 2y - z - 1 = 0$

$x_B + 2y_B - z_B - 1 = -3 + 2\times 2 - 0 - 1 = -3 + 4 - 1 = \boxed{0}$

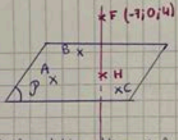
Donc $B \in \Pi$

- $x_C + 2y_C - z_C - 1 = 1 + 2\times 3 - 6 - 1 = \boxed{0}$ Donc $C \in \Pi$

Ainsi comme A, B et C non alignés $\Pi = (ABC) = \mathcal{P}$

Une E C de $\mathcal{P}$ est : $x + 2y - z - 1 = 0$

1) b)



$H =$ p.o de F sur $\mathcal{P}$.

• D'après la relation obtenue à la partie A avec M_0 est ici le pt F donc $\begin{cases} x_0 = -7 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 4 \end{cases}$

et $\mathcal{P}$ a pour équation $x + 2y - z - 4 = 0$

donc $a = 1$; $b = 2$; $c = -1$

$$FH = \frac{|-7+2\times 0-4-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{FH = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \boxed{2\sqrt{6}}} \text{ u.l.}$$

Exercice III

DEF { Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

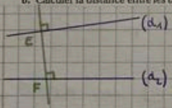
Soit (d_1) la droite passant par $A(1 ; 2 ; -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite

dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.
4. a. Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.
   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0 ; -\frac{5}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{4}{3} ; -1\right)$.

5. a. Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).
   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).



1) (d_1) passe par $A(1 ; 2 ; -1)$ et est dirigé par $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Donc une R.P de (d_1) est : $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ dirige (d_1)

$\vec{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige (d_2)

Donc $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires

$\rightarrow$ Donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles

<u>Étudions l'intersection de (d_1) et (d_2) :</u>

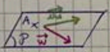
$$M(x;y;z) \in (d_1)\cap(d_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 0 = \lambda+1 \\ y = 1+t = 2+2\lambda \\ z = 2+t = -1 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} \lambda+1=0 \\ t = 2\lambda+2-1 = 2\lambda+1 \\ t = -1-2 = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda = -1 \\ t = 2\times(-1)+1 = -1 \\ t = -3 \end{cases}$ système incompatible car $-1 \neq -3$

Par suite, $\boxed{(d_1) \text{ et } (d_2) \text{ ne sont pas coplanaires}}$

3)



• Soit Π le plan ayant pour E.C : $-2x+y+5z+5=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ est normal à Π.

<u>Mq</u> $\vec{n}\perp\vec{u_1}$ et que $\vec{n}\perp\vec{w}$

<u>Or</u> $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{u_1} = -2\times1+1\times2+5\times0 = -2+2 = 0 \\ \vec{n}\cdot\vec{w} = -2\times2+1\times(-1)+5\times1 = -5+5 = 0 \end{cases}$

Donc $\vec{n}\perp\vec{u_1}$ et $\vec{n}\perp\vec{w}$

Or $\vec{u_1}$ et $\vec{w}$ non colinéaires

$\Rightarrow$ Donc $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$

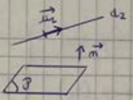
Alors une équation de $\mathcal{P}$ est : $-2x+y+5z+d=0$

$A(1;2;-1)\in\mathcal{P} \iff -2\times1+2+5\times(-1)+d=0$

$\iff d=5$

$\mathcal{P}=\Pi$ a pour équation cartésienne : $-2x+y+5z+5=0$

4) a) d_2 dirigée par $\vec{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$



$\mathcal{P}$ a pour vecteur normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$

$\vec{u_2}\cdot\vec{n} = 0\times(-2)+1\times1+1\times5 = 6$

$6 \neq 0$ donc $\vec{u_2}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux

Donc (d_2) et $\mathcal{P}$ sont sécants. On note E le pt.

4) b) $F \in (d_2)\cap\mathcal{P} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2+t \\ -2x+y+5z+5=0 \end{cases}$

Donc : $1+t+5\times(2+t)+5=0$

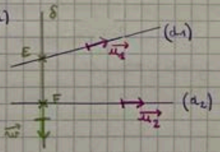
$1+t+10+5t+5=0$

$6t+16=0$

$t=\frac{-16}{6}=\frac{-8}{3}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3} \\ z=2-\frac{8}{3}=\frac{-2}{3} \end{cases}$ $\boxed{F\left(0;-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)}$

5) a)



- La distance entre (d_1) et (d_2) est la distance entre les pts d'intersection de (δ) et de chacune des droites (d_1) et (d_2)

(δ) est orthogonale à (d_1) et à (d_2) (q. précédente)

Donc EF est la distance entre (d_1) et (d_2).

5) b) EF avec $E\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-1\right)$ et $F\left(0;\frac{-5}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$\vec{EF}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ donc $\boxed{EF} = \|\vec{EF}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ u.l.}}$

Exercice VIII

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

droite et plan // ?
→ voir si v. normal $\mathscr{P}$
et v. directeur $\mathscr{D}$
orthogonaux.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2 ; 1 ; -1),\quad B(-1 ; 2 ; 1) \text{ et } \quad C(5 ; 0 ; -3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x + 5y - 2z + 3 = 0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t+3 \\ y = t+2 \\ z = 2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

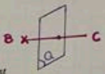
Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté Q, a pour équation cartésienne :

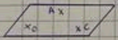
$$3x - y - 2z - 7 = 0.$$



On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

A1

$\uparrow \vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$



$O(0;0;0)$; $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA} = 1\times 2 + 0\times 1 + 2\times(-1) = 2-2 = 0$
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OC} = 1\times 5 + 0\times 0 + 2\times(-3) = -1 \quad (\neq 0)$

$\Rightarrow$ Donc $\vec{n}$ non orthogonal à (OAC)

A1 FAUSSE

A2 : $C(5;0;-3)$; $B(-1;2;1)$; $A(2;1;-1)$

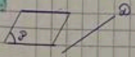
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ donc A, B, C alignés : $C \in (AB)$

$\Rightarrow$ On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_C = -t+3 \\ y_C = t+2 \\ z_C = 2t+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 5 = -t+3 \\ 0 = t+2 \\ -3 = 2t+1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 3-5 = -2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$

système compatible

$\Rightarrow$ Donc $C \in \mathscr{D}$ et **A2 VRAIE**

A3 :



- $\mathscr{D}$ est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ (lecture de R P)
- $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal : $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ (lecture éq)

$\vec{u}\cdot\vec{w} = -1\times 1 + 1\times 5 + 2\times(-2) = -1+5-4 = \boxed{0}$

$\Rightarrow$ Donc $\vec{u} \perp \vec{w}$ et par suite **A3 VRAIE**

A4 : Q = plan médiateur de [BC] $\rightarrow$ Donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ est normal à Q

Donc $\vec{E}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ est aussi normal à Q

Donc une E.C de Q est : $3x - y - 2z + d = 0$

K milieu de [BC]

Donc $K(2;1;-1) \in Q \Leftrightarrow 3\times 2 - 1 - 2\times(-1) + d = 0$
$\Leftrightarrow d = -7$ donc Q a pour E.C $3x - y - 2z - 7 = 0$

A4 VRAIE