

Chapitre X :

« La Science et la passion de comprendre sont-elles autres choses que l'effet de l'aiguillon du savoir qui met en notre âme le mystère de l'Univers ? ». Louis Pasteur

Chapitre X Orthogonalité dans l'espace - Equations cartésiennes de plans

1. Orthogonalité dans l'espace

A) Généralités

Définition

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** lorsque leurs parallèles respectives menées d'un point quelconque de l'espace sont **perpendiculaires**. *La par forcément coplanaires.*

Exemple

Dans le cube ci-contre, (AE) et (GH) sont orthogonales :

Pourquoi ?

Citer d'autres droites orthogonales.

$$(AB) \perp (CC')$$

$$(DC) \perp (FB)$$

Remarque

Les termes "perpendiculaires" et "orthogonal" sont souvent confondus : c'est un **abus** !

En effet, deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes, alors que deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et *a fortiori*, pas nécessairement sécantes.

Définition

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls, sont orthogonaux s'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

Dans l'exemple précédent, les vecteurs \vec{BC} et \vec{EF} sont orthogonaux.

B) Produit scalaire dans l'espace

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \quad (\text{X repère})$$

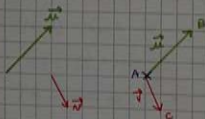
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' \quad (\text{repère})$$

Nous allons voir qu'il est licite de parler de produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} .
On va se ramener à la définition du produit scalaire de deux vecteurs situés dans un MEME PLAN.

Fixons un point A quelconque de l'espace.

On sait qu'il existe alors un unique point B tel que $\vec{u} = \vec{AB}$, ..., et un unique point C tel que $\vec{v} = \vec{AC}$.

Illustration :



Avec ce choix de représentants de \vec{u} et \vec{v} , \vec{AB} et \vec{AC} sont situés dans un même plan, le plan (ABC).
Definition

On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, calculé dans le plan (ABC).

Propriété: Toutes les propriétés du produit scalaire énoncées dans le plan s'étendent à l'espace:

En particulier: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}{\neq 0} = 0 \iff \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u}, \vec{v} = \pm \frac{\pi}{2}$
 Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

1) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace, on a la formule bien pratique:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
 \hookrightarrow mesure de l'angle

2) \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Cette propriété fondamentale est d'un usage récurrent dans les exercices. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour dire que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \frac{\pi}{2} (\pm 90^\circ)$

3) Le carré scalaire d'un vecteur \vec{u} est par définition le produit scalaire du vecteur \vec{u} par lui-même: $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté \vec{u}^2 .

Grâce à la formule bien pratique 1), on a donc: $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

En particulier, pour tous points A et B, $\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2 \iff$ Donc $AB = \sqrt{\vec{AB}^2}$

4) Enfin, les règles de calcul du produit scalaire du plan s'étendent à l'espace:
 Pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif).

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs).

Pour tout réel k, $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

IR 4 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

IR 2 $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

En particulier, on a: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2] = \frac{1}{2} [\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2]$

Ces dernières formules sont appelées formules de polarisation, et expriment le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.

Preuve: il suffit de considérer un plan (P) tel que \vec{u} et \vec{v} admettent des représentants dans (P), et d'appliquer les règles du produit scalaire vues dans le plan en première.

Pour la 5): $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

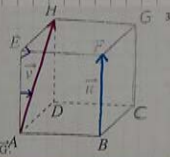
Soit $\vec{u} = \vec{v} \neq \vec{0}$ a écrit
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u})$
 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0)$

a) \odot Donc: $\vec{BF} \cdot \vec{AH} = \|\vec{AE}\| \times \|\vec{AH}\| \times \cos(\vec{AE}, \vec{AH})$
 $\vec{BF} \cdot \vec{AH} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos(\frac{\pi}{4})$
 $\vec{BF} \cdot \vec{AH} = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Soit APCDEFGH un cube d'arête 1

a) Calculer $\vec{BF} \cdot \vec{AH} \stackrel{\text{car } \vec{BF} = \vec{AE}}{=} \vec{AE} \cdot \vec{AH} \odot$

b) En utilisant la décomposition: $\vec{BH} = \vec{BF} + \vec{FE} + \vec{EH}$, calculer: $\vec{BH} \cdot \vec{CG}$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \vec{BH} \cdot \vec{CG} &= (\vec{BF} + \vec{FE} + \vec{EH}) \cdot \vec{CG} \\
 \vec{BH} \cdot \vec{CG} &= \vec{BF} \cdot \vec{CG} + \vec{FE} \cdot \vec{CG} + \vec{EH} \cdot \vec{CG} \\
 &\quad \text{car } \vec{FE} \perp \vec{CG} \text{ donc } \vec{FE} \cdot \vec{CG} = 0 \quad \vec{EH} \perp \vec{CG} \text{ donc } \vec{EH} \cdot \vec{CG} = 0 \\
 \vec{BH} \cdot \vec{CG} &= \vec{BF} \cdot \vec{CG} + 0 + 0 \\
 \vec{BH} \cdot \vec{CG} &= \vec{BF} \cdot \vec{BF} \quad \text{car } \vec{BF} = \vec{CG} \\
 \text{Donc } \vec{BH} \cdot \vec{CG} &= \|\vec{BF}\|^2 = 1^2 = 1
 \end{aligned}$$

Définition

Une base $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace est dite **orthonormée** lorsque les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$, et de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple : dans le cube précédent, citer une base orthonormée de l'espace.

Un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ est la donnée d'un point O de l'espace et d'une base orthonormée $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Nous travaillerons dans toute la suite du chapitre exclusivement dans des repères orthonormés.

Théorème (utile pour le bac, et en mécanique ...)

Si l'espace est muni d'un repère **orthonormé** $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, et si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$ = somme des produits des coordonnées de \vec{u} $\forall \vec{u}, \vec{v} =$ Pdt des abs + Pdt des ord + Pdt des ord

2) En particulier, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (Fundamental, à bien retenir).

3) \vec{u} et \vec{v} sont donc orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ c'est-à-dire : $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$

En particulier, deux droites de l'espace respectivement dirigées par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont donc orthogonales si et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2) Si A $(x_A ; y_A ; z_A)$ et B $(x_B ; y_B ; z_B)$, alors :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \quad \vec{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(\alpha_{AB})^2 + (\beta_{AB})^2 + (\gamma_{AB})^2}$$

α_{AB} = abs de \vec{AB}
 β_{AB} = ord de \vec{AB}
 γ_{AB} = ord de \vec{AB}

Preuve

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{v} = x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \cdot (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) \\
 &= (x \vec{i} \cdot x' \vec{i}) + (y \vec{j} \cdot y' \vec{j}) + (z \vec{k} \cdot z' \vec{k}) + (x \vec{i} \cdot y' \vec{j}) + (x \vec{i} \cdot z' \vec{k}) + (y \vec{j} \cdot x' \vec{i}) + (y \vec{j} \cdot z' \vec{k}) + (z \vec{k} \cdot x' \vec{i}) + (z \vec{k} \cdot y' \vec{j}) \\
 &= x x' + y y' + z z' + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
 &= x x' + y y' + z z'
 \end{aligned}$$

On $\vec{i} \perp \vec{j}$, donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 = \vec{j} \cdot \vec{i}$; $\vec{j} \perp \vec{k}$, donc $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ donc $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

En suite:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z' = \|x\vec{i}\|^2 + \|y\vec{j}\|^2 + \|z\vec{k}\|^2 \quad \text{CARRÉ} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

Formule de l'hygiène!
Ici par $\vec{i} \cdot \vec{j}$ et $\vec{j} \cdot \vec{k}$.

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$

$$(\vec{i} \cdot \vec{i}) = 0 \cdot 0 = 0$$

Faisons $\vec{u} = \vec{u}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$$

Donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et comme $\|\vec{u}\| \geq 0$, on a:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \#$$

Pour $\vec{u} = \vec{AB}$: alors $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et la relation # conduit au

résultat voulu: $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exercice 1

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un R.O.N de l'espace, et (d) et (d') les droites qui ont pour R.P. respectives:

$$(d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \text{ avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases} \quad \text{et} \quad (d)': \begin{cases} x = -1-s \\ y = 5 \\ z = 2+s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que (d) et (d') sont orthogonales.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dirige } (d) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dirige } (d')$$

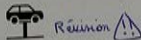
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z' = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 0$$

Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$; donc (d) et (d') sont orthogonales

Exercice 2 (Hyper classique)

Soit A(0; 1; 2), B(1; -1; 3) et C(-1; 2; 0) des points d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

a) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



b) En déduire une mesure de $(\vec{AB}; \vec{AC})$ arrondie au degré près.

$$a) \vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A = 1 - 0 = 1 \\ y_B - y_A = -1 - 1 = -2 \\ z_B - z_A = 3 - 2 = 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x x' + y y' + z z' = 1 \times (-1) + (-2) \times 1 + 1 \times (-2) = -1 - 2 - 2 = -5$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -5$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}) \quad (\#)$$

$$\text{Or } \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_{AB})^2 + (y_{AB})^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(x_{AC})^2 + (y_{AC})^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Ainsi : } (\#) \Rightarrow \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{9} = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})})$$

$$-5 = 6 \times \cos(\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})})$$

$$\cos(\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}) = -\frac{5}{6}$$

avec la machine : $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$
 = angle géométrique dont le cos est égal à $-\frac{5}{6}$

⚠ calculatrice réglée en mode degré

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \approx 146^\circ \text{ au degré près}$$

Exercice 3

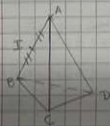
= arête m longueur

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a, et I le milieu de [AB].

a) Exprimer en fonction de a, chacun des produits scalaires : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par ce procédé, on peut démontrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales.



$$a) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{car ABC est un triangle équilatéral.}$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC}} = a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\bullet \vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2} \quad (\text{m\~{e} raisonnement car ABD est le m\~{e} tri angle que ABC})$$

$$b) \odot \vec{AB} \perp \vec{CD} \quad \text{vaut que } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$$

$$\text{Or } \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (-\vec{AC}) + \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{CD}} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \boxed{0}$$

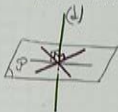
⊙ donc (AB) et (CD) sont orthogonales

II - Vecteur normal à un plan

Définition

Une droite (d) est orthogonale à un plan \mathcal{P} lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan \mathcal{P} .

Illustration :



Définition

Soit (\mathcal{P}) un plan, et \vec{n} un vecteur non nul de l'espace.

On dit que \vec{n} est un vecteur normal au plan (\mathcal{P}) s'il est orthogonal à tout vecteur du plan (\mathcal{P}) .

Propriété

Soit \vec{n} un vecteur non nul de l'espace, et (\mathcal{P}) un plan de l'espace.

\vec{n} est normal au plan (\mathcal{P}) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires de (\mathcal{P}) .

Preuve.



5

⇒ Le sens direct est évident : si \vec{n} est normal au plan (\mathcal{P}) , alors, par définition, il est orthogonal à tous les vecteurs du plan (\mathcal{P}) , donc en particulier, il est orthogonal à deux quelconques vecteurs non colinéaires de (\mathcal{P}) .


⇒ Réciproquement, supposons que \vec{n} soit orthogonal à deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires de (\mathcal{P}) : Alors, $(\vec{u} ; \vec{v})$ forme une base de (\mathcal{P}) vu que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Soit \vec{w} un vecteur quelconque du plan (\mathcal{P}) : vu que $(\vec{u} ; \vec{v})$ est une base de (\mathcal{P}) , \vec{w} s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} : il existe des réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On veut prouver que \vec{n} et \vec{w} sont orthogonaux, donc on calcule naturellement le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{w}$:

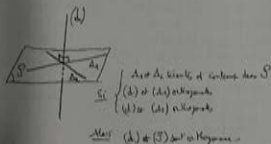
$$\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) = a \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{u}}_0 + b \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{v}}_0 = a \times 0 + b \times 0 = 0 \text{ car } \vec{n} \text{ et } \vec{u} \text{ sont orthogonaux, donc } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et de même, } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

Ainsi, \vec{n} et \vec{w} sont orthogonaux pour tout vecteur \vec{w} de (\mathcal{P}) , donc par définition, \vec{n} est normal à (\mathcal{P}) .

Corollaire (Fréquemment utilisé en pratique dans les exercices de type bac). 

Pour qu'une droite de l'espace soit orthogonale à un plan (\mathcal{P}) , il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (\mathcal{P}) .

Illustration

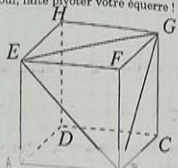


Remarque

Il est fondamental, dans le corollaire précédent, d'avoir deux droites sécantes. Pourquoi ?

Tracer deux droites parallèles sur une feuille de papier, et avec votre équerre, mettez un côté de l'angle droit sur l'une d'elle, pensez-vous que le deuxième côté de l'angle droit de l'équerre soit toujours orthogonal à la seconde droite ?????????? Si vous pensez que oui, faite pivoter votre équerre !

Exercice important (XXI) A revoir ! ++



ABCDEFGH est un cube muni du R.O.N ($A : \vec{AE}, \vec{AD}, \vec{AB}$).

1) Déterminez les coordonnées des vecteurs $\vec{AG}, \vec{BE}, \vec{ED}$ dans ce repère.

2) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BED).

a) $A(0,0,0) ; B(1,0,0) ; G(1,1,1) ; E(0,0,1) ; D(0,1,0)$
 $\vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Rappel: Pour mq (AG) est orthogonale au plan (BED), il suffit de mq (AG) est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans (BED),
 Par exemple les droites (BE) et (ED)

$\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$ et $\vec{AG} \cdot \vec{ED} = 0$

• $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$

Donc $\vec{AG} \perp \vec{BE}$

• $\vec{AG} \cdot \vec{ED} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0$

Donc $\vec{AG} \perp \vec{ED}$

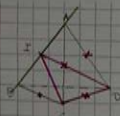
→ Comme \vec{BE} et \vec{ED} ne sont pas colinéaires, (AG) est orthogonale au plan (BED)

Exercice

Soit ABCD un tétraèdre régulier, e, I le milieu de [AB].

a) Par des arguments de géométrie euclidienne, démontrer que la droite (AI) et le plan (ICD) sont orthogonaux.

b) En déduire que les droites (AI) et (CD) sont orthogonales.



a) $\begin{cases} (AB) \perp (CI) \\ (AB) \perp (DI) \end{cases}$



ABC équilatéral donc
 médiane = hauteur = médiatrice
 ABD équilatéral

Donc (AI) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ICD)
 → En droites (CI) et (DI)

Donc (AI) est orthogonale au plan (ICD)

b) (AB) est orthogonale au plan (ICD) , donc elle est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (ICD) , donc en particulier à la droite (CD) (car $CD \subset (ICD)$)

\Rightarrow Donc (AB) et (CD) sont orthogonales.

III. Equations cartésiennes d'un plan

Propriété XXXL

Soit \vec{n} un vecteur non nul de l'espace, et A un point de l'espace muni d'un R.O.N. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

1) Le plan \mathcal{P} passant par A et orthogonal à \vec{n} est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
 \vec{AM} et \vec{n} sont orthogonaux : $\vec{AM} \perp \vec{n}$

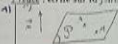
2a) $\forall \mathcal{P}$ Tout plan \mathcal{P} ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la

forme: $ax + by + cz + d = 0$ ou $d \in \mathbb{R} \forall \mathcal{P} \Rightarrow \underline{2x + 4y + 1z + 7 = 0}$
 \hookrightarrow équation cart. d'un plan $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à un plan orthogonal (vecteur)

2b) $\forall \mathcal{P}$ Réciproquement, si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, alors l'ensemble

$\mathcal{E} = \{M(x; y; z) / ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \forall \mathcal{P}$

Exercice : écrite sur la feuille ci-jointe.



1) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à (\mathcal{P}) et $A \in (\mathcal{P})$.

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

soit $A(x_0; y_0; z_0)$ et $M(x; y; z)$ dans $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}; \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$
 $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

Ainsi, $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$
soit une équation cartésienne de (\mathcal{P}) .

2) $(x_0; y_0; z_0) \neq (0; 0; 0)$ et $(\mathcal{P}) = \{M(x; y; z) / ax + by + cz + d = 0\}$.

Il faut vérifier que $(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

Voici $(x_0; y_0; z_0) \neq (0; 0; 0)$, on peut toujours se permettre de supposer que $x_0 \neq 0$.

Soit $y_0 = z_0 = 0$, $ax + by_0 + cz_0 = 0$ soient donc $ax + 0 = 0$ donc $x = -\frac{a}{a} = (-1) \cdot 0$.

Ainsi, $A(-\frac{a}{a}; 0; 0) \in (\mathcal{P})$, donc $(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

3) Soit $M(x; y; z) \in (\mathcal{P})$, on a donc $ax + by + cz + d = 0$.

On a $\vec{AM} \begin{pmatrix} x - (-\frac{a}{a}) \\ y - 0 \\ z - 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donc $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = (x + \frac{a}{a})a + yb + zc = ax + by + cz + d = 0$ car $(x + \frac{a}{a})a = ax + by + cz + d = 0$.

Ainsi, $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et par conséquent on conclut que (\mathcal{P}) est le plan passant par A et orthogonal

à $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Exemples

$x - 2y + z + 3 = 0$ est l'équation d'un plan car cette dernière, qui se réécrit sous la forme :
 $1x + (-2)y + 1z + 3 = 0$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec : $a=1$; $b=-2$; $c=1$ et $d=3$ et que

$(1; -2; 1)$ n'est pas le triplet nul. Mieux, le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

⇒ Comment trouve-t-on les coordonnées d'un point appartenant à ce plan ?

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 2 \times 0 + 3 + 3 = 0 \\ 3 - 3 - 1 = -4 \end{array} \right\} (1, 0, -4) \in \mathcal{P}$$

Donnez à deux des inconnues de son choix les valeurs de son choix, et en résolvant l'équation, on obtient la valeur de la troisième inconnue.

Par exemple, je fais $x=0$ et $y=0$ dans la relation : $x - 2y + z + 3 = 0$ ce qui donne : $0 - 0 + z + 3 = 0$ donc $z = -3$ et par suite, le point $A(0; 0; -3)$ appartient au plan d'équation $x - 2y + z + 3 = 0$.

Enfin un plan contient une infinité de points !!! Par exemple, ici, $B(1; 0; -4)$ $C(-3; 0; 0)$ $D(4; 2; -3)$ sont des points appartenant au plan d'équation : $x - 2y + z + 3 = 0$!

Trouvez les coordonnées d'un autre point appartenant à ce plan !!

$$T(6; 3; -3), Q(0; 5; 7), D(12; 6; 3)$$

Remarques



Cas particuliers importants :

Le plan d'équation $x = 0$ correspond au plan... $(0, y, z)$... car... $x=0$... s'écrit $1x + 0y + 0z + 0 = 0$ donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan.

Le plan d'équation $y = 0$ correspond au plan... $(x, 0, z)$...

Le plan d'équation $z = 0$ correspond au plan... $(x, y, 0)$...

Que dire de deux plans qui ont des vecteurs normaux égaux (ou colinéaires) ? ⇒ ils sont parallèles.



Exercice 5 (Le basique, à maîtriser parfaitement). ♥ ♥

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un R.O.N. de l'espace, et $A(1; 0; 2)$, $B(3; 1; -1)$ et $C(0; 0; 4)$.

On admet que A, B et C ne sont pas alignés.

1a) Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (Question qui tombe avec une probabilité égale ou supérieure à 0,9999 au bac...)

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point K milieu de [AC].

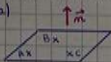
3) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble \mathcal{P} suivant :

$$\mathcal{P} = \{M(x; y; z) / x - y + z + 5 = 0\}.$$

⚠ Attention (on met aussi une virgule)

4) On appelle plan médiateur du segment [BC] le plan \mathcal{A} passant par le milieu I de [BC] et ayant pour vecteur normal \vec{BC} . Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{A} .

1) a)



$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{m} \cdot \vec{AB} = 2 \times 2 + (-1) \times 1 + 1 \times (-3) = 4 - 1 - 3 = 0$$

$$\vec{m} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 0 + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{m} \perp \vec{AB}$$

$$\text{Donc } \vec{m} \perp \vec{AC}$$

donc \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires situés dans le plan (ABC)

Donc \vec{n} est normal au plan (ABC)

1) b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)

Donc: $2x - y + z + d = 0$ est une équation de (ABC)

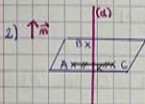
Or $C(0, 0, 4) \in (ABC)$; donc les coordonnées de C vérifient l'équation $2x - y + z + d = 0$

Donc: $2x_c - y_c + z_c + d = 0$

$$2 \times 0 - 0 + 4 + d = 0$$

$$d = -4$$

(ABC) a pour équation cartésienne: $2x - y + z - 4 = 0$



K milieu de [AC] donc $K \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+4}{2} \right)$
 $K(0, 5, 3)$

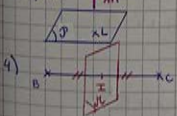
$K \in (d)$ et (d) est orthogonale au plan (ABC) donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (d) car \vec{n} est orthogonal au plan (ABC)

\Rightarrow Donc une R.P de (d) est: $\begin{cases} x = 0,5 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(ou) $\begin{cases} x = 2t + 0,5 \\ y = -t \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

3) $P = \left\{ \mathcal{H}(x, y, z), x - y + z + 5 = 0 \right\}$

\bullet P est un plan donc $\vec{m} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et $L(0, 0, -5)$ appartient à ce plan.



4) $\vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{H} .

Donc une équation cartésienne de \mathcal{H} est: $-3x - y + 5z + d = 0$
 où $d \in \mathbb{R}$.

Or I est milieu de [BC] donc $I \left(\frac{3+0}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{-1+4}{2} \right)$

$I \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \in \mathcal{H}$

Donc $-3 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 5 \times \frac{3}{2} + d = 0$
 $-3 \times \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} + 5 \times \left(\frac{3}{2} \right) + d = 0$
 $-\frac{9}{2} - \frac{1}{2} + \frac{15}{2} + d = 0$
 $\frac{5}{2} + d = 0$

$$d = -\frac{5}{2}$$

\mathcal{H} a pour E.C $-3x - y + 5z - \frac{5}{2} = 0$

Exercice 6 Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.


a) Démontrez que les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$ définissent un plan \mathcal{P} .

b) Démontrez que la droite (d) dont une R.P. est :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$
 avec $t \in \mathbb{R}$ est orthogonale à \mathcal{P} .

c) En déduire une équation cartésienne de \mathcal{P} .

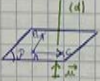
d) Soit $D(1; 0; 5)$. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.

e) Déterminer les coordonnées du point H intersection de (d) et de \mathcal{P} .

a)  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires car $\vec{x} \vec{AB} = y \vec{AC} \dots$

Donc A, B et C non alignés et forment le plan $\mathcal{P} = (ABC)$

b)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (d) (lecture R.P.)

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AB} = 2x + y + 3z = 2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = 0 \text{ donc } \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \cdot \vec{AC} = 2x + y + 3z = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 0 \text{ ; donc } \vec{u} \perp \vec{AC} \end{cases}$$

\Rightarrow Comme \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires, on a : \vec{u} normal au plan (ABC) ; donc (d) orthogonale à \mathcal{P} .

c) (d) est dirigée par $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et (d) est orthogonale à \mathcal{P} , donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P} .
Donc (\mathcal{P}) a pour équation $2x - 3y + z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A(2, 1, 3) \in (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow 2x_A - 3y_A + z_A + d = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \times 2 - 3 \times 1 + 3 + d = 0 \\ &\Leftrightarrow d = -4 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de (\mathcal{P}) est $2x - 3y + z - 4 = 0$

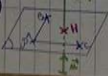
d) A, B, C forment un plan, le plan (\mathcal{P})

$\Rightarrow A, B, C, D$ sont coplanaires équivaut à dire $D \in (ABC)$

Or $2x_D - 3y_D + z_D - 4 = 2 \times 1 - 3 \times 0 + 5 - 4 = 3$

Or $3 \neq 0$, donc $2x_D - 3y_D + z_D - 4 \neq 0$

\Rightarrow Donc $D \notin (ABC)$, donc A, B, C et D non coplanaires.

e)  Soit $H(x; y; z)$

$$H \in (d) \cap (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Donc $2(-7 + 2t) - 3(-3t) + 4 + t - 4 = 0$

$$-14t + 4t + 9t + t = 0$$

$$14t - 14 = 0$$

$$t = 1$$

Donc $\begin{cases} x = -7 + 2 \times 1 = -5 \\ y = -3 \times 1 = -3 \\ z = 4 + 1 = 5 \end{cases}$

$$H(-5; -3; 5)$$

(on remplace x, y, z en fonction de t dans la dernière)

IV. Propriété orthogonale

A Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d .

- Remarques :
- Le plan passant par M et orthogonal à d est unique.
 - Lorsque $M \in d$, le projeté orthogonal de M sur d est le point M .



Propriété - Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M . On dit que MH est la distance du point M à la droite d .

Démonstration

- Si $M \in d$, alors $MH = 0$ et H est le point de d le plus proche de M .
- Si $M \notin d$, alors pour tout point M' de d , le triangle MHM' est rectangle en H , donc son hypoténuse est le côté le plus long soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de d le plus proche de M .

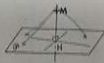


B Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan \mathcal{P} est le point d'intersection H du plan \mathcal{P} et de la droite passant par M orthogonale à \mathcal{P} .

Remarque : lorsque $M \in \mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} est le point M .

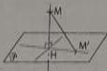


Propriété - Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan \mathcal{P} est le point de \mathcal{P} le plus proche de M . On dit que MH est la distance du point M au plan \mathcal{P} .

Démonstration

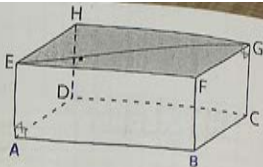
- Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de \mathcal{P} le plus proche de M .
- Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M' de \mathcal{P} , le triangle MHM' est rectangle en H , donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.
Donc H est le point de \mathcal{P} le plus proche de M .



Exemple

Dans le pavé droit ABCDEFGH, ci-contre, déterminer :

- a) Le projeté orthogonal du point H sur le plan (ABC).
↳ c'est D
- b) Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG).



Exercice 7

Soit (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}) un R.O.N. de l'espace.

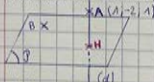
Soit (d) la droite passant par A(1 ; -2 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et B(-15 ; -10 ; 4).

On se propose de déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur la droite (d).

a) Donner une équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par B et orthogonal à (d).

b) En déduire les coordonnées du point H.

c) Calculer la distance du point B à la droite (d).



a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dirige (d) et (d) est orthogonale à \mathcal{P}
 donc $\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P}

→ Donc une eq. cartésienne de \mathcal{P} est : $-3x + y + 4z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$$B(-15, -10, 4) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow -3x(-15) - 10 + 4 \times 4 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d + 51 = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -51$$

Une équation cartésienne de \mathcal{P} est : $-3x + y + 4z - 51 = 0$

b) Une R.P. de (d) est : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow H(x; y; z) \in (d) \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 4t \\ -3x + y + 4z - 51 = 0 \end{cases}$$

Donc $-3 \underbrace{(1 - 3t)}_x + \underbrace{(-2 + t)}_y + 4 \underbrace{(1 + 4t)}_z - 51 = 0$

$$-3 + 9t - 2 + t + 4 + 16t - 51 = 0$$

$$26t - 52 = 0$$

$$t = \frac{52}{26} = 2$$

Donc $\begin{cases} x = 1 + 3 \times 2 = 7 \\ y = -2 + 2 = 0 \\ z = 1 + 4 \times 2 = 9 \end{cases}$ $H(7; 0; 9)$

c) La distance du pt B à la droite (d) est la distance entre B et le projeté orthogonal de B sur (d) à savoir BH.

B(-15; -10; 4) H(7; 0; 9)

$\vec{BH} \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$, donc $BH = \|\vec{BH}\| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2} = \sqrt{225}$

BH = 15 u.l

Exercice 8

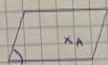
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Soit \mathcal{P} le plan passant par $A(3; 1; -2)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} .

b) En déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P}' , parallèle à \mathcal{P} et passant par le point $B(-5; 0; 7)$.

Exercice 8



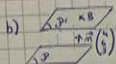
a) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P} , donc \mathcal{P} a pour E.C.

$$4x + 6y + 3z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

$$A(3, 1, -2) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 4 \times 3 + 6 \times 1 + 3 \times (-2) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = -12$$

$$\mathcal{P} \text{ a pour E.C. : } \boxed{4x + 6y + 3z - 12 = 0}$$



$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P} et \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles

Donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{P}'

qui a pour E.C. : $4x + 6y + 3z - d' = 0$ avec $d' \in \mathbb{R}$

$$B(-5; 0; 7) \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow 4 \times (-5) + 6 \times 0 + 3 \times 7 - d' = 0$$

$$\Leftrightarrow d' = -1$$

$$\mathcal{P}' \text{ a pour E.C. : } 4x + 6y + 3z - 1 = 0$$

Exercice 9

Soit $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$, $C(3; 4; 5)$, $D(4; 5; 6)$.

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

b. Déterminer l'aire du triangle ABC .

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-4; -1; 5)$ est orthogonal aux deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

b. En déduire une équation du plan (ABC) .

c. Vérifier que le point $H(-2; -8; 0)$ est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

3. a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC) .

b. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

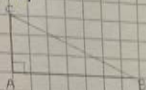
Exercice 9

1) a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 2 = 6 \neq 0$$

Donc $\vec{AB} \not\perp \vec{AC}$; donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires

1) b)



$d(ABC) = \frac{AB \times AC}{2}$ car ABC est un triangle rectangle en A

On $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; donc $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

Donc $d(ABC) = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{3 \times 14}}{2} = \frac{\sqrt{42}}{2}$ u.a

2) a) $\vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -4 \times 1 + (-1) \times 1 + 5 \times 1 = -4 - 1 + 5 = 0$

Donc $\vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -4 \times (-2) + (-1) \times 3 + 5 \times (-1) = 8 - 3 - 5 = 0$

Donc $\vec{n} \perp \vec{AC}$

2) b) D'après 2) a) $\vec{n} \perp \vec{AB}$ et $\vec{n} \perp \vec{AC}$ et \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires

\Rightarrow Donc \vec{n} est orthogonal au plan (ABC)

Donc (ABC) a pour E.C. $-4x - y + 5z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$A(1; -5; 3) \in (ABC) \Leftrightarrow -4 \times 1 + 5 + 5 \times 3 + d = 0$

$\Leftrightarrow -4 + 5 + 15 + d = 0$

$A(1; -5; 3) \in (ABC) \Leftrightarrow d = -16$

Donc : $-4x - y + 5z - 16 = 0$ est une E.C. du plan (ABC)

Rq $4x + y - 5z + 16 = 0$ est une autre E.C.

$4x + y - 5z = -16$ est une équation de (ABC)

2) c) $H(-2; -8; 0)$



$\rightarrow \exists !$ η a deux choses à vérifier pour que H est la projéct ortho. de D sur (ABC)

① $H \in (ABC)$

② \vec{DH} est normal au plan (ABC)

① $H(-2; -8; 0)$ donc $4x_H + y_H - 5z_H + 16 = 0 = \frac{4 \times (-2)}{-8} + \frac{(-8)}{-8} - 5 \times 0 + \frac{16}{+16} = 0$

Donc $H \in (ABC)$

② Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC) ^{il s'agit de mg} $\vec{u} = \vec{mg}$ \vec{DH} et \vec{n} sont colinéaires

Or $\vec{DH} \begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ Donc $\vec{DH} = 5\vec{n}$; Donc $\vec{DH} \perp \vec{n}$

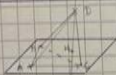
↳ Donc H est le projeté orthogonal de D sur (ABC)

3) a) La distance de D au plan (ABC), est la distance DH, car H est le p.o de D sur (ABC)

$$DH = \|\vec{DH}\| = \sqrt{(-20)^2 + (-5)^2 + 25^2} = \sqrt{400 + 25 + 625}$$

$$DH = \sqrt{1050} = 5\sqrt{42} \text{ u.l}$$

3) b)



$$V_{\text{cub}} = \frac{\text{carré base} \times h}{3}$$

$$V(\text{ABCD}) = \frac{S(\text{ABC}) \times DH}{3}$$

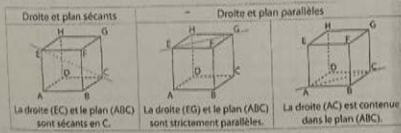
$$V(\text{ABCD}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 5 \times 5\sqrt{42}}{3} = \frac{5 \times \sqrt{42} \times \sqrt{42}}{6} = \frac{5 \times 42 \times 42}{6}$$

$$V(\text{ABCD}) = \frac{5\sqrt{1722}}{6} \text{ u.v}$$

V. Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

A. Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants et ont alors un unique point d'intersection, soit parallèles et n'ont alors aucun point d'intersection.



Propriété (admise)

Soit (d) une droite de vecteur directeur \vec{w} , et \mathcal{P} un plan de base $(\vec{u}; \vec{v})$ et de vecteur normal \vec{n} .

1. $\vec{w} \perp \vec{n}$ (d) et \mathcal{P} sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{w} et \vec{n} sont **orthogonaux**.

2. (d) et \mathcal{P} sont sécants si et seulement si les vecteurs \vec{w} et \vec{n} ne sont pas **orthogonaux**.

On a aussi les deux règles suivantes moins utilisées :

1) (d) et \mathcal{P} sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires**.

2) (d) et \mathcal{P} sont sécants si et seulement si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas **coplanaires**.

soient (u, v) et d est une droite de vecteur directeur \vec{w} .

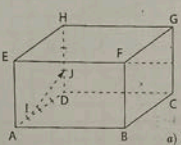
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires : d et \mathcal{P} sont parallèles. d est strictement parallèle à \mathcal{P} .	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires. d et \mathcal{P} sont sécants en M .

Remarque : dans les exercices, sans vecteurs, lorsqu'on voudra justifier qu'une droite (d) et un plan \mathcal{P} sont parallèles, il suffira donc de justifier que la droite (d) est parallèle à l'une des droites contenues dans le plan \mathcal{P} .

On procédera essentiellement de façon vectorielle.

Exercice 10

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.



I et J sont les points définies par $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AD}$ et $\vec{DJ} = \frac{1}{3}\vec{DH}$.

- Démontrer que les vecteurs \vec{IJ}, \vec{BC} et \vec{BF} sont coplanaires.
- En déduire que la droite (IJ) et le plan (BCG) sont parallèles.

AEGC est un rectangle car :

$$\begin{cases} \vec{AE} = \vec{CG} \\ (\vec{AE}) \text{ est orthogonale au plan } (EFG), \text{ donc } (\vec{AE}) \perp (\vec{EG}) \end{cases}$$

a) $\vec{BC} = \vec{AE}, \vec{BF} = \vec{AE}$

\Rightarrow Donc on a \vec{IJ}, \vec{AD} et \vec{AE} sont coplanaires

Or on a \vec{IJ} est une CBL des vecteurs \vec{AD} et \vec{AE} non colinéaires

$$\vec{IJ} = \vec{ID} + \vec{DJ}$$

$$\vec{IJ} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DH}$$

$$\vec{IJ} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE}$$

\vec{IJ} est CBL des vecteurs \vec{AD} et \vec{AE} non colinéaires

Donc \vec{IJ}, \vec{AD} et \vec{AE} coplanaires

Donc $\vec{IJ}, \vec{BC}, \vec{BF}$ sont coplanaires

b) $\vec{IJ} = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE}$

$$\vec{IJ} = \frac{3}{4}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BF}$$

$$\vec{IJ} = \underbrace{\left(\frac{3}{4}\vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BF} \right)}_{\vec{u}}$$

donc (IJ) est parallèle à la droite passant par B, est dirigé par \vec{u} qui est contenu dans (BCG)

Donc (IJ) et (BCG) sont parallèles.

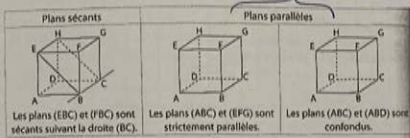
B. Position relative de deux plans de l'espace

Rappel : En géométrie dans l'espace, deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun, confondus lorsqu'ils ont tous leurs points en commun.

Deux plans sont dits sécants lorsqu'ils ne sont ni parallèles ni confondus.

Deux plans sécants se coupent (toujours) suivant une droite.

Illustration :



Quelques exercices issus de textes de baccalauréat

Exercice 1 droit = faux qui ne sont X des bases sont des rectangles.

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.

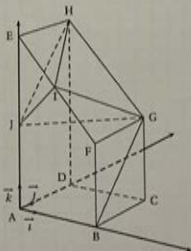
On associe à ce prisme le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB}, \quad \vec{j} = \frac{1}{4}\vec{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\vec{AE}.$$

De plus on a $\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que le vecteur \vec{n} est normal au plan (IGJ).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.

4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).

Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).

6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.

7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$