« Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition. » Laurent Schwartz

Chapitre XII Calcul intégral

I – Idée intuitive de la notion d'aire plane

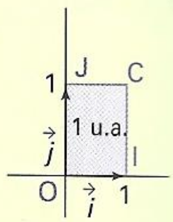
a) Généralités

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire :
– le plan, noté $\mathcal{P}$, est muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$;
– f désignant une fonction, on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$;
– a et b sont deux réels tels que a est inférieur ou égal à b.

Définition 1

On considère qu'une unité de longueur a été choisie pour le calcul des normes.

On appelle **unité d'aire,** que l'on note u.a., l'unité de mesure des aires telle que : $1 \text{ u.a.} = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$, c'est-à-dire l'aire du rectangle OICJ où I, J et C sont les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j}$.



On sait calculer l'aire de parties du plan telles que les rectangles, les triangles, les disques….

Nous allons apprendre à calculer l'aire de nouvelles parties du plan, c'est l'un des objectifs du calcul intégral.

Définition

Soit f une fonction définie, ***continue et positive*** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Notons D_f le domaine du plan délimité par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$.

On a : $D_f = \{M(x\ ;\ y)$ tels que …………….et …………………$\}$.

Illustration :

On dit que D_f est le domaine situé sous la courbe représentant f.

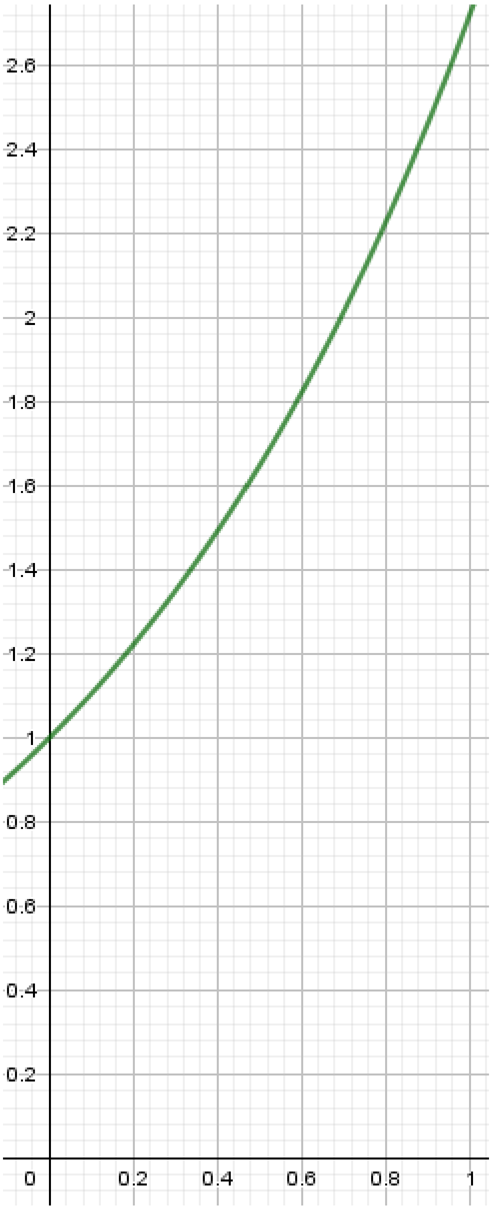
Propriété admise

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors le domaine D_f décrit précédemment admet une aire.

Ce résultat d'apparence anodine est délicat à prouver. On va apprendre à calculer l'aire d'un tel domaine.

A titre d'exemple, essayons de calculer l'aire d'un tel domaine : on va par exemple décomposer ce domaine en rectangles, dont on sait facilement calculer les aires.

A l'aide du dessin ci-dessous, proposer, après avoir hachuré D_f, un premier encadrement de l'aire de D_f où $D_f = \{M(x\,;y)\ /\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, *où* $f(x) = e^x$. Utiliser 5 rectangles.



Pour affiner le précédent encadrement, on va partager le domaine en des rectangles de largeur plus petite.

Soit n un entier naturel non nul fixé.
On subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n petits segments de même longueur égale à …..

Encadrons l'aire de D_f par deux suites (i_n) et (s_n) que l'on va définir :

i_n = somme des aires des n rectangles situés en-dessous C_f

s_n = somme des aires des n rectangles situés au-dessus de C_f.

<u>Illustration</u> *:*

Exprimer pour tout entier naturel n non nul i_n puis s_n en fonction de n.

Déterminer les limites des deux suites (i_n) et (s_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Conclure quant à la valeur de l'aire du domaine D_f cherchée.

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$, C_f sa courbe représentative, et enfin D_f le domaine situé sous C_f.

On appelle intégrale de f entre a et b, l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine D_f.

Cette intégrale est notée : $\int_a^b f(x)dx$. On lit : intégrale entre a à b de la fonction f, ou encore, somme de a à b de $f(x)dx$.

Sans entrer dans les détails (*cf.* cours de l'enseignement supérieur, pour vraiment comprendre ce qu'est une intégrale), tout comme on l'a fait dans l'exemple précédent, l'aire d'un tel domaine peut être obtenue comme limite d'une somme d'aires de rectangles, d'où le nom de somme parfois utilisé au lieu d'intégrale.

Le terme $f(x)dx$ représente l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont $f(x)$ et dx.

Les nombres a et b sont appelés les bornes de l'intégrales : a est la borne du bas, et b la borne du haut.

x est appelée la variable d'intégrale, la lettre désignant la variable n'a pas d'importance et aurait pu s'appeler t, u, v….

Le symbole $\int$ est donc l'analogue, pour une variable continue, du symbole $\sum$ pour une variable discrète.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 3]$ par : $f(x) = x + 2$. Calculer $\int_0^3 f(x)dx$ après avoir représenté le domaine associé à cette intégrale.

✂--

Propriétés évidentes de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel $a \in I$, on a :

- $\int_a^a f(x)dx = ...$

- Si f est constante sur $[a\ ;\ b]$, et vaut k, alors, $\int_a^b f(x)dx = ...$

b) Fonction définie par une intégrale

Considérons une fonction f continue et positive, définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Soit x un réel quelconque situé dans $[a\ ;\ b]$.

Hachurer le domaine du plan dont l'aire est : $\int_a^x f(t)dt$. On admet que cette aire ne dépend que de la valeur de x.

On crée donc une fonction, notée F, définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

Pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

The Théorème

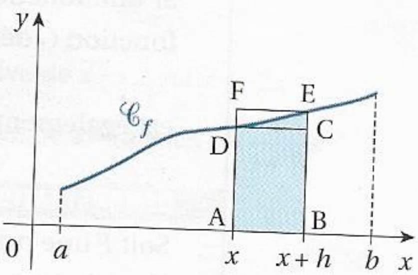
Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par :
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$, et, pour tout réel $x \in [a\ ;\ b]$, on a : $F'(x) =$ ………

Preuve :

Ce théorème est admis dans le cas général.
On le démontre ici pour une fonction continue, positive **et croissante**.
Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour x fixé, calculons $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ avec $h \neq 0$, $x \in [a\ ;\ b]$ et $x+h \in [a\ ;\ b]$.

- **Premier cas : h strictement positif,** soit $a \leqslant x < x+h \leqslant b$.

$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ x+h]$.
$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ x]$.



La différence $\Delta = F(x+h) - F(x)$ est donc, par additivité de l'aire, l'aire de la partie du plan coloriée en bleu sur la figure ci-contre.
La fonction f est croissante, donc pour tout z compris entre x et $x+h$: $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(x+h)$.
Ce qui permet de dire que Δ est comprise entre $h \times f(x)$, l'aire du rectangle ABCD, et $h \times f(x+h)$, l'aire du rectangle ABEF.
En divisant la double inégalité $h \times f(x) \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant h \times f(x+h)$ par $h > 0$, on obtient :

$$f(x) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Comme la fonction f est continue en x, lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.

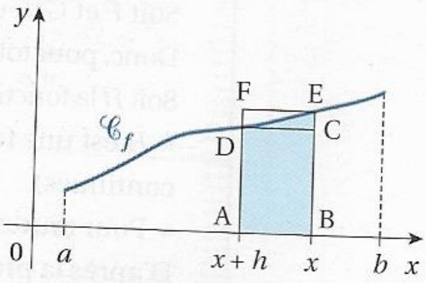
Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

- **Deuxième cas : h strictement négatif,** soit $a \leqslant x+h < x \leqslant b$.

$\Delta = F(x+h) - F(x)$ est l'opposé de l'aire de la partie du plan coloriée en bleu sur la figure ci-contre.

La fonction f est croissante, donc pour tout z compris entre $x+h$ et x : $f(x+h) \leqslant f(z) \leqslant f(x)$.

Ce qui permet de dire que $-\Delta$ est compris entre $(-h)\times f(x+h)$, l'aire du rectangle ABCD, et $(-h)\times f(x)$, l'aire du rectangle ABEF.



En divisant la double inégalité $(-h)\times f(x+h) \leqslant -[F(x+h)-F(x)] \leqslant (-h)\times f(x)$ par $-h>0$, on obtient :

$$f(x+h) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x)$$

Comme la fonction f est continue en x, lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.

Par le théorème d'encadrement des limites, on en déduit $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

- D'après l'étude des deux cas, la fonction F est dérivable en tout x de $[a\,;b]$ et $F'(x) = f(x)$.

II – Lien entre primitives et intégrales

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a un réel appartenant à I.

La fonction F définie sur I par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est LA primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque : cela établit que toute fonction continue et positive sur un intervalle admet des primitives

Preuve :

Théorème (condition suffisante à l'existence de primitives d'une fonction donnée)

Toute fonction *continue* sur un intervalle I *admet des primitives* sur cet intervalle I.

Ce théorème existentiel est très utile en pratique.
Sa démonstration est plus délicate et sera donc admis.

***Théorème* (qui permet de calculer des intégrales).**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].

♥♥♥♥♥ $\int_a^b f(x)dx =$ .... ♥♥♥♥♥**où F est une primitive quelconque de f sur [a ; b].**
On convient de noter : $[F(x)]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$.

On écrira donc : ♥♥♥♥♥.......................................♥♥♥♥♥

Cette dernière relation est parfois appelée formule de *Newton-Leibniz.*

Preuve :

✂ --

Remarques

Le réel **$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive de f choisie.**

On admettra que ce théorème reste vrai pour toute fonction f continue sur [a ; b], même si f n'est pas de signe positif sur [a ; b].

Cela amène naturellement à la définition de l'intégrale de f sur l'intervalle [a ; b] :

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de cet intervalle, et F une primitive de f sur I.

L'intégrale de f sur l'intervalle [a ; b] est égale au nombre $F(b) - F(a)$ noté : $\int_a^b f(x)dx$

Bien retenir : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. En pratique, pour alléger les calculs, on prend la constante nulle dans l'expression de F.

Application fondamentale au calcul d'intégrales :

Exercice 2

1) Calculer les intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x^2+3x+1)dx$; $\int_0^1 e^{-x}dx$; $\int_1^2 (\frac{3}{x} - x + \frac{1}{x^3})dx$; $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx$; $\int_0^1 3xe^{-x^2}dx$; $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}dx$;

2) Vérifier que pour tout réel x, on a : $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$.

✂ --

III – Propriétés de l'intégrale

Propriété

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*.
Pour tout nombre ***a*** et ***b*** dans *I*, on a :

- $\int_a^a f(x)dx = ...$

- $\int_b^a f(x)dx = ...$

Preuve :

✂ --

Propriété " Relation de Chasles"

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Pour tout nombre ***a***, ***b*** et ***c*** dans *I* on a :

♥♥♥♥♥ ♥♥♥♥♥

Par analogie avec les vecteurs, cette relation est appelée la relation de Chasles.

Preuve :

✂ --

Propriété fondamentale (linéarité de l'intégrale)

Soit *f* et *g* deux fonctions **continues** sur un intervalle I, et ***k*** un réel quelconque.
Pour tous nombres ***a*** et ***b*** situés dans I, on a :

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx =$

$\int_a^b k\times f(x)dx =$

En particulier, $\int_a^b (kf(x)+g(x))dx =$

Ces propriétés se résument en disant : propriétés de ***linéarité de l'intégrale***.

Preuve :

✂ --

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie sur ℕ par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$.

a) Déterminer $u_0 + u_1$.
b) Calculer u_1. En déduire u_0.

✂---

Signe d'une fonction, signe d'une intégrale et inégalités

Soit a et b deux réels tels que : $\boldsymbol{a \leqslant b}$.

- ♥♥♥♥♥ Si pour tout réel $x\in[a\ ;b]$, $f(x) \geq 0$, alors………………………..……..***(propriété de positivité de l'intégrale)*. ♥♥♥♥♥**

- ♥♥♥♥♥ Si pour tout réel $x\in[a\ ;b]$, $f(x) \leq 0$, alors…………………♥♥♥♥♥

Preuve :

✂---

On retiendra que ***lorsqu'on intègre dans le bon ordre*** (c'est-à-dire quand $a \leq b$), une ***fonction de signe constant***, l'***intégrale*** de cette fonction ***a le même signe que cette dernière***.

♥♥♥♥♥*Propriété* (croissance de l'intégrale) ♥♥♥♥♥

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\ ;b]$, telles que pour tout réel $x\in[a\ ;b]$, on ait : $f(x) \leq g(x)$.

Alors : ……………………………………………

Retenir : Lorsqu'on intègre dans le bon ordre, ***l'intégrale conserve le sens des inégalités***.

Preuve :

✂---

Corollaire

Soit m et M deux réels. Si pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, on a : $m \leq f(x) \leq M$,

alors................................

Preuve :

Exercice 4

a) Démontrer que $0 \leq \int_1^e \ln(x)dx \leq e-1$.

b) Justifier que pour tout réel $t \geq 0$, $\int_0^t xe^{-x}dx \geq 0$.

c_1) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$.

c_2) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, puis en déduire la nature et la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

__Remarque__ : les questions c_1 et c_2 peuvent être à la base d'un très joli développement au grand oral : la limite d'une somme infinie de nombres positifs de plus en plus petits est-elle toujours finie ?
L'exemple précédent montre que non, on appelle série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$.
Par-contre, la série de Riemann $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ elle converge ! En posant $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout entier n non nul, on peut facilement montrer que (v_n) est une suite croissante, et que $v_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ en remarquant que : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

d) Vrai ou faux ? : A-t-on : $\int_a^b (f(x))^2dx = (\int_a^b f(x)dx)^2$? Justifier.

" Si f et g sont continues sur [0 ; 1] et si $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$, alors $f = g$ sur [0 ; 1]".

✂ --

IV- L'intégration par parties

Voici un ***puissant outil*** qui permet de calculer certaines intégrales de fonctions écrites sous la forme d'un produit de deux fonctions.

Formule de l'intégration par parties notée IPP), très importante pour l'enseignement supérieur !!!

Soit u et v deux fonctions définies sur un même intervalle [a ; b], dérivables sur cet intervalle, et telles que u' et v' soient continues sur [a ; b].

On a : ♥♥♥♥♥ $\int_a^b u(x)v'(x)dx =$ ♥♥♥♥♥

Exemples d'utilisation

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 xe^x dx$; $J = \int_1^e ln(x)dx$ (retenez bien l'astuce classique ici).

$K = \int_1^e (x^2 + 2x)ln(x)dx$

2) En effectuant deux intégrations par parties successives, calculer L $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cos(x)dx$

✂--

Exercice 5

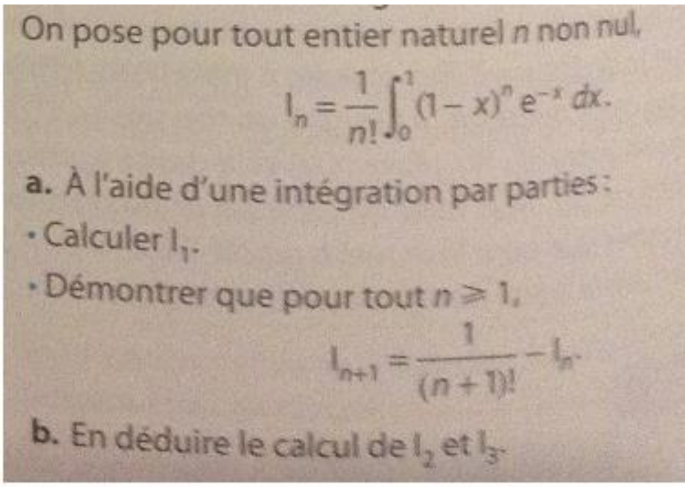
Soit $x > 0$.

a) Effectuer une IPP pour calculer : $\int_1^x \frac{ln(t)}{t^2}dt$

b) En déduire les primitives de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln(x)}{x^2}$.

✂--

Exercice 6



On pose pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties :

- Calculer I_1.
- Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$

b. En déduire le calcul de I_2 et I_3.

Exercice 7 On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$: $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer : $\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$.
3. Montrer directement que : $\forall n \geq 1,\ u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n!}$.

   En déduire : $\forall n \geq 0,\ u_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
4. Que vaut la limite, lorsque $n \to \infty$, de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$?

   Comment faire pour obtenir une valeur approchée de cette limite à 10^{-3} près ?

✂---

V - Compléments

a) Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ non réduit à un point.

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, le réel noté μ défini par :

$\mu =$

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction carrée sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

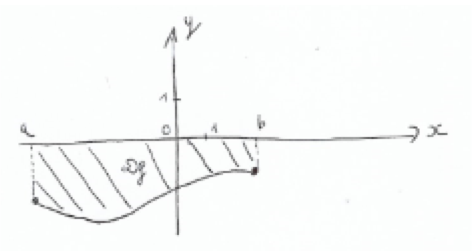
Interprétation géométrique de la valeur moyenne d'une fonction dans le cas d'une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Soit f est continue sur [a ; b], et m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à [a ; b], on a : $m \leq f(x) \leq M$, que peut-on dire de la valeur moyenne de f sur [a ;b] ?

b) Intégrale d'une fonction de signe quelconque sur un intervalle et aire.

α) Cas d'une fonction à valeurs négatives sur [a ; b]

Soit f une fonction continue et ***négative*** sur [a ; b], et C_f sa courbe représentative, et D_f le domaine au-dessus de la courbe compris entre les verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses.



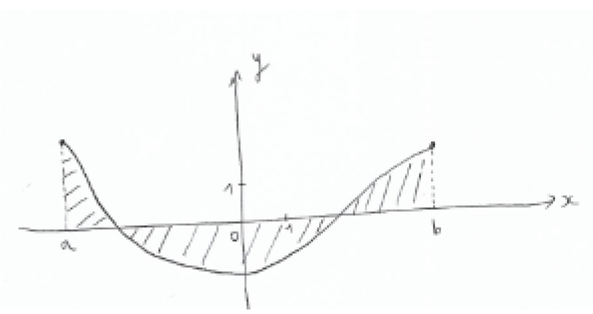
On a : $Aire(D_f) =$

Donc, si f est continue et négative sur [a ; b], $\int_a^b f(x)dx =$

β) Cas d'une fonction de signe variable sur [a ; b]

Soit f une fonction de signe variable sur [a; b]. L'aire du domaine D coloré ci-dessous est donné par :

$Aire\ (D) =$

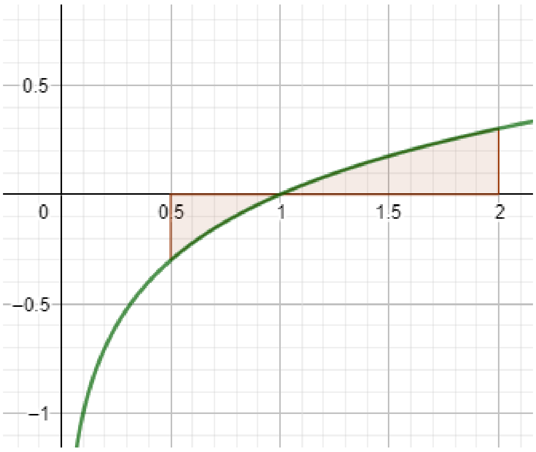


On a donc dans cet exemple : $\int_a^b f(x)dx =$

Méthode : On découpe $[a\ ;\ b]$ en intervalles sur lesquels f garde un signe constant (ce sera toujours possible en terminale), et on se sert de la définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs positives (aire sous la courbe) et de l'intégrale d'une fonction à valeurs négatives (opposé de l'aire au-dessus de la courbe).

Exemple

Calculer l'aire du domaine ci-dessous associé à la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$.

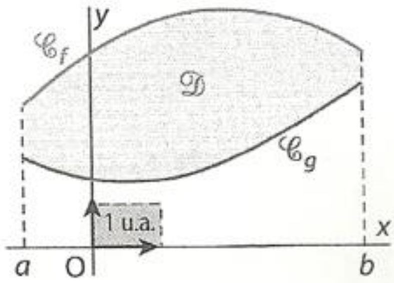


c) Aire d'une portion du plan autre qu'un domaine.

Propriété

Aire d'un domaine entre deux courbes sur $[a\,;b]$

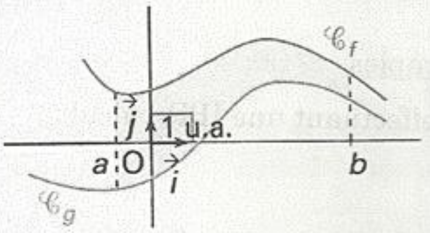
Si $\mathscr{C}_f$ **est au-dessus** $\mathscr{C}_g$ sur $[a\,;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a\,;b]$ est **aire** $(\mathscr{D}) = \int_a^b (f-g)(t)\,dt$.
En effet, lorsque f et g sont positives (voir schéma ci-contre),
aire$(\mathscr{D}) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b (f(t)-g(t))\,dt$.
On admet que ce résultat reste valable dans le cas général.



Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Soit f et g deux fonctions définies et continues sur I telles que :
pour tout x appartenant à $[a\,;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, et $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\mathscr{D} = \{M(x\,;y) \in \mathscr{P} \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

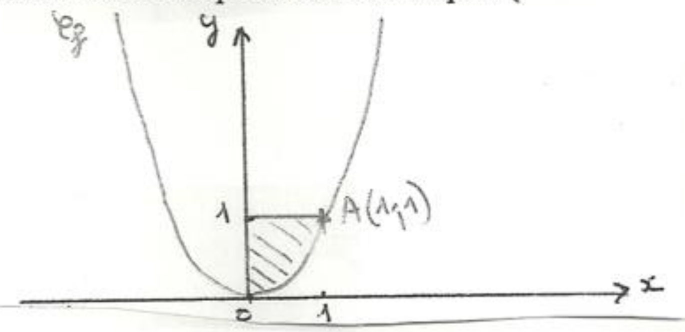
L'aire $\mathscr{A}(\mathscr{D})$, en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ est égale à $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.



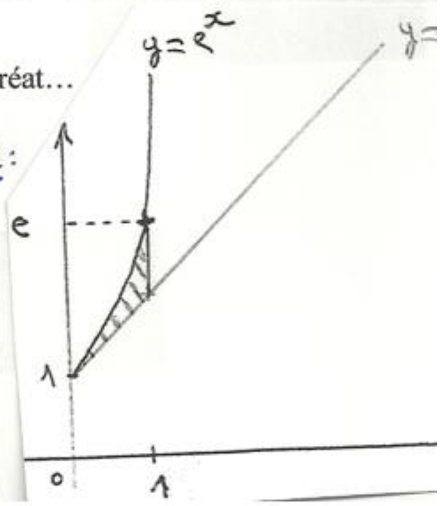
Application : attention, il y a souvent une question de ce genre au baccalauréat…

Exemple1: Calculer l'aire de la partie suivante du plan

où $g(x) = x^2$



Ex2 :

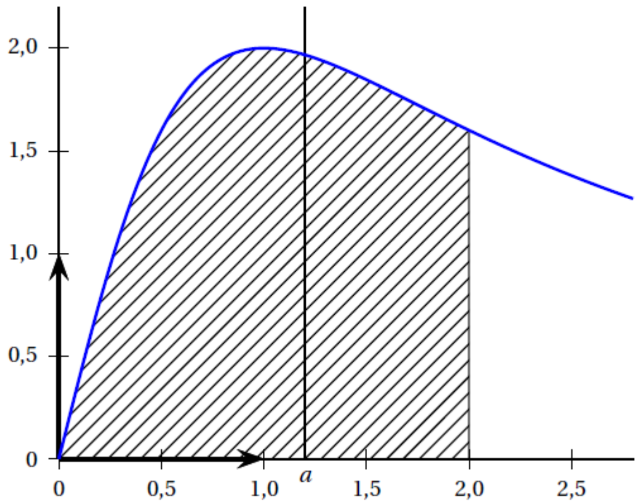


Exercices sur l'intégration

Exercice 1

La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}.$$



La valeur exacte du réel positif a tel que la droite d'équation $x = a$ partage le domaine hachuré en deux domaines d'aires égales est :

Réponse A : $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ **Réponse B :** $\sqrt{\sqrt{5}-1}$ **Réponse C :** $\ln 5 - 0,5$ **Réponse D :** $\frac{10}{9}$

✂---

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 ***(exercice fondamental dans la démarche utilisée)***

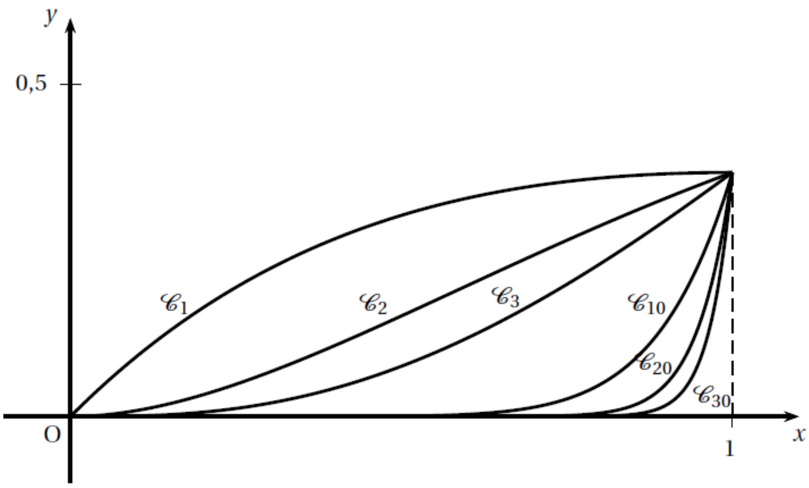
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n)$.

✂---

Exercice IV

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a.$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.

2. On pose dans cette question $a = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x + 1.$$

a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.

b. Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.

3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ?
Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

***Exercice V** (Là on fait de la belle Mathématiques !)*

122 Irrationnalité du nombre e

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx.$$

1. Calculer I_1.

2. n est un nombre entier naturel tel que $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$,

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e x^n.$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

3. À l'aide de la méthode d'intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1.$$

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

$$k_n = n!\,e - I_n.$$

a) Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n.

b) Calculer k_1. Démontrer par récurrence que pour tout nombre n de $\mathbb{N}^*$, k_n est un nombre entier naturel.

c) Avec les questions **4. b)** et **2. b)**, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, le nombre $n!\,e = k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.

5. a) p et q sont deux nombres entiers naturels non nuls.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant q$, le nombre $\dfrac{n!\,p}{q}$ est un entier naturel.

b) En déduire alors que le nombre e est irrationnel.

La découverte des nombres irrationnels (ou incommensurables) remonte sans doute à l'époque de Pythagore avec le calcul de la longueur de la diagonale du carré de côté 1, cette longueur étant égale à $\sqrt{2}$. L'irrationnalité du nombre e a été prouvée par Leonhard Euler en 1737.

Pour tous ceux qui ne visent que le côté utilitaire des choses (ça sert à quoi ?), ce bel exercice vous montre que les Mathématiques, le calcul, et le raisonnement logique existent indépendamment des applications que l'on peut en donner, et débouchent parfois sur des résultats spectaculaires et qui ne servent… à rien en pratique !

Etudier les Mathématiques pour ce qu'elles sont, et non pas pour ce à quoi elles peuvent servir, est une forme de curiosité d'esprit qui permet de saisir les multiples facettes et la beauté de cette discipline. Le corollaire à tout cela est de passer du temps à étudier et comprendre des concepts abstraits. Comme le disait Virgile, ***« Labor omnia vincit improbus »***.

A l'heure du consumérisme avancé, des addictions aux smartphones et à leurs applications souvent débiles et abrutissantes, les seules questions de l'utilité à court terme et de l'instantanéité semblent intéresser les individus.

Gageons que le travail effectué cette année en Mathématiques aura su vous convaincre qu'étudier, c'est sortir de l'instantanéité et du consumérisme.

Les 500 pages de mon modeste cours auront essayé, le plus souvent possible, d'être fidèle à l'essence des Mathématiques.

Les exercices suivants (délicieux) sont des exercices classiques de MPSI/PCSI.

Exercice 45 Soit n et p sont des entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p \mathrm{d}x$.

1. Calculer $I(N,0)$ pour tout entier naturel N.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n,p}$ et $I_{n+1,p-1}$.
3. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tous les couples (n,p).

Exercice 46 On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$: $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1. Pour $x \neq -1$ et $n \geq 1$, établir : $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-x)^n}{1+x}$.
2. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2 - u_n$.
3. Justifier l'inégalité $\left|\displaystyle\int_0^1 \dfrac{(-x)^n}{1+x}dx\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge : limite ?

Exercice 49 On pose, pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln^n x \mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que : $\forall x \in [1,e]$, $\ln x \leq \dfrac{x}{e}$.
   En déduire un encadrement de u_n permettant de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
3. Montrer que : $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}u_n$.
   En déduire l'existence et la valeur de $C = \lim\limits_{n\to\infty}(nu_n)$: on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$.

Exercice 53 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$ (k entier), on pose $I_{n,k} = \dbinom{n}{k}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x)^{n-k}(1-x)^k \mathrm{d}x$.

1. Calculer, à n fixé, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_{n,k}$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n,k} = I_{n,k-1}$ (pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$).
   En déduire $I_{n,k}$.