Applications du produit scalaire

A - Relation d'Al-Kashi (ou relation de Pythagore généralisée)

Pour tout triangle ABC, on a les relations suivantes :

Preuve :

✂---

Applications

1) Soit ABC un triangle tel que AB $= 6\,cm$, AC $= 8\,cm$ et BC $= 11\,cm$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie à un degré près.

2) Soit IJK un triangle tel que IJ $= 5\,cm$, JK $= 8\,cm$ et $\widehat{IJK} = 60°$.
Déterminer la longueur IK au mm près.

3) Soit UVW un triangle tel que : UV $= 8\,cm$; UW $= 10\,cm$ et $\widehat{UVW} = 60°$.
Déterminer la longueur VW au mm près.

✂---

B – Géométrie analytique

Définition : Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à une droite (d) s'il est non nul et s'il est orthogonal à un vecteur directeur de (d).

Illustration :

***Propriété* (équation normale d'une droite)** Soit $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\,)$ un repère orthonormé du plan, (d) une droite de vecteur normal $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Alors une *équation cartésienne* de (d) est : *Réciproquement*, si a et b sont deux réels, non tous les deux nuls, l'équation : $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite dont un vecteur normal est $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Preuve :

✂---

Exemple 1

Soit $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ un repère orthonormé, $A(2\ ;\ 4)$ et $B(-\ 6\ ;\ 2)$.
Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

✂---

Exemple 2

Soit $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ un repère orthonormé, $A(1\ ;\ 2)$; $B(4\ ;\ 4)$ et $C(4\ ;\ 0)$.

1) Déterminer l'équation de la hauteur issue de A du triangle ABC.
2) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre Ω du triangle ABC.

✂---

C – Equations cartésiennes de cercles

Théorème

Soient A et B deux points du plan.

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble de tous les points M tels que ……………

Remarque et illustration : Ce théorème est une caractérisation du cercle de diamètre [AB].

Il signifie donc, d'une part, que si un point M est situé sur le cercle de diamètre [AB], alors le triangle MAB est rectangle en M, et que réciproquement, si un triangle est inscrit dans un cercle dont l'un des côtés en est un diamètre, alors ce triangle est rectangle.
Vous retrouvez ces propriétés abondamment vues en collège : notez l'efficacité et la concision de l'expression de ce théorème en utilisant le très performant outil produit scalaire !

__Exemple__

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère orthonormé, A(1 ; 2) et B(3 ; 6), et soit $M(x\ ;\ y)$.

A quelle condition portant sur x et y le point M est-il situé sur le cercle de diamètre [AB] ?

✂---

***__Propriété__* (Equations cartésiennes d'un cercle)**

1) Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère orthonormé. Le cercle de centre $\Omega\ (a\ ;\ b)$ et de rayon R a pour équation cartésienne : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

2) Réciproquement, l'ensemble $\Lambda = \{M(x\ ;\ y)\ /\ x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0\}$ est soit vide soit un cercle éventuellement réduit à son centre.

__Preuve__ :

✂---

__Exemples__ : Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère orthonormé.

Déterminer la nature et les propriétés caractéristiques des ensembles suivants :

a) $\Lambda_1 = \{ M(x\ ;\ y)\ /\ x^2+y^2-2x+y-6=0 \}$

b) $\Lambda_2 = \{ M(x\ ;\ y)/4x^2+4y^2+x-y+8=0 \}$

✂---

__Exercice 1__

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB], avec A(4 ; 5) et B(-2 ; 7).

2) Vérifier que le point C(4 ; 7) appartient à ce cercle.

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à ce cercle en le point C.

4) Déterminer, suivant les valeurs du réel a, le nombre de points d'intersection de la droite (d) d'équation : $x = a$ et de ce cercle.

✂---

__Exercice 2__

Pot-pourri d'exercices sur les applications du produit scalaire :

Exercice 25 page 255, 27page 255, 83page 259

Exercice 86 page 259.

✂---

__Exercice 3__

Trouver une formule compacte qui permet de calculer, dans un repère orthonormé, la distance d'un point M de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ données, à la droite (d) dont une équation cartésienne est : $ax+by+c=0$.

__Exercice 4__

Exercice 2.10 *Soit $\mathcal{H}$ la courbe représentative de la fonction $y=\dfrac{1}{x}$ en repère orthonormal, soient A, B et C trois points deux à deux distincts de $\mathcal{H}$, montrer que l'orthocentre du triangle (ABC) est encore sur $\mathcal{H}$.*